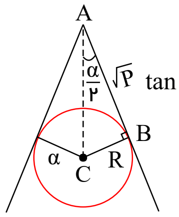
تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۱۰	سریال ۱۷۹۳۹۲
موضوع		دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۳ زاویه مورد نظر زاویه بین دو مماس است اگر α زاویه بین دو مماس باشد داریم:



$$\sqrt{P}\quad \tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{BC}{AB}\longrightarrow \tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{R}{\sqrt{P}}$$

$$R'=\sqrt{\frac{a^{۲}+b^{۲}-۴c}{۴}}=\sqrt{\frac{۱۶+۱۶-۲۴}{۴}}=\sqrt{\frac{۸}{۴}}=\sqrt{۲}$$

$$AT=\sqrt{C(۰,۰)}=\sqrt{۰+۰-۰-۰+۶}\Rightarrow \text{طول مماس}=AT=\sqrt{۶}$$

$$\tan\frac{\alpha}{۲}=\frac{R}{AT}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\to\frac{\alpha}{۲}=۳۰^{\circ}\to\alpha=۶۰^{\circ}$$

۲۲. گزینه ۴ معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y=-x$ است پس هر نقطه روی آن به‌صورت $A\left|\begin{matrix}\alpha\\-\alpha\end{matrix}\right.$ است این نقطه را در معادله دایره صدق داده و عدد حاصل را P می‌نامیم و دقت کنید طول مماس $\sqrt{P}$ است.

$$\text{طول مماس}=\sqrt{c(\alpha,-\alpha)}=\sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(-\alpha+۳)^{۲}-۲}\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(-\alpha+۳)^{۲}-۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}۸=\alpha^{۲}-۲\alpha+۱+\alpha^{۲}-۶\alpha+۹-۲\Rightarrow ۲\alpha^{۲}-۸\alpha=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۰\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\\ \alpha=۴\Rightarrow A\left|\begin{matrix}۴\\-۴\end{matrix}\right.\end{cases}$$

۲۳. گزینه ۳ ابتدا معادله دایره را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}f'_x=۰\to ۲x-۴=۰\to x=۲\\ f'_y=۰\to ۲y-۶=۰\to y=۳\end{cases}\Rightarrow C\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$$

چون قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد نقطه $C\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ در هر گزینه‌ای که صدق کند جواب است. (گزینه‌ی ۳)

۲۴. گزینه ۳ قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

$$\begin{matrix}f'_x=۰\to ۲x+۴=۰\to x=-۲\\ f'_y=۰\to ۲y-۴=۰\to y=۲\end{matrix}\Rightarrow C\left|\begin{matrix}-۲\\۲\end{matrix}\right.\in d'$$

$y+\frac{۱}{۲}x=۳\to m=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عمود}}m'=۲\Rightarrow$ شیب خط مطلوب ۲ می‌باشد.

حال با داشتن شیب و نقطه، معادله خط قائم را می‌نویسیم یعنی:

$$d':y-۲=۲(x+۲)\to y=۲x+۶$$

۲۵. گزینه ۱ قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد و شیب یک خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با سمت راست محور طول‌ها تشکیل می‌دهد.

$$m=\tan ۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

حال با داشتن شیب و یک نقطه، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۳\sqrt{۳})\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-۱$$

۲۶. گزینه ۱ برای پیدا کردن معادله وتر مشترک بین دو دایره کافی است جملات از درجه دوم را بین آن‌ها حذف کنیم.

$$-\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}+۴x-۴y+۴=۰\\ \underline{x^{۲}+y^{۲}+۲y-۲x-۸=۰}\end{cases}$$

$$۶x-۶y+۱۲=۰\Rightarrow x-y+۲=۰$$

قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مرکز دایره هر گزینه‌ای که در این خط صدق کند جواب است.

بررسی گزینه ۱ : $f'_x=۰\Rightarrow ۲x-۸=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ f'_y=۰\Rightarrow ۲y-۱۲=۰\Rightarrow y=۶\Rightarrow C\left|\begin{matrix}۴\\۶\end{matrix}\right.$

مرکز دایره گزینه اول در معادله وتر مشترک صدق می‌کند و مرکز دایره‌های بقیه گزینه‌ها در معادله وتر مشترک صدق نمی‌کنند.

۲۷. گزینه ۱ معادله استاندارد دایره چنین است.

$$(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۱۳$$

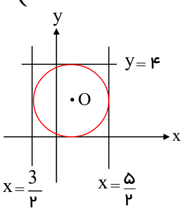
فاصله مرکز دایره $(۲,-۳)$ از خط مماس $۲x-۳y+m-۲=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$\left|\frac{۴+۹+m-۲}{\sqrt{۱۳}}\right|=\sqrt{۱۳}\Rightarrow ۱۱+m=\pm ۱۳\Rightarrow m=۲\ ,\ -۲۴$$

۲۸. گزینه ۲ باتوجه به معادله ی دایره، مختصات مرکز و شعاع دایره عبارتند از:

$$\begin{cases}\text{مرکز}\ :\ O=(\frac{-(-۱)}{۲},-\frac{a}{۲})=(\frac{۱}{۲},-\frac{a}{۲})\\ \text{شعاع}\ :\ R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+a^۲-۴(\frac{۱}{۴})}=\frac{|a|}{۲}\end{cases}$$

چون مرکز دایره روی تمام قطرهای آن قرار دارد، پس مختصات O باید در خط $y=۲x+۱$ صدق کند.



$$-\frac{a}{۲}=۲(\frac{۱}{۲})+۱=۲\Rightarrow a=-۴\Rightarrow O=(\frac{۱}{۲},۲),R=۲$$

مطابق شکل این دایره بر چهار خط زیر مماس است:

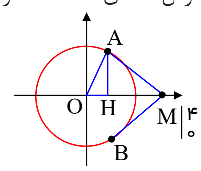
$$x=\frac{۵}{۲},x=-\frac{۳}{۲},y=۴,y=۰\quad(\text{محور }x\text{ها})$$

۲۹. گزینه ۲ چون مرکز دایره $C\left|\begin{matrix}-۳\\۰\end{matrix}\right.$ $(f'_x=۰\rightarrow ۲x+۶=۰\rightarrow x=-۳\ ,\ f'_y=۰\rightarrow ۲y=۰\rightarrow y=۰)$ در خط داده شده صدق می‌کند پس خط داده شده قطری از دایره است و فاصله بین دو نقطه‌ای که دایره را قطع می‌کنند قطر دایره است.

$$R^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}\xrightarrow[R=۵]{\text{قطر}=۱۰}۲۵=\frac{۳۶+۰+۴c}{۴}\Rightarrow ۴c+۳۶=۱۰۰\Rightarrow ۴c=۶۴\Rightarrow c=۱۶$$

۳۰. گزینه ۱ راه حل اول: از نقطهٔ A عمود AH را بر محور xها وارد می‌کنیم. در این صورت OH برابر طول نقطهٔ A و AH برابر عرض نقطهٔ A است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM داریم:

$$\begin{cases}OM=۴\\OA=۲\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{OAM}:OA^۲=OH\times OM\Rightarrow ۴=OH\times ۴\Rightarrow OH=۱$$



$$\overset{\Delta}{OAH}:AH^۲=OA^۲-OH^۲=۴-۱=۳\Rightarrow AH=\sqrt{۳}\quad \text{یا}\quad AH^۲=OH\times HM=۱\times ۳\Rightarrow |AH|=\sqrt{۳}$$

پس $A(۱\ ,\ \sqrt{۳})$ در نتیجه $B(۱\ ,\ -\sqrt{۳})$ است.

راه حل دوم: دسته خطوط گذرنده از نقطهٔ M را می‌نویسیم:

$$y-۰=m(x-۴)\Rightarrow y=m(x-۴)$$

حال برای این‌که این خط بر دایره مماس باشد، باید فاصلهٔ مرکز دایره از این خط برابر شعاع دایره باشد:

$$\left.\begin{matrix}r=۲\\O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{|۰-m(۰-۴)|}{\sqrt{۱^۲+m^۲}}=۲\Rightarrow ۱۶m^۲=۴(۱+m^۲)\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$y = \frac{\pm ۱}{\sqrt{۳}}(x - ۴)$$

حال کافی است این خط را با دایره قطع دهیم:

$$\left.\begin{array}{c} y = \frac{\pm ۱}{\sqrt{۳}}(x - ۴) \\ x^۲ + y^۲ = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow x^۲ + \frac{۱}{۳}(x - ۴)^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{۴}{۳}x^۲ - \frac{۸}{۳}x + \frac{۱۶}{۳} = ۴ \Rightarrow \frac{۴x^۲}{۳} - \frac{۸}{۳}x + \frac{۴}{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۳}$$