

۲۱. گزینه ۳

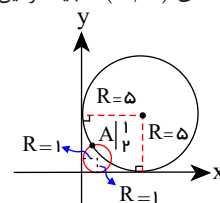
معادله‌ی دایره‌ای که در ناحیه‌ی اول بر محورهای مختصات مماس است، عبارت است از:

$$(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

نقطه‌ی $A(1, 2)$ باید در این دایره صدق کند:

$$(1-R)^2 + (2-R)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (R-1)(R-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R=1 \Rightarrow S=\pi \\ R=5 \Rightarrow S=25\pi \end{cases}$$



۲۲. گزینه ۲ چون مرکز دایره روی قطر آن قرار دارد، ابتدا مرکز دایره را به دست آورده و سپس در معادله‌ی قطر آن صدق می‌دهیم:

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) \Rightarrow O(m, -\frac{m+1}{2}) \Rightarrow -m+1-m=1 \Rightarrow m=0$$

معادله‌ی دایره به صورت زیر در می‌آید:

$$x^2 + y^2 - y = 6 \Rightarrow (x)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{0 + 1 + 24}}{2} = \frac{5}{2}$$

تذکر: در دایره‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ مرکز به صورت $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ است و شعاع دایره از رابطه‌ی

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

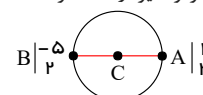
البته به جای رابطه‌ی فوق می‌توان به یاد سپرد:

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c} = \sqrt{x_{\text{مرکز}}^2 + y_{\text{مرکز}}^2 - c}$$

۲۳. گزینه ۱

مرکز دایره وسط قطر AB است یعنی:

$$AB \text{ وسط } C = \frac{A+B}{2} \Rightarrow C = \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{2+2}{2} = 2 \end{cases}$$



معادله دایره را تقسیم بر ۲ می‌کنیم تا ضرایب x^2 و y^2 یک شوند.

$$x^2 + y^2 + \frac{a}{2}x - \frac{b}{2}y - \frac{c}{2} = 0$$

$$f'_x = 0 \Rightarrow 2x + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow -4 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = 8$$

$$f'_y = 0 \Rightarrow 2y - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow 4 - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 8$$

$$R = AC = \sqrt{(1+2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9+0} \Rightarrow R = 3$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \Rightarrow 9 = \frac{16 + 16 + 4(-\frac{c}{2})}{4} \Rightarrow 36 = 32 + 2c \Rightarrow c = 2$$

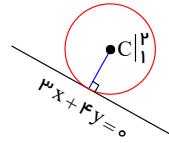
از طرفی

۲۴. گزینه ۴ فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع می‌باشد.

$$R = CH = \frac{|\frac{6}{5} + \frac{4}{5} + 0|}{\sqrt{\frac{36}{25} + \frac{16}{25}}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{معادله دایره: } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{توجه کنید فاصله نقطه } A \left| \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \text{ از خط به معادله } ax + by + c = 0 \text{ از رابطه } AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ بدست می آید.}$$



گزینه ۴

$$MA = \sqrt{3}MB \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{3}\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16} = \sqrt{3}\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9} \\ \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 3(x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10) \\ \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 2x - 10y + 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 5 = 0$$

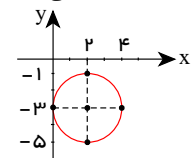
$$\Rightarrow f'_x = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad f'_y = 0 \rightarrow 2y - 5 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow C \left| \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right|$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{1 + 25 - 20}{4} = \frac{6}{4} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۲۶. گزینه ۲ واضح است که مرکز دایره $C \left| \frac{2}{-3} \right|$ می باشد شعاع دایره هم که ۲ می باشد معادله دایره را می نویسیم. (شعاع دایره مماس بر محور

ها $R = |\alpha|$ می باشد)

$$C \left| \frac{2}{-3} \right|, \quad R = 2 \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$$



۲۷. گزینه ۳ ۱- مرکز دایره ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه ای (R, R) است.

۲- مرکز دایره ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه ای $(-R, R)$ است.

۳- مرکز دایره ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه ای $(-R, -R)$ است.

۴- مرکز دایره ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه ای $(R, -R)$ است.

که شعاع دایره است.

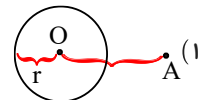
چون دایره از نقطه $\left| \frac{-2}{1} \right|$ می گذرد پس دایره در ناحیه دوم محورهای مختصات بر هر دو محور مماس است پس مرکز دایره $C \left| \frac{-R}{R} \right|$ است.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{\text{صدق}} (-2 + R)^2 + (1 - R)^2 = R^2$$

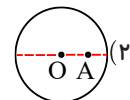
$$\Rightarrow 4 + R^2 - 4R + 1 + R^2 - 2R = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases}$$

۲۸. گزینه ۳ دو وضعیت را در نظر می گیریم: ۱) خارج دایره $A(2)$ داخل دایره است.

$$\begin{cases} \lambda = OA - r \\ 12 = OA + r \end{cases} \Rightarrow 12 - \lambda = 2r \Rightarrow r = 2$$



$$\begin{cases} r - OA = \lambda \\ r + OA = 12 \end{cases} \Rightarrow 2r = 20 \Rightarrow r = 10$$



۲۹. گزینه ۴ باید بدانیم که $C: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در صورتی معادله یک دایره به شعاع R است که

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0 \quad \text{نقطه ای } M = (x_1, y_1) \text{ وقتی خارج دایره } C(x, y) = 0 \text{ قرار دارد که } C(x_1, y_1) > 0 \text{ در این جا}$$

باید داشته باشیم:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^2}{4} + \frac{4}{4} - m > 0 \Rightarrow m < 5 \\ C(1, 2) = 1 + 4 + 2 - \lambda + m > 0 \Rightarrow m > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 < m < 5$$

۳. گزینه ۳ زاویه مورد نظر زاویه بین دو مماس است اگر α زاویه بین دو مماس باشد داریم:

$$R' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}} = \sqrt{\frac{16 + 16 - 24}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

$$AT = \sqrt{C(\circ, \circ)} = \sqrt{\circ + \circ - \circ - \circ + 6} \Rightarrow \text{طول مماس} = AT = \sqrt{6}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{AT} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

