ریاضیات

۱۰۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a, aq^2, aq^3 \xrightarrow[\text{دنباله‌ی حسابی}]{\text{شرط تشکیل}} aq^2 = \frac{a+aq^3}{2} \Rightarrow 2q^2 = 1+q^3 \Rightarrow q^3 - 2q^2 + 1 = 0$$

یکی از ریشه‌ها $q=1$ است. با تقسیم بر $q-1$ و تجزیه داریم:

$$(q-1)(q^2-q-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

اگر $q>0$ باشد، دنباله‌ی هندسی یکنوا می‌شود:

$$q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

نکته: اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی (عددی) باشند، آن‌گاه: $2b=a+c$

۱۰۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$S_4 = a_5 \Rightarrow \frac{4}{2}(2a+3d) = a+4d \Rightarrow 4a+6d = a+4d \Rightarrow d = -\frac{3}{2}a$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a}{a+d} = \frac{a}{a-\frac{3}{2}a} = -2$$

نکته: جمله‌ی nام دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d برابر است با: $a_n = a+(n-1)d$

نکته: مجموع nجمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d عبارت است از: $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$

۱۰۳- گزینه ۲ پاسخ است.

شرط تشکیل دنباله‌ی هندسی آن است که:

$$4\times\frac{1}{4} = a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

چون دنباله غیریکنواست، پس $a=-1$ و در نتیجه $a_1 = 4$ و $q=-\frac{1}{4}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} \text{حد مجموع مربع جملات} = \dfrac{a_1^2}{1-q^2} \\ \text{حد مجموع جملات مرتبه‌ی زوج} = \dfrac{a_2}{1-q^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{a_1^2}{1-q^2}}{\frac{a_1 q}{1-q^2}} = \frac{a_1}{q} = \frac{4}{-\frac{1}{4}} = -16$$

چون جملات مرتبه‌ی زوج دنباله $aq, aq^3, aq^5, \cdots$ می‌باشند، لذا قدرنسبت این دنباله q^2 است.

نکته: حد مجموع دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت $q(|q|<1)$ برابر است با: $\frac{a}{1-q}$

۱۰۴- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌ی ۳ منفی است ولی گزینه‌های دیگر مثبت هستند.

گزینه‌ی ۱: $a<0<b \xrightarrow{b^{-1}>0} ab^{-1} < b^{-1}b \Rightarrow 1-ab^{-1}>0$

گزینه‌ی ۲: $a<0<b \xrightarrow{a^{-1}<0} aa^{-1} > a^{-1}b \Rightarrow 1-ba^{-1}>0$

گزینه‌ی ۳: $a<0<b \Rightarrow a-b<0$

گزینه‌ی ۴: $a<0<b \Rightarrow \frac{1}{a}<0 \,,\, \frac{1}{b}>0 \Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{a}>0 \Rightarrow b^{-1}-a^{-1}>0$

۱۰۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left|[2x-2/5]\right|<3 \Rightarrow -3<[2x-2/5]<3 \Rightarrow -2\le 2x-2/5<3 \Rightarrow \frac{1}{2}\le 2x<\frac{11}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}\le x<\frac{11}{4}$$

برای آن‌که نابرابری فوق یک بازه‌ی متقارن را نمایش دهد، باید a برابر با $\frac{1}{4}$ باشد.

یادآوری: بازه‌ی $(a-\delta, a+\delta)$ یک بازه‌ی متقارن با نقطه‌ی میانی a و شعاع δ می‌باشد.

۱۰۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a'_n = \frac{4-3\times 5}{(3n+1)^2} = \frac{-11}{(3n+1)^2} < 0$$

این دنباله همواره نزولی و همگرا به $\frac{4}{3}$ است، لذا:

$$n>32 \Rightarrow n\ge 33 \Rightarrow a_n \in (\frac{4}{3}, a_{33}] \Rightarrow a_n \in (\frac{4}{3}, \frac{137}{100}] \Rightarrow a_n \in (1/\bar{3}, 1/37]$$

البته شاید برخی از دانش‌آموزان به‌جای $(\ell, a_{33}]$ بازه‌ی (ℓ, a_{32}) را اختیار کرده باشند که درست است، اما دقیق‌ترین نمی‌باشد.

۱۰۷- گزینه ۳ پاسخ است.

گزاره‌ی بیان شده در صورت مسئله:
$$\forall k>0\ \ \exists M\in\mathbb{N}: n\ge M \Rightarrow a_n<-k$$

تعریف حد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ است، پس:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+|a_n|}{a_n}\xlongequal{a_n<-k}\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)=0-1=-1$$

۱۰۸- گزینه ۳ پاسخ است.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2^n)+2^{n+2}}{n(2^{n+1})+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n(2^n)}\,(1+\frac{4}{n})}{\cancel{n(2^n)}\,(2+\frac{2}{n(2^n)})}=\frac{1+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

بیان دوم:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times2^n+4\times2^n}{2n\times2^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)\times2^n}{2n\times2^n+2}\cong\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)}{2n}=\frac{1}{2}$$

۱۰۹- گزینه ۳ پاسخ است.

راه حل تشریحی: با توجه به اتحاد $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$، حاصل $1-\cos\frac{1}{n}$ برابر $2\sin^2\frac{1}{2n}$ است.
$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2(1-\cos\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2(2\sin^2\frac{1}{2n})=\lim_{n\to+\infty}(n+1)^2(2(\frac{1}{2n})^2)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

راه حل تستی:
$$\underset{u\to0}{1-\cos u}\simeq\frac{u^2}{2}\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}(n+1)^2\left(\frac{(\frac{1}{n})^2}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

۱۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: $A=\{x\in\mathbb{R}:2\le x<3\}$ $\qquad \text{Sup}=3\not\in A \qquad \inf=2\in A$

گزینه‌ی ۲: $-2<x<1 \Rightarrow 0\le|x|<2$ $\qquad \text{Sup}=2\not\in A \qquad \inf=0\in A$

گزینه‌ی ۳: $\frac{1}{x^2-1}\le 0 \Rightarrow x^2-1<0 \Rightarrow -1<x<1$ $\qquad \text{Sup}=1\not\in A \qquad \inf=-1\not\in A$

گزینه‌ی ۴: واضح است که مقادیر بزرگ x در این نامساوی صدق می‌کند. پس مجموعه جواب این نامساوی، کران بالا ندارد.

۱۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}<1\xrightarrow{a_n<0}a_n>a_{n+1}\Rightarrow a_n \text{ نزولی است}$$

چون a_n کراندار است، پس همگرا نیز می‌باشد.

نکته: هر دنباله‌ی یکنوا و کراندار همگراست.

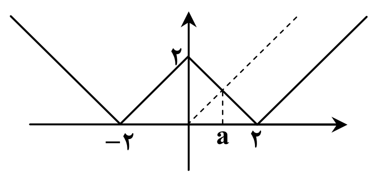
۱۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم $n+2>0$ و تابعی صعودی است و نیز $\cos\frac{\pi}{n+3}$ برای nهای طبیعی مثبت و صعودی است، پس a_n صعودی است اما $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ یعنی a_n صعودی و بی‌کران و واگراست.

نکته: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع صعودی و مثبت باشند، $f(x)g(x)$ صعودی است.

پاسخ پرسش‌های درس‌های سال چهارم

۱۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.



نمودار توابع $y=||x|-2|$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم. در بازه‌ی $(a,+\infty)$ نمودار $y=x$ از نمودار $y=||x|-2|$ بالاتر است. نقطه‌ی a محل برخورد دو تابع در بازه‌ی $(0,2)$ است.
$$0<x<2\Rightarrow||x|-2|=x\Rightarrow|x-2|=x\Rightarrow2-x=x\Rightarrow x=1$$

البته می‌توانستیم از ابتدا خود نامعادله‌ی اولیه را تعیین علامت کنیم.

۱۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.
$$|x+3|=3|x|+1$$

الف) $x\ge0\Rightarrow x+3=3x+1\Rightarrow x=1$

ب) $-3\le x<0\Rightarrow x+3=-3x+1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

ج) $x+3<0\Rightarrow -x-3=3x+1\Rightarrow 4x=-4\Rightarrow x=-1$ غ ق ق (چون در شرط $x<-3$ صدق نمی‌کند.)

پس دو نقطه یافت می‌شود.

۱۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|a_n-۲|=\left|۲-\frac{(-۱)^n}{n}-۲\right|<\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow\frac{۱}{n}<\frac{۱}{۲۰۰}\Rightarrow n>۲۰۰\Rightarrow n\geq ۲۰۱$$

۱۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

راه حل اول: کافی است حد $\sqrt{n^۲+۴n}-n$ را بیابیم.

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^۲+۴n}-n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^۲+۴n)-n^۲}{\sqrt{n^۲-۴n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۴n}{\sqrt{n^۲-۴n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{۴n}{n+n}=۲$$

پس حد دنباله‌ی داده شده برابر ۱ است.

راه حل دوم: از هم‌ارزی رادیکال‌ها در ∞ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[p]{an^p+bn^{p-۱}+\cdots}\simeq\sqrt[p]{a}\left|n+\frac{b}{ap}\right| \qquad \sqrt{n^۲+۴n}\simeq|n+۲|$$

اگر p فرد باشد، هم‌ارزی فوق قدرمطلق نیاز ندارد.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^۲+۴n}-(n+۱))\cong(n+۲)-(n+۱)=۱$$

۱۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a_n=\log(۲n+۱)+\log(۵n+۱)-۲\log n=\log((۲n+۱)(۵n+۱))-\log n^۲=\log\frac{(۲n+۱)(۵n+۱)}{n^۲}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=\log ۱۰=۱$$

نکات:

$$۱)\log xy=\log x+\log y \qquad ۲)\log\frac{x}{y}=\log x-\log y \qquad ۳)\log_{b^n}^{a^m}=\frac{m}{n}\log_b^a$$

۱۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به قضیه‌های ۱ و ۲ بخش ۱-۷ کتاب، هر دنباله‌ی یکنوای کراندار همگراست، بنابراین دنباله‌ی گزینه‌ی ۴ وجود ندارد.

مثال برای گزینه‌ی ۱: $a_n=\frac{(-۱)^n}{n}$ مثال برای گزینه‌ی ۲: $a_n=-n$ مثال برای گزینه‌ی ۳: $a_n=-۱-\frac{۱}{n}$

۱۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

تعریف دنباله‌ی صعودی: $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ a_{n+۱}\geq a_n$

می‌دانیم: $\cos(n\pi)=(-۱)^n$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$a_{n+۱}\geq a_n\Rightarrow n+۱+a(-۱)^{n+۱}\geq n+a(-۱)^n\Rightarrow ۱\geq a(-۱)^n-a(-۱)^{n+۱}\Rightarrow ۱\geq a(-۱)^n(۱-(-۱))\Rightarrow ۱\geq ۲a(-۱)^n$$

شرط فوق باید هم برای nهای زوج و هم برای nهای فرد برقرار باشد.

$$\begin{cases}\text{زوج } n:\ ۲a\leq ۱\Rightarrow a\leq\frac{۱}{۲}\\ \text{فرد } n:\ -۲a\leq ۱\Rightarrow a\geq-\frac{۱}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\cap}-\frac{۱}{۲}\leq a\leq\frac{۱}{۲}$$

۱۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

فرض کنیم $a_n=۲+\frac{(-۱)^n}{۱۰۰۰}$، این دنباله واگراست و در شرط داده شده صدق می‌کند. لذا همگرا بودن $\{a_n\}$ منتفی است و یا فرض کنیم $a_n=۲+\frac{۱}{n+۳۰۰}$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty}a_n=۲$ و شرط داده شده برقرار است، پس واگرایی هم منتفی است.

چون جملات ۱ تا ۹۹ دنباله، کراندارند (هر مجموعه‌ی متناهی min و max دارد) و جمله‌های ۱۰۰ به بعد هم در یک همسایگی نقطه‌ی ۲ قرار می‌گیرند، پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ کراندار است یعنی عبارت داده شده فقط کرانداری را نشان می‌دهد. در نتیجه گزینه‌ی ۴ پاسخ است

پاسخ پرسش‌های درس‌های پایه

۱۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$g^{-۱}(۳)=۱\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}g(۱)=۳$$

$$f(g(x))=x^۳+x\xrightarrow{x=۱}f(g(۱))=۱+۱\Rightarrow f(۳)=۲$$

$$f(۳)=۲\xrightarrow{\text{تعریف تابع وارون}}f^{-۱}(۲)=۳$$

۱۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر f بخواهد تابع باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند:

$$\begin{cases}(۱,۲)\in f\\ (۱,a)\in f\end{cases} \xrightarrow{\text{f تابع است}} a=۲$$

$$f=\{(۱,۲),(b,۴),(۱,۲),(۳,۴)\}=\{(۱,۲),(۳,۴),(b,۴)\}$$

اگر f بخواهد یک‌به‌یک باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های دوم یکسان داشته باشند:

$$\begin{cases}(۳,۴)\in f\\ (b,۴)\in f\end{cases} \xrightarrow{\text{f یک‌به‌یک}} b=۳ \Rightarrow a+b=۵$$

۱۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

طبق شکل داریم: $D_f=[۰,۴]$

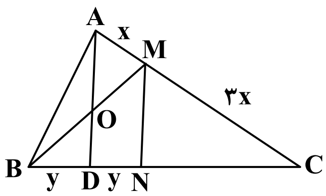
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x \mid x^۲\ge ۹, ۰\le \sqrt{x^۲-۹}\le ۴\}=\{x\mid x^۲\ge ۹, x^۲\le ۲۵\}=\{x\mid ۹\le x^۲\le ۲۵\}$$

تنها اعداد طبیعی عضو مجموعه‌ی بالا عبارتند از: $x=۳,۴,۵$

۱۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

نقطه‌ی O وسط BM است و $MN \parallel OD$، پس طبق قضیه‌ی تالس D وسط BN می‌باشد.

حال در مثلث ADC خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{ADC}: MN \parallel AD \Rightarrow \frac{MC}{AM}=\frac{NC}{DN} \Rightarrow \frac{۳x}{x}=\frac{NC}{y} \Rightarrow NC=۳y$$

از طرفی داریم:

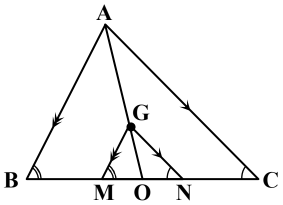
$$BC=۱۵ \Rightarrow y+y+۳y=۱۵ \Rightarrow y=۳$$

$$DC=y+۳y=۴y \xrightarrow{y=۳} DC=۱۲$$

دقت کنید O وسط AD قرار ندارد!

۱۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

براساس قضیه‌ی دو خط موازی- مورب داریم:



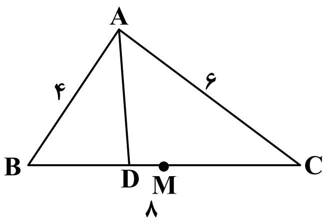
$$\begin{cases}G\hat{N}O=\hat{C}\\ G\hat{M}O=\hat{B}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{GMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

طبق تالس و تشابه: $\frac{GM}{AB}=\frac{OG}{OA}=\frac{۱}{۳}$

پس نسبت تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{GMN}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است و لذا نسبت مساحت آن‌ها $\frac{۱}{۹}$ می‌باشد.

دقت کنید که نسبت هر دو جزء طولی متناظر در دو مثلث متشابه، نسبت تشابه می‌باشد و نسبت مساحت‌ها، مربع نسبت تشابه است.

۱۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.



می‌دانیم نیمساز ضلع مقابل را به‌نسبت اضلاع مجاور تقسیم می کند، یعنی: $\frac{BD}{DC}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

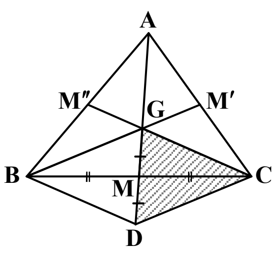
بهتر است در این مواقع قطعات ایجاد شده را متناسب با اضلاع در نظر بگیریم، مثلاً بنویسیم:

$$\begin{cases}BD=۴k\\ CD=۶k\end{cases}$$

از آن‌جایی که $BD+DC=۸$ است، لذا:

$$\left.\begin{array}{l}۴k+۶k=۸ \Rightarrow k=\frac{۸}{۱۰} \Rightarrow DC=۶k=\frac{۴۸}{۱۰}=۴/۸\ (\text{قطعه‌ی بزرگ‌تر})\\ CM=۴\end{array}\right\} \Rightarrow DM=۴/۸-۴=۰/۸$$

۱۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.



اگر GM را به‌اندازه‌ی خودش از طرف M ادامه دهیم، متوازی‌الاضلاع BGCD تشکیل می‌شود (چون اقطارش منصف‌اند). لذا:

$$CD=BG=\frac{۲}{۳}m_b$$

از طرفی $GC=\frac{۲}{۳}m_c$ و $GD=۲GM=\frac{۲}{۳}m_a$. حال در مثلث DGC قضیه‌ی حمار را می‌نویسیم:

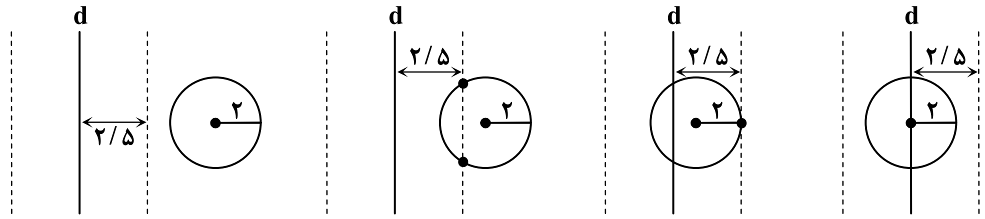
$$|GC-CD|<GD<GC+CD \Rightarrow \left|\frac{۲}{۳}m_c-\frac{۲}{۳}m_b\right|<\frac{۲}{۳}m_a<\frac{۲}{۳}m_c+\frac{۲}{۳}m_b \Rightarrow |m_c-m_b|<m_a<m_c+m_b$$

لذا چون میانه‌های هر مثلثی در قضیه‌ی وجود مثلث صدق می‌کنند، پس میانه‌های مثلث تشکیل مثلث جدیدی می‌دهند. جالب است بدانید در ادامه‌ی اثبات فوق می‌توان ثابت کرد مساحت مثلثی که میانه‌ها تشکیل می‌دهند، $\frac{۳}{۴}$ مثلث اولیه است. در این سؤال خواهیم داشت:

$$|m_b-m_c|<m_a<m_b+m_c \Rightarrow ۵-۴<m_a<۵+۴ \Rightarrow ۱<m_a<۹$$

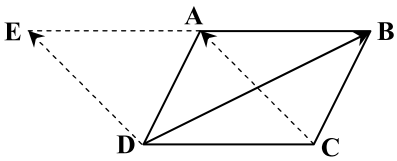
۱۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

نقاطی که از O به فاصله‌ی ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲ می‌باشند و نقاطی که از خط d به فاصله‌ی ۲/۵ هستند، دو خط موازی با d و به فاصله‌ی ۲/۵ از آن می‌باشند. نقاط برخورد این دایره با دو خط موازی جواب مسئله هستند که تعداد آن‌ها حداکثر ۲ نقطه می‌باشد. توجه داشته باشید که این دایره نمی‌تواند هر دو خط موازی را قطع کند، چون فاصله‌ی دو خط ۵ اما قطر دایره ۴ است.



هندسه تحلیلی و جبر خطی

۱۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

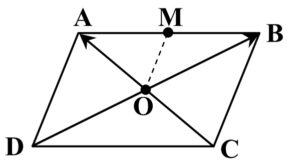


راه حل اول: برای جمع دو بردار باید ابتدای $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{CA}$ روی هم قرار گیرند. لذا از D پاره‌خطی موازی، هم‌جهت و هم طول با $\overrightarrow{CA}$ رسم می‌کنیم. بنابراین چهارضلعی ACDE متوازی‌الاضلاع است، پس: $AE = CD = AB$

یعنی در مثلث DEB، DA میانه است، لذا: $\dfrac{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}}{۲}=\overrightarrow{DA}$

بنابراین: $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}=۲\overrightarrow{DA}$

راه حل دوم:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CA}=۲\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{DB}=۲\overrightarrow{OB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=۲(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$$

اگر وسط AB را M بنامیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{۲}\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=۲\overrightarrow{OM}\Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=۲(۲\overrightarrow{OM})=۴\overrightarrow{OM}$$

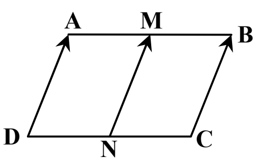
چون در مثلث ABC، O و M اوساط اضلاع را به‌هم متصل نموده‌اند، پس: $\overrightarrow{OM}\overset{\parallel}{=}\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}$

بنابراین: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=۴\overrightarrow{OM}=۴(\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB})=۲\overrightarrow{CB}=۲\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}+\underbrace{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}}_{\vec{O}}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\xrightarrow{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}}۲\overrightarrow{DA}$: راه حل سوم

راه حل چهارم: رابطه‌ی شال: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=(A-C)+(B-D)=(A-D)+(B-C)=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=۲\overrightarrow{DA}$

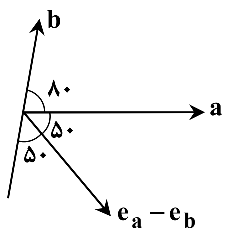
راه حل پنجم: راه حل قبلی با نگاهی دیگر:



$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}=(A-C)+(B-D)=(A+B)-(C+D)$$

$$=۲M-۲N=۲(M-N)=۲\overrightarrow{NM}=۲\overrightarrow{DA}$$

۱۲۲- گزینه ۴ پاسخ است.



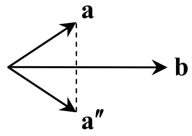
اگر a و b دو بردار باشند، آن‌گاه e_a+e_b در راستای نیمساز زاویه‌ی داخلی بین دو بردار a و b و e_a-e_b در راستای نیمساز زاویه‌ی خارجی دو بردار a و b است.

با توجه به شکل e_a-e_b نیمساز است، پس زاویه‌ی بین دو بردار b و e_a-e_b برابر $۵۰+۸۰=۱۳۰^\circ$ است.

باید توجه کرد که e_b-e_a نیمساز در جهت مقابل خواهد بود که با $\vec{b}$ زاویه‌ی ۵۰° خواهد ساخت.

نکته: $a|b|-b|a|=|a||b|(\frac{a}{|a|}-\frac{b}{|b|})=|a||b|(e_a-e_b)$

۱۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.



می‌دانیم اندازه‌ی قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار دلخواه b با اندازه‌ی بردار a برابر است.

بنابراین لزومی به محاسبه‌ی a'' نمی‌باشد، پس:

$$|a|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}\Rightarrow |a''|=|a|=\sqrt{۶}$$

نکته: برداری که با جهت مثبت محور xها زوایای مساوی می‌سازد، به صورت $(\alpha,\alpha,\alpha)\ (\alpha>۰)$ است.

۱۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا ضرب خارجی دو بردار a و b را با هر روشی که آشنا هستید، به‌دست آورید: (در این‌جا ما با روش دترمینان این کار را انجام داده‌ایم.)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۳ & ۶ \end{vmatrix}=(۰,۲,-۱)$$

بردار V که عمود بر a و b است باید با بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ موازی باشد. پس باید ضریبی از $\vec{a}\times\vec{b}$ باشد:

$$\begin{cases}\vec{V}=m(\vec{a}\times\vec{b})=(۰,۲m,-m)\\ |\vec{V}|=۵\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۴m^۲+m^۲}=\sqrt{۵}\,|m|=۵\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{۵}\Rightarrow\vec{V}=(۰,۲\sqrt{۵},-\sqrt{۵})\Rightarrow x+y+z=\sqrt{۵}\\ m=-\sqrt{۵}\Rightarrow\vec{V}=(۰,-۲\sqrt{۵},\sqrt{۵})\Rightarrow x+y+z=-\sqrt{۵}\end{cases}$$

یادآوری: بردار $\vec{a}\times\vec{b}$، برداری است عمود بر صفحه‌ی دو بردار a و b که جهت آن با قانون دست راست به‌دست می‌آید. ضمناً طول این بردار برابر است با: $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

از طرفی خود این بردار از دترمینان زیر قابل محاسبه است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}=(a_۲b_۳-a_۳b_۲)\vec{i}-(a_۱b_۳-a_۳b_۱)\vec{j}+(a_۱b_۲-a_۲b_۱)\vec{k}$$

۱۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

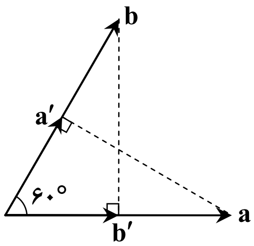
در حالت کلی داریم: $b\times(a\times c)=\underbrace{(c\cdot b)}_{m}a-\underbrace{(a\cdot b)}_{n}c=ma-nc$

این بردار به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای a و c است و لذا همواره در صفحه‌ی a و c قرار دارد.

تذکر: همواره جمع و تفریق دو بردار در صفحه‌ی آن دو بردار قرار دارد.

نکته: $a\times(b\times c)=(c\cdot a)b-(b\cdot a)c$

۱۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.



مطابق شکل a' روی b و b' روی a تشکیل می‌شود و لذا زاویه‌ی بین a' و b' نیز ۶۰° است:

$$a'\cdot b'=|a'||b'|\cos۶۰°=\underbrace{|a|\cos۶۰°|b|}_{a\cdot b}\cos۶۰°\cos۶۰°=(a\cdot b)\cos^۲۶۰°=۴\times\frac{۱}{۴}=۱$$

نکته: اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر θ باشد، اندازه‌ی تصویر a بر b برابر است با: $||a|\cos\theta|$

راه حل دیگر:

$$(a\cdot b)^۲=(a\cdot b)(a\cdot b)=\underbrace{|a'|\,|b|}\,\underbrace{|b'|\,|a|}=|a'||b'||a||b|=\frac{a'\cdot b'}{\cos۶۰°}\cdot\frac{a\cdot b}{\cos۶۰°}\Rightarrow(a\cdot b)^۲=\frac{(a'\cdot b')(a\cdot b)}{\cos^۲۶۰}$$

$$\Rightarrow a'\cdot b'=(a\cdot b)\cos^۲۶۰°=۴\times\frac{۱}{۴}=۱$$

در حالت کلی اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b، θ و a' تصویر a روی b و b' تصویر b روی a باشد، می‌توان ثابت کرد: $\vec{a'}\cdot\vec{b'}=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cos^۲\theta$

چون:

$$a'\cdot b'=|a'||b'|\cos\theta=(|a|\cos\theta|b|)\cos\theta\cos\theta=(a\cdot b)\cos^۲\theta$$

۱۲۷- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

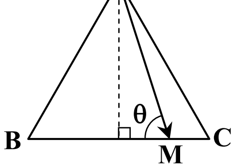
$$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+۲\vec{a}\cdot\vec{b}\\ |\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^۲-|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۴\vec{a}\cdot\vec{b}\\ |\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}-\vec{b}|^۲=۲(|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲)\end{cases}\Rightarrow ۶^۲-۴^۲=۴a\cdot b\Rightarrow ۲۰=۴a\cdot b\Rightarrow a\cdot b=۵$$

۱۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|a\times b|=\cancel{۲a\cdot(a\times b)}+۲a\cdot b-\cancel{۲b\cdot(a\times b)}-b\cdot a\Rightarrow|a\times b|=a\cdot b\Rightarrow|a||b|\sin\alpha=|a||b|\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

نکته: $\begin{cases}a\cdot(a\times b)=۰\\ b\cdot(a\times b)=۰\end{cases}$

۱۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.



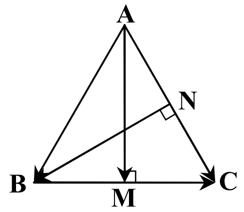
می‌دانیم مساحت مثلث ABC از هر یک از روابط زیر قابل حصول است:

$$S=\frac{۱}{۲}|(AB\times AC)|=\frac{۱}{۲}|(BC\times BA)|=\frac{۱}{۲}|(CA\times CB)|$$

جالب است بدانید برای به‌دست آوردن مساحت مثلث اگر M نقطه‌ای دلخواه بر امتداد BC باشد، خواهیم داشت:

$$S=\frac{۱}{۲}|AM\times BC|$$

چون همواره $S=\frac{1}{2}\times BC\times AM\times \sin\theta$ می‌باشد، فقط باید دقت کرد اگر $AB\times AC$ مورد محاسبه قرار گیرد، باید جهت آن نیز بررسی گردد. مثلاً $AB\times AC$ بیرون‌سو و $AC\times AB$ درون‌سو است اما طول هر دو، دو برابر مساحت مثلث است. لذا خواهیم داشت:



$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=2S & \text{جهت } \odot \\ \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{NB}\right|=2S & \text{جهت } \otimes \\ \left|\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{BC}\right|=2S & \text{جهت } \odot \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{BC}=2S \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{BC}\right|=2S$$

۱۳۰- گزینه ۳ پاسخ است.

طرفین فرض را از سمت چپ در a ضرب خارجی می‌کنیم.

$$3a+2b+c=\overrightarrow{O} \Rightarrow 3\underbrace{a\times a}_{\text{بردار صفر}}+2a\times b+a\times c=a\times\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O} \Rightarrow 2a\times b=c\times a \Rightarrow a\times b=\frac{c\times a}{2}$$

نکته‌ی ۱: نباید بردار صفر یعنی $\overrightarrow{O}=(0,0,0)$ را با عدد صفر اشتباه گرفت، مثلاً دقت کنید:

$\vec{i}\times\vec{i}=\overrightarrow{O}=$ بردار صفر $\vec{i}\cdot\vec{j}=0=$ عدد صفر

لذا اگر در سؤالی بپرسند: $\vec{i}\times\vec{i}+\vec{i}\cdot\vec{j}$ ، باید جواب دهیم عدد با بردار قابل جمع نیست.

نکته‌ی ۲: اگر $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{O}$ باشد، آن‌گاه خواهیم داشت: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

که علت این امر را هم می‌توان با بردار مساحت مثلث توجیه کرد و هم می‌توان مشابه حل سؤال عبارت را در بردار a ضرب خارجی کرد.

$$\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{\overrightarrow{O}}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

مثلاً می‌توانستیم سؤال را این‌گونه حل کنیم:

$$\underbrace{3\vec{a}}_{x}+\underbrace{2\vec{b}}_{y}+\underbrace{\vec{c}}_{z}=\overrightarrow{O} \Rightarrow x\times y=y\times z=z\times x$$

$$\Rightarrow (3\vec{a})\times(2\vec{b})=(2\vec{b})\times(\vec{c})=(\vec{c})\times(3\vec{a}) \Rightarrow 6\vec{a}\times\vec{b}=2\vec{b}\times\vec{c}=3\vec{c}\times\vec{a} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{b}\times\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{c}\times\vec{a}$$

۱۳۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(3a+2b)\cdot(a-b)=1 \Rightarrow 3|a|^2-3a\cdot b+2a\cdot b-2|b|^2=1 \xrightarrow{|a|=|b|=1} -a\cdot b=0 \Rightarrow a\perp b$$

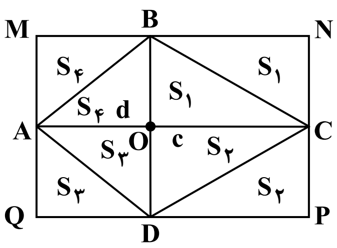
$$S_{\square}=\frac{1}{2}\left|(5a-2b)\times(a+b)\right|=\frac{1}{2}\left|5\underbrace{a\times a}_{\overrightarrow{O}}+5a\times b-2b\times a-2\underbrace{b\times b}_{\overrightarrow{O}}\right|=\frac{1}{2}|7a\times b|=\frac{7}{2}|a||b|\sin 90^\circ=\frac{7}{2}$$

نکته‌ی ۱: اگر بر روی دو بردار a و b متوازی‌الاضلاعی را بنا کنیم، مساحت آن عبارت است از: $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$

نکته‌ی ۲: اگر دو بردار c و d اقطار متوازی‌الاضلاعی باشند، آن‌گاه خواهیم داشت: $S=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$

جالب است بدانید نکته‌ی فوق در مورد هر چهارضلعی محدبی برقرار است.

نکته‌ی ۳: با بسط عبارت در حالت کلی داریم: $(m\vec{a}+n\vec{b})\times(p\vec{a}+q\vec{b})=(mq-np)(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}(a\times b)$



چون اگر از رئوس چهارضلعی خطوطی موازی قطرها رسم کنیم، متوازی‌الاضلاع جدیدی بـه اضـلاع $\vec{c}$ و $\vec{d}$ به‌وجود می‌آید.

چون قطر متوازی‌الاضلاع مساحت آن را نصف می‌کند، پس در چهار متوازی‌الاضلاع کوچک ایجاد شده (مـثلاً BNCO) مساحت دو مثلث حاصل با هم برابر است بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع جدید ایجـاد شـده، دو برابر چهارضلعی محدب قبلی است، لذا: $S_{\text{چهارضلعی}}=\frac{1}{2}S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$

البته این قاعده در مورد متوازی‌الاضلاع اثبات برداری نیز دارد:

چون اقطار متوازی‌الاضلاع $c=(a+b)$ و $d=(a-b)$ است، لذا خواهیم داشت:

$$(a+b)\times(a-b)=b\times a-a\times b=2b\times a \Rightarrow |(a+b)\times(a-b)|=2|b\times a|=2S \Rightarrow S=\frac{1}{2}|(a+b)\times(a-b)|=\frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{d}\right|$$

۱۳۲- گزینه ۱ پاسخ است.

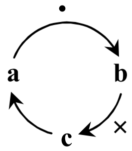
حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر سه بردار x، y و z عبارت است از: $|x\cdot(y\times z)|$

$$V' = (2a+b)\cdot[(b-c)\times(a+c)] = (2a+b)\cdot(b\times a + b\times c - c\times a)$$
$$= \underline{2a\cdot(b\times a)} + 2a\cdot(b\times c) - \underline{2a\cdot(c\times a)} + \underline{b\cdot(b\times a)} + \underline{b\cdot(b\times c)} - b\cdot(c\times a)$$

جملات مشخص شده در عبارت بالا برابر صفرند، چون بردار ضرب خارجی دو بردار، بر هر دو بردار عمود است.

$$V' = 2a\cdot(b\times c) - b\cdot(c\times a) = 2a\cdot(b\times c) - a\cdot(b\times c) = a\cdot(b\times c) = V$$

نکته‌ی ۱: همواره: $a\cdot(a\times b) = 0$



نکته‌ی ۲: در مورد ضرب مختلط سه بردار داریم: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$

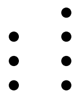
که این امکان جابه‌جایی را می‌توان با دایره روبه‌رو به یاد سپرد:

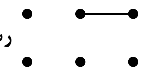
حال · را هر کجا قرار دهیم، باید در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده و × را در جای بعدی قرار دهیم.

ریاضیات گسسته

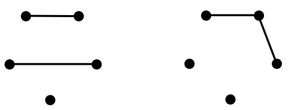
۱۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

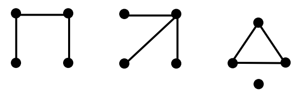
اگر $p = 7$ و $q = 0$ باشد، گراف به‌صورت صفر منتظم رسم می‌شود (۱ حالت).



اگر $p = 6$ و $q = 1$ باشد، گراف تنها به‌صورت  رسم می‌شود (۱ حالت).

اگر $p = 5$ و $q = 2$ باشد، ممکن است گراف رأس درجه‌ی ۲ داشته باشد یا نداشته باشد (۲ حالت).



اگر $p = 4$ و $q = 3$ باشد، گراف‌های  قابل رسم می‌باشد (۳ حالت).

از $p = 3$ و $q = 4$ به بعد گراف قابل رسم نیست، پس به ۷ صورت رسم می‌شود. دقت کنید که اگر کلمه‌ی «نوع» در سؤالی به‌کار رفته بود، منظور ریخت‌ِگراف‌ها یعنی نام‌گذاری نشدن رئوس است که باید با آزمون و خطا این گراف‌ها را به دست آورد.

۱۳۴-گزینه ۱ پاسخ است.

برای این‌که تعداد بخش‌های گراف ماکزیمم شود سعی می‌کنیم یال‌های گراف را با کم‌ترین رأس‌های ممکن تولید کنیم. برای این منظور حداقل ۷ رأس نیاز است که ۱۷ یال را رسم کنیم $\left(\binom{p}{2} \geq 17 \Rightarrow p \geq 7\right)$. در واقع تمایل داریم از اولین گراف کاملی که توان تولید ۱۷ یال را دارد استفاده کرده و یال‌های اضافی را پاک کنیم. در این‌صورت تمام این ۱۷ یال در یک بخش قرار می‌گیرند. پس $20 - 7 = 13$ رأس دیگر ایزوله‌اند. با توجه به این‌که ۱۳ رأس ایزوله و یک بخش ۱۷ یالی داریم، گراف ۱۴ بخش متمایز دارد.

۱۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow 20 \leq q \Rightarrow \min(q) = 20$$

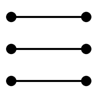
این گراف واقعی و قابل رسم است. کافی است گراف ۴- منتظم مرتبه‌ی ۱۰ را رسم کنیم. برای به‌دست آوردن حداکثر یال‌ها، گراف کامل k_{10} را در نظر گرفته و از یکی از رأس‌های آن ۵ یال‌کم می‌کنیم تا آن رأس درجه‌ی ۴ شود $\delta = 4$. لذا: $q_{max} = \binom{10}{2} - 5 = 40$

$$9,9,9,9,9,9,9,9,9,9 \rightarrow 4,8,8,8,8,8,9,9,9,9$$

نکته: در هر گراف ساده داریم:
$$\begin{cases} \delta < \frac{2q}{p} < \Delta & \Delta \neq \delta \\ \delta = \frac{2q}{p} = \Delta & \Delta = \delta \end{cases}$$

باید توجه داشت که اگر در مورد یکی از Δ یا δ چیزی ندانیم می‌توانیم نامساوی فوق را به‌صورت یک‌جا بنویسیم: $\delta \leq \frac{2q}{q} \leq \Delta$

۱۳۶- گزینه ۱ پاسخ است.



هنگامی‌که تعداد یال‌ها زیاد باشند و مکمل گراف، گراف ساده‌تری باشد، مناسب‌تر است از رسم گراف مکمل استفاده کنیم. مکمل گراف ۴- منتظم مرتبه‌ی ۶، گراف ۱- منتظم مرتبه‌ی ۶ است که فقط به‌شکل مقابل قابل رسم است:

نکته: مکمل گراف r- منتظم مرتبه p، $(p-r-1)$ - منتظم است.

اصولاً گراف‌های ۰- منتظم، ۱- منتظم، $(p-2)$ - منتظم و $(p-1)$ - منتظم از مرتبه‌ی p در صورت وجود منحصربه‌فردند (در صورتی‌که p و r همزمان فرد نباشند).

۱۳۷- گزینه ۴ پاسخ است.

مسیر به‌طول ۴، دنباله‌ای شامل ۵ رأس متمایز از رئوس گراف است. حال چون می‌خواهیم رئوس a و b در مسیر باشند، باید ابتدا از بین ۴ رأس باقی‌مانده ۳ رأس را انتخاب کنیم سپس این ۵ رأس را با درنظر گرفتن ترتیب در کنار هم می‌چینیم. دقت کنید که چون مسیر جهت ندارد، جایگشت‌های هر مسیر را نباید ۲ بار نوشت.

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳ رأس دیگر}}\times\frac{۵!}{۲}=۲۴۰$$

$۲ \rightarrow$ abcde با edcba یکی است و نباید دو بار شمرده شود.

یادآوری: برای کنارهم قرار دادن n شیء متمایز، دو روش وجود دارد:

۱)صف: یعنی ابتدا و انتهای جایگشت اهمیت دارد و مشخص است که در این صورت جایگشت اشیاء $n!$ می‌باشد.

۲) دایره‌ای: ابتدا و انتهای جایگشت معلوم نیست. در این صورت جایگشت اشیا $(n-1)!$ است. (ابتدا یکی از اشیا را به‌صورت دلخواه در یکی از جایگاه‌ها قرار داده و سپس بقیه‌ی اشیا را نسبت به آن شیء می‌چینیم).

هم‌چنین جایگشت‌ها را می‌توان به دو نوع زیر دسته‌بندی کرد:

۱) قابل وارونه‌سازی: در این حالت جهت حرکت روی جایگشت اهمیت ندارد و abcd با dcba یکسان است. لذا باید کل حالات را بر ۲ تقسیم کنیم.

۲) غیرقابل وارونه‌سازی: در این حالت جهت حرکت مهم است و کل حالات متمایزند مانند ساختن کلمه یا عدد.

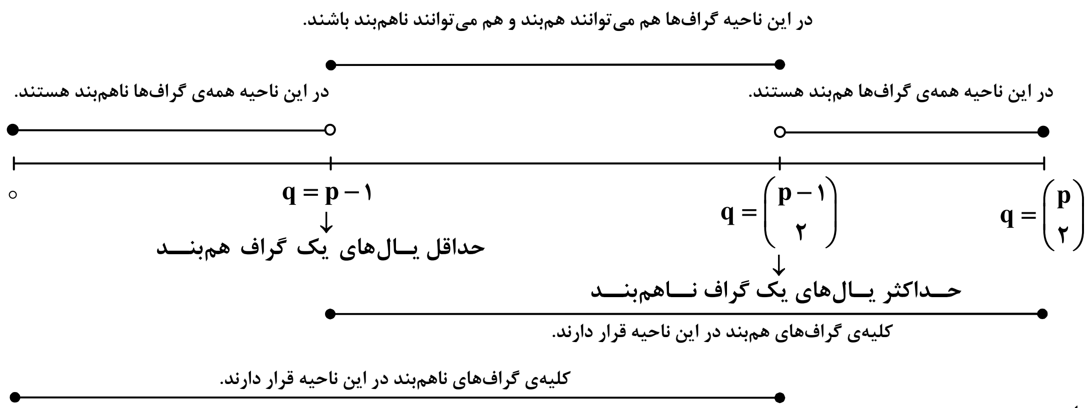
با توجه به تقسیم بندی فوق، مسیر، صف قابل وارونه‌سازی است.

۱۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

حداکثر یال‌های یک گراف ناهم‌بند مرتبه‌ی p هنگامی است که از یک رأس ایزوله و k_{p-1} تشکیل شده باشد.

$$q=\binom{p-1}{۲}=\binom{۹}{۲}=۳۶$$

در مورد گرافی از مرتبه‌ی p می‌توان بسته به اندازه‌ی گراف حالات زیر را در نظر گرفت.



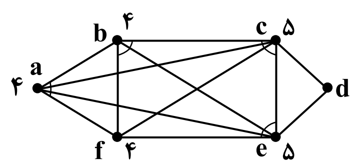
۱۳۹- گزینه ۳ پاسخ است.

تعریف ارائه شده در صورت سؤال، تعریف گراف اویلری است. شرط لازم و کافی برای اویلری بودن گراف هم‌بند G آن است که درجات همه‌ی رئوس آن زوج باشد. لذا چون مرتبه‌ی گراف ۶ است، حداقل ۲ و حداکثر ۴ یال (پل) باید به هر رأس متصل کنیم:

$$۲q_{max}=۶\times۴\Rightarrow q_{max}=۱۲$$
$$۲q_{min}=۶\times۲\Rightarrow q_{min}=۶$$

۱۴۰- گزینه ۲ پاسخ است.

در مسائلی که دنباله‌ی درجه‌ی گراف را داده و تعداد دورهای آن را می‌خواهد، ابتدا باید شکل گراف را رسم کنیم. این گراف گراف $k_۶$ است که از یکی از رأس‌های آن سه یال پاک کرده‌ایم. قسمتی از شکل گراف کامل $k_۵$ است. دورهای به‌طول ۳ در آن عبارتند از:



$$\binom{۵}{۳}\times\frac{۲!}{۲}=۱۰$$

و یک دور به‌طول ۳ هم c,d,e,c است. لذا در کل ۱۱ دور داریم.

نکته‌ی ۱: در چنین سؤالاتی سعی می‌کنیم گراف را به‌صورت مسطح رسم کنیم (یعنی حتی‌الامکان باید یال‌ها از روی هم رد نشوند).

نکته‌ی ۲: تعداد دورها به‌طول m $(m\geq۳)$ در گراف کامل k_p $(p\geq۳)$ برابر است با:

$$\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{۲}$$

دقت کنید که جایگشت رئوس در دور، دایره‌ای قابل وارونه‌سازی است یعنی اولاً نقطه‌ی شروع اهمیت ندارد ثانیاً قابل وارونه‌سازی است. مثلاً دورهای زیر مشابه‌اند:

$abcda\equiv bcdab\equiv cdabc\equiv dabcd$ (نقطه‌ی شروع مهم نیست.)

$abcda\equiv adcba$ (جهت چرخش مهم نیست.)

پس دوری به طول m را با $۲m$ دنباله‌ی مختلف می‌توان نشان داد.

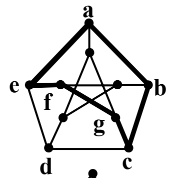
نکته‌ی ۳: تعداد کل دورها در k_p برابر است با: $\sum_{m=3}^{p}\binom{p}{m}\times\frac{(m-1)!}{2}$

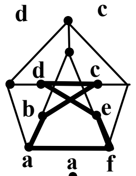
مثلاً داریم:

در k_4: $\binom{4}{3}\times\frac{2!}{2}+\binom{4}{4}\times\frac{3!}{2}=7$ ، در k_3: $\binom{3}{3}\times\frac{2!}{2}=1$

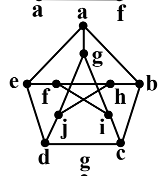
در k_6: $\binom{6}{3}\times\frac{2!}{2}+\binom{6}{4}\times\frac{3!}{2}+\binom{6}{5}\times\frac{4!}{2}+\binom{6}{6}\times\frac{5!}{2}=197$ ، در k_5: $\binom{5}{3}\times\frac{2!}{2}+\binom{5}{4}\times\frac{3!}{2}+\binom{5}{5}\times\frac{4!}{2}=37$

۱۴۱- گزینه ۲ پاسخ است.

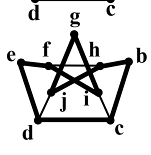




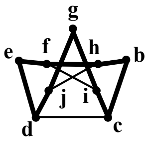
دو نوع دور به‌طول ۶ قابل رسم است. دورهایی که یکی از رأس‌های بیرونی را نپوشاند مانند دور abcgfea که به‌ازای هر رأس بیرونی یک دور به این صورت داریم. لذا جمعاً ۵ دور به این صورت داریم.
دورهایی که یکی از رأس‌های درونی را نپوشاند مانند دور abcdefa که به‌ازای هر رأس درونی یک دور به این صورت داریم. لذا جمعاً ۵ دور نیز به این صورت داریم. پس جمعاً ۱۰ دور به طول ۶ داریم. البته اگر کمی زیرک باشید متوجه می‌شوید الگوی بالایی و پایینی در واقع یکی است و اینکه سه یال متوالی از بیرون و یک یال از درون انتخاب شود یا بالعکس سرانجام تفاوتی ندارد. می‌توان گفت از الگوی بالایی ۱۰ دور داریم.
نکته: گراف پترسن دارای ۱۲ دور به‌طول ۵، ۱۰ دور به‌طول ۶، ۱۵ دور به‌طول ۸ و ۲۰ دور به‌طول ۹ است و دورهای به طول ۳، ۴، ۷ و ۱۰ را ندارد.



مثلاً دورهای به‌طول ۹ در گراف پترسن به‌صورت زیر قابل محاسبه است:
گراف پترسن ۳- منتظم مرتبه‌ی ۱۰ است. دوری به‌طول ۹، شامل ۹ رأس متمایز است. لذا دور موردنظر باید از یکی از رئوس نگذرد. این کار به یکی از دو صورت زیر امکان‌پذیر است:
۱) رأس موردنظر از بیرون از گراف انتخاب شود.
حال دورهای به‌طول ۹ این گراف را می‌شماریم که کاری آسان‌تر است. ابتدا رأس a و یال‌هایش را حذف می‌کنیم. در این حالت ۲ دور مقابل قابل تولید است (برای رسم دورهای همیلتنی این گراف، رأس‌های درجه‌ی ۲، هر دو یالشان را پررنگ می‌کنیم چون حتماً باید در دور حضور داشته باشند).
حال این رأس خارجی هر کدام از ۵ رأس می‌تواند باشد. پس جمعاً ۱۰ دور به این صورت موجود است.

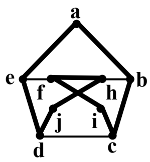


bcdefigjhb

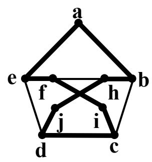


bcigjdefhb

۲) رأس مورنظر از درون گراف انتخاب شود.
باز هم ۲ دور قابل تولید است.
حال این رأس داخلی هر کدام از رئوس می‌تواند باشد. ابتدا رأس g و یال‌هایش را حذف می‌کنیم.
پس ۱۰ دور نیز به این صورت قابل رسم است. لذا جمعاً ۲۰ دور به طول ۹ داریم.
در واقع در اینجا هم می‌توان گفت که هر دو الگوی سمت راست و هر دو الگوی سمت چپ، نیز سرانجام یکی هستند و از الگوی یکسانی پیروی می‌کنند و از هر کدام نیز ۱۰ تا دور داریم.



abcifhjdea



abhjdcifea

۱۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.
اگر بین هر دو رأس گرافی دقیقاً ۱ مسیر وجود داشته باشد، اولاً هم‌بند است و ثانیاً فاقد دور است. پس درخت است.

می‌دانیم در درخت $\begin{cases}\sum \deg v_i = 2q\\ q=p-1\end{cases}$، پس: $10+9+7+7+3+(p-5)=2(p-1)$

بنابراین $p=33$ است. در نتیجه $q=32$ و تعداد رئوس درجه‌ی ۱، $p-5=28$ رأس است.

راه حل دیگر: تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ در درخت عبارت است از: $2+\sum(d_i-2) \qquad (d_i\ge 2)$

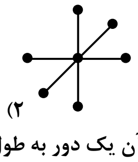
پس تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ عبارت است از: $2+(3-2)+2(7-2)+(9-2)+(10-2)=2+1+10+7+8=28$

۱۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.
وقتی بین دو رأس تنها یک مسیر وجود دارد، یعنی در مسیر بین این دو رأس دور وجود ندارد اما مسیر به‌طول $(p-1)$ یعنی مسیری شامل همه‌ی رئوس و وقتی مسیری شامل همه‌ی رئوس داریم، گراف هم‌بند است. قطعاً عبارت «تنها یک مسیر بین دو رأس a و b» نیز به‌معنی عدم وجود دور است، چون اگر دوری در گراف موجود باشد، بین a و b حداقل دو مسیر خواهیم داشت، پس این گراف هم‌بند فاقد دور یعنی درخت است. کل مسیرها بین رئوس در درخت عبارت است از:

$$\underbrace{\binom{p}{2}}_{\text{مسیرهایی به‌طول حداقل ۱ (چون بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد.)}}+\underbrace{p}_{\text{مسیرهایی به‌طول صفر (هر رأس یک مسیر به‌طول صفر محسوب می‌شود.)}} \Rightarrow \text{کل مسیرها}=\binom{7}{2}+7=21+7=28$$

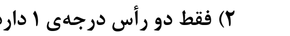
تذکر: دو درخت زیر ویژگی خاصی دارند:

الف)



۱) $\Delta=p-1$ ۲) تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱، $p-1$ است. ۳) طول طولانی‌ترین مسیر آن ۲ است.
۴) با افزودن هر یال به آن یک دور به طول ۳ ایجاد می‌شود. ۵) گراف بازه‌هاست.

ب)



۱) $\Delta=2$ ۲) فقط دو رأس درجه‌ی ۱ دارد. ۳) مسیری به‌طول $p-1$ دارد. ۴) نیمه اویلری است. ۵) گراف بازه‌هاست.

۱۴۴- گزینه ۲ پاسخ است.

گراف هم‌بند با حداقل یال‌های ممکن درخت است.

در درخت $q = p - 1$ است. بنابراین:

$$(p+1)(q-3) = 14 \Rightarrow (p+1)(p-1-3) = 14 \Rightarrow p^2 - 3p - 18 = 0 \Rightarrow (p-6)(p+3) = 0 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow q = 5$$

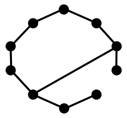
برای این‌که گراف G کامل (k_6) شود، باید $\binom{6}{2} - 5 = 10$ یال به آن اضافه کنیم.

نکته: تعابیر زیر همگی به‌معنای درخت بودن گراف است:

۱) گراف هم‌بند فاقد دور ۲) گراف هم‌بند مرتبه‌ی p با حداقل یال ۳) گراف هم‌بند با اندازه‌ی q و حداکثر رأس

۴) گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود دارد. ۵) گراف فاقد دور با $p-1$ یال

۱۴۵- گزینه ۱ پاسخ است.

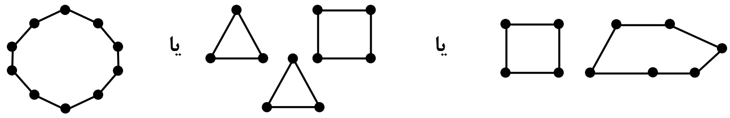


چون گراف هم‌بند است، پس حداقل ۹ یال نیاز دارد. افزودن یال دهم دقیقاً ۱ دور پدید می‌آورد. چون درخت آخرین گرافی است (از لحاظ یال) که فاقد دور است، لذا با افزودن ۱ یال (هر کجا که باشد) دقیقاً یک دور پدید می‌آورد.

در حالت کلی اگر در گراف هم‌بندی $p = q$ باشد، گراف دقیقاً ۱ دور خواهد داشت ولی اگر در گرافی $p = q$ باشد، در مورد تعداد دورها اظهارنظر نمی‌توان کرد مثلاً:

$p = 10$

$q = 10$



نکته: اگر در گرافی $q = p - 1$ $(p = q + 1)$ باشد، آن‌گاه:
- اگر گراف هم‌بند باشد، فاقد دور است و بالعکس (درخت)
- اگر گراف ناهم‌بند باشد، حتماً شامل دور است و بالعکس.

فیزیک

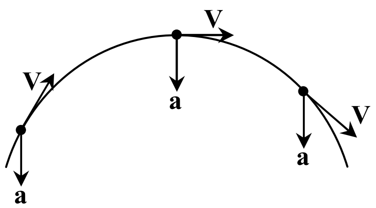
۱۴۶- گزینه ۳ پاسخ است.

حرکت تندشونده حرکتی است که با گذشت زمان اندازه‌ی سرعت متحرک زیاد می‌شود یعنی نمودار $V - t$ از محور افقی دور می‌شود. پس در t_1 و t_4 حرکت تندشونده است.

شیب نمودار $V - t$ برابر شتاب لحظه‌ای است یعنی از صفر تا t_2 شتاب مثبت و از t_2 به بعد شتاب منفی است و در t_2 شتاب صفر شده، تغییر جهت می‌دهد.

جهت حرکت متناظر علامت سرعت است، پس در t_3 جهت حرکت عوض می‌شود.

۱۴۷- گزینه ۲ پاسخ است.



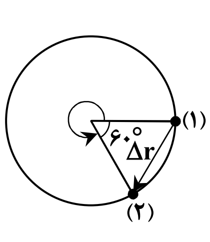
در حرکت پرتابی با چشم‌پوشی از مقاومت هوا بردار شتاب ثابت است (g در راستای قائم و رو به پایین)، مؤلفه‌ی افقی سرعت نیز ثابت است و مؤلفه‌ی قائم سرعت با شتاب g تغییر می‌کند. در نقطه‌ی اوج $V_y = 0$ و $V = V_x$ یعنی اندازه‌ی سرعت به حداقل می‌رسد. زاویه‌ی بین سرعت و شتاب پیوسته در حال کاهش است.

۱۴۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t = \frac{1}{2} \times 2 \times 20^2 + 20 V_A \Rightarrow 500 = 400 + 20 V_A \Rightarrow V_A = 5\ \frac{m}{s}$$

$$V = at + V_0 \Rightarrow V_B = 20 \times 2 + 5 = 45\ \frac{m}{s}$$

۱۴۹- گزینه ۴ پاسخ است.



ابتدا جابه‌جایی جسم را به‌دست می‌آوریم. بردار جابه‌جایی جسم مطابق شکل است که چون زاویه‌ی بین دو شعاع در حالت (۱) و (۲) برابر ۶۰ درجه است، پس مثلث به‌دست آمده متساوی‌الاضلاع است و بردار جابه‌جایی برابر با شعاع دایره است. زمان را نیز از راه تقسیم مسافت طی شده به اندازه‌ی سرعت به‌دست می‌آوریم.

$$\Delta t = \frac{\frac{5}{6} \times 2\pi r}{6} = \frac{5}{18}\pi r \Rightarrow \bar{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r}{\frac{5}{18}\pi r} = \frac{18}{5\pi}\ \frac{m}{s}$$

۱۵۰- گزینه ۱ پاسخ است.

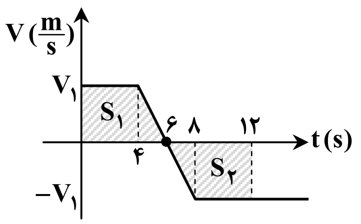
سرعت گلوله پس از ۳ ثانیه برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} V = -gt + V_0 = -30 + V_0 \\ V = \frac{2}{3}V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow V_0 - 30 = \frac{2}{3}V_0 \Rightarrow V_0 - \frac{2}{3}V_0 = 30 \Rightarrow \frac{1}{3}V_0 = 30 \Rightarrow V_0 = 90\ \frac{m}{s}$$

توجه: اگر در سؤال گفته شده بود «اندازه‌ی سرعت گلوله $\frac{2}{3}$ برابر مقدار اولیه می‌گردد»، یک جواب دیگر هم داشتیم و آن مربوط به حالتی است که گلوله از نقطه‌ی اوج گذشته باشد که داریم:

$$V_0 - 30 = -\frac{2}{3}V_0 \Rightarrow \frac{5}{3}V_0 = 30 \Rightarrow V_0 = 18\ \frac{m}{s}$$

۱۵۱- گزینه ۲ پاسخ است.



$$d = S_۱ + S_۲ = ۲S_۱ = ۱۰۰ \Rightarrow S_۱ = ۵۰$$

$$\frac{۴+۶}{۲} \times V_۱ = ۵۰ \Rightarrow V_۱ = ۱۰\,\frac{m}{s}$$

در مدت $t = ۴$ تا ۸ با شتاب ثابت حرکت می‌کند و سرعت آن از $۱۰\,\frac{m}{s}$ تا $-۱۰\,\frac{m}{s}$ تغییر می‌کند.

$$a = \frac{-۱۰-۱۰}{۸-۴} = \frac{-۲۰}{۴}\,\frac{m}{s^۲} = -۵\,\frac{m}{s^۲}$$

۱۵۲- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر زمان رسیدن اتومبیل‌ها به هم را $t_۱$ بنامیم:

$$\left.\begin{aligned} AM &= V \cdot t_۱ \\ BM &= ۲V \cdot t_۱ \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM = \frac{۱}{۲}BM$$

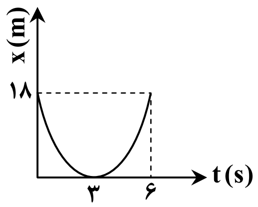
اگر زمان حرکت اتومبیل (۲) از M تا A را $t_۲$ بنامیم:

$$MA = ۲V \cdot t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{MA}{۲V}$$

اگر زمان حرکت اتومبیل (۱) از M تا B را $t_۳$ بنامیم:

$$MB = V \cdot t_۳ \Rightarrow t_۳ = \frac{MB}{V} = \frac{۲AM}{V} = ۴t_۲$$

۱۵۳- گزینه ۲ پاسخ است.



با توجه به تقارن نمودار، متحرک در لحظه‌ی $۶s$ دوباره به مکان $۱۸m$ می‌رسد. می‌توان بین لحظه‌ی ۳ و ۶ معادله‌ی جابه‌جایی نوشت:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_۰ t \\ &V_۳ = ۰ \text{ در لحظه‌ی } t = ۳ \text{ سرعت صفر است} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۱۸ = \frac{۱}{۲}a \times ۳^۲ \Rightarrow a = ۴\,\frac{m}{s^۲}$$

در لحظه‌ی $t = ۳s$ سرعت متحرک صفر است.

$$V = at + V_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۳ + V_۰ \Rightarrow V_۰ = -۳a = -۱۲\,\frac{m}{s}$$

مکان اولیه هم $x_۰ = ۱۸m$ است:

$$x = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times t^۲ - ۱۲ \times t + ۱۸ = ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۸$$

۱۵۴- گزینه ۳ پاسخ است.

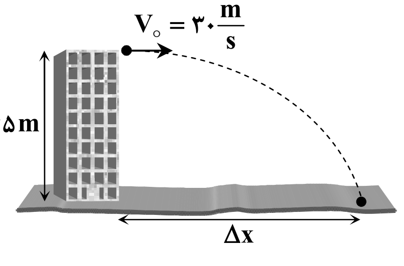
سرعت و شتاب در نقطه‌ی اوج بر هم عمود می‌شوند، پس ۳ ثانیه زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج است.

$$T_{\text{اوج}} = \frac{V_{۰y}}{g} \Rightarrow ۳ = \frac{V_{۰y}}{۱۰} \Rightarrow V_{۰y} = ۳۰\,\frac{m}{s}$$

$$R = ۲T_{\text{اوج}} \cdot V_{۰x} \Rightarrow ۱۸۰ = ۲ \times ۳ \times V_{۰x} \Rightarrow V_{۰x} = ۳۰\,\frac{m}{s}$$

$$V_۰ = \sqrt{V_{۰x}^۲ + V_{۰y}^۲} = ۳۰\sqrt{۲}\,\frac{m}{s}$$

۱۵۵- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\Delta y = -۴۵ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times t^۲ = -۴۵ \Rightarrow t = ۳s$$

$$\Delta x = V_x \cdot \Delta t = ۳۰ \times ۳ = ۹۰m$$

$$\bar{\vec{V}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \Rightarrow \left|\bar{\vec{V}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{۴۵^۲ + ۹۰^۲}}{۳} = \sqrt{۱۵^۲ + ۳۰^۲} = ۱۵\sqrt{۵}\,\frac{m}{s}$$

۱۵۶- گزینه ۴ پاسخ است.

۱۵۷- گزینه ۳ پاسخ است.

جسمی که از حال سکون شروع به حرکت می‌کند در ابتدا هم‌جهت با $\sum \vec{F}$ حرکت می‌کند. در ادامه هم اگر جهت $\sum \vec{F}$ ثابت بماند، هم‌جهت با آن ادامه می‌دهد اما اگر جهت $\sum \vec{F}$ تغییر کند، دیگر جهت حرکت و جهت $\sum \vec{F}$ یکی نخواهد بود.

۱۵۸- گزینه ۴ پاسخ است.

اصطکاک بین دو جسم به‌ترتیب برابر است با:

$$۰/۱ \times ۲۰ = ۲N \qquad ۰/۱ \times ۳۰ = ۳N$$

برای محاسبه‌ی شتاب کل دستگاه:

$$F - f_{k_۱} - f_{k_۲} = (m_۱ + m_۲)a \Rightarrow ۱۰ - ۳ - ۲ = (۳+۲)a \Rightarrow ۵ = ۵a \Rightarrow a = ۱\,\frac{m}{s^۲}$$

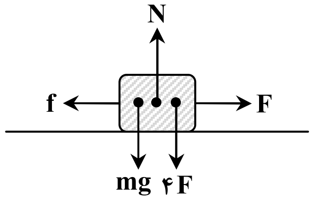
حال برای جسم ۳ کیلوگرمی داریم:

$$f_{k_۱} = ۳N \longleftarrow \boxed{۳kg} \longrightarrow F_{\text{فنر}}$$

$$F_{\text{فنر}} - f_{k_۱} = ma \Rightarrow F_{\text{فنر}} - ۳ = ۳ \times ۱$$

$$\Rightarrow F_{\text{فنر}} = ۶N = k\Delta\ell = ۱۰۰\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = \frac{۶}{۱۰۰}m = ۶cm$$

۱۵۹- گزینه ۱ پاسخ است.

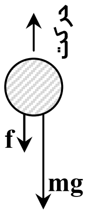


$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow N = mg + ۴F = ۵F$$
$$f_{s_{max}} = N \cdot \mu_s = ۵F \times ۰/۳ = ۱/۵F$$
$F < f_{s_{max}} \Rightarrow$ جسم حرکت نمی‌کند
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F - f_s = ۰ \Rightarrow f_s = F$$

۱۶۰- گزینه ۲ پاسخ است.

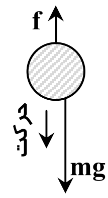
نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت گلوله بر آن وارد می‌شود.

در حالت بالا رفتن:



$$\sum F = ma \Rightarrow mg + f = ma \Rightarrow mg + \frac{۱}{۱۰}mg = ma \Rightarrow a = \frac{۱۱}{۱۰}g$$

در حالت پایین رفتن:



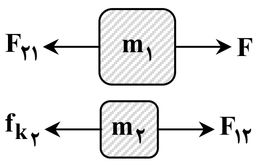
$$\sum F = ma \Rightarrow mg - f = ma \Rightarrow mg - \frac{۱}{۱۰}mg = ma \Rightarrow a = \frac{۹}{۱۰}g$$

۱۶۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$m_۱ g = (m_۱ + m_۲ + m_۳)a \Rightarrow ۵۰ = (۵ + ۵ + ۱۰)a \Rightarrow a = \frac{۵}{۲}\frac{m}{s^۲}$$

$\sum F = ma \Rightarrow$ اندازه‌ی برآیند نیروهای وارد بر $m_۲ = ۵ \times \frac{۵}{۲} = ۱۲/۵N$

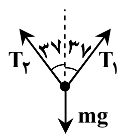
۱۶۲- گزینه ۲ پاسخ است.



طبق قانون دوم نیوتن: $F - F_{۲۱} = m_۱ a \Rightarrow ۳۰ - F_{۲۱} = ۱۰ \times ۱ \Rightarrow F_{۲۱} = ۲۰N$

طبق قانون سوم نیوتن: $F_{۱۲} = F_{۲۱} \Rightarrow F_{۱۲} = ۲۰N$

۱۶۳- گزینه ۱ پاسخ است.



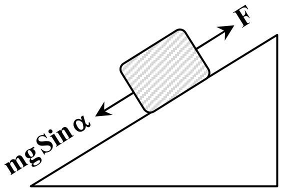
$$T_۱ = T_۲ = ۵۰ \Rightarrow ۲T_۱ \cos ۳۷° = ۱۰۰ \times ۰/۸ = ۸۰N$$
$$mg = ۱۰۰N$$

$mg > ۲T_۱ \cos\alpha \Rightarrow$ برآیند نیروها به‌طرف پایین است، پس جهت شتاب هم به‌طرف پایین است.

$$\sum F = ma \Rightarrow ۱۰۰ - ۸۰ = ۱۰a \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

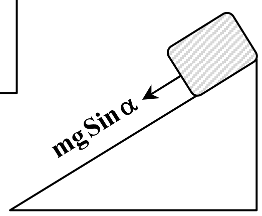
۱۶۴- گزینه ۲ پاسخ است.

حالت اول:



$$F - mg\sin\alpha = ۰ \Rightarrow mg\sin\alpha = F = ۳۰N$$

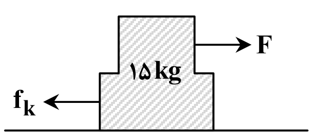
حالت دوم:



$$\sum F = ma \Rightarrow mg\sin\alpha = ma \Rightarrow ۳۰ = ۱۰a \Rightarrow a = ۳\frac{m}{s^۲}$$
$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_۰ t \Rightarrow ۶ = \frac{۳}{۲}t^۲ \Rightarrow t = ۲s$$

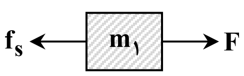
۱۶۵- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا فرض می‌کنیم که $m_۱$ روی $m_۲$ نلغزیده باشد و مجموعه‌ی دو وزنه با یک شتاب حرکت کنند.



$$F - f_k = ma$$
$$\Rightarrow F - mg\mu_k = ma \Rightarrow ۷۵ - ۱۵۰ \times ۰/۴ = ۱۵a \Rightarrow a = ۱\frac{m}{s^۲}$$

حالا به وزنه‌ی $m_۱$ به تنهایی توجه می‌کنیم: $F - f_s = m_۱ a \Rightarrow ۷۵ - f_s = ۱۰ \times ۱ \Rightarrow f_s = ۶۵N$



باید اطمینان پیدا کنیم که f_s از $f_{s_{max}}$ بیش‌تر نیست.

$$f_{s_{max}} = N_۱ \mu_s = m_۱ g \mu_s = ۱۰۰ \times ۰/۷ = ۷۰N$$

$f_{s_{max}} > f_s$، در نتیجه فرض نلغزیدن $m_۱$ درست بوده و همان $f_s = ۶۵N$ درست است.

پاسخ پرسش‌های درس‌های سال چهارم

۱۶۶- گزینه ۴ پاسخ است.

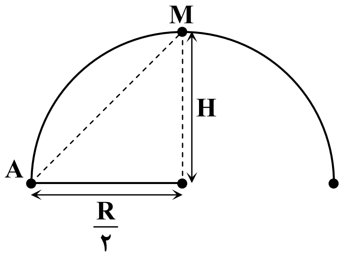
می‌توانیم معادله‌ی حرکت هر یک را بنویسیم:

$$\begin{matrix} x_۱ = ۱۰t \\ x_۲ = ۳۰t + ۵۰ \end{matrix} \Rightarrow x_۲ - x_۱ = ۲۵۰ \Rightarrow ۳۰t + ۵۰ - ۱۰t = ۲۵۰ \Rightarrow ۲۰t = ۲۰۰ \Rightarrow t = ۱۰s$$

حالت دیگر این است که جسم با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ جلوتر قرار داشته باشد. در این صورت ابتدا فاصله‌ی دو جسم کم شده تا جسم با سرعت $۳۰\ \frac{m}{s}$ به جسم دیگر برسد و سپس از آن دور شود:

$$\begin{matrix} x_۱ = ۱۰t + ۵۰ \\ x_۲ = ۳۰t \end{matrix} \Rightarrow x_۲ - x_۱ = ۲۵۰ \Rightarrow ۳۰t - (۱۰t + ۵۰) = ۲۵۰ \Rightarrow ۲۰t = ۳۰۰ \Rightarrow t = ۱۵s$$

۱۶۷- گزینه ۲ پاسخ است.

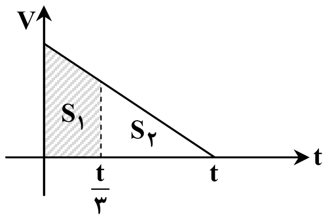


$$H = \frac{V_{\circ y}^۲}{۲g} = \frac{۴۰ \times ۴۰}{۲۰} = ۸۰m$$

$$R = V_{\circ x} \times ۲T_{\text{اوج}} = \frac{۲V_{\circ x} \times V_{\circ y}}{g} = \frac{۲ \times ۲۰ \times ۴۰}{۱۰} = ۱۶۰m$$

$$AM = \sqrt{۸۰^۲ + (\frac{۱۶۰}{۲})^۲} = ۸۰\sqrt{۲}\,m$$

۱۶۸- گزینه ۲ پاسخ است.



مساحت محصور به نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، پس مساحت کل مثلث d است و $S_۱$ مسافت طی شده در $\frac{t}{۳}$ اول است.

با توجه به تشابه مثلث‌ها:

$$\frac{S_۲}{S} = (\frac{۲}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}$$

یعنی $\frac{S_۱}{S} = \frac{۵}{۹}$ است، پس: $d_۱ = \frac{۵}{۹}d$

راه حل دیگر:

$$V = at + V_\circ \Rightarrow at + V_\circ = ۰ \Rightarrow at = -V_\circ$$

$$\begin{cases} t: d = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_\circ t = \frac{۱}{۲}at \cdot t - at \cdot t = -\frac{۱}{۲}at^۲ \\ \frac{t}{۳}: d_۱ = \frac{۱}{۲}\frac{at^۲}{۹} + \frac{V_\circ t}{۳} = \frac{۱}{۲}\frac{at^۲}{۹} - at \cdot \frac{t}{۳} = -\frac{۵}{۱۸}at^۲ \end{cases} \qquad \frac{d_۱}{d} = \frac{\frac{۵}{۱۸}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۵}{۹}$$

۱۶۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_\circ t \Rightarrow -۳۰ = -۵ \times ۱^۲ + V_B \times ۱ \Rightarrow V_B = -۲۵\ \frac{m}{s}$$

$$V^۲ - V_\circ^۲ = ۲a\Delta y \Rightarrow V_B^۲ - V_A^۲ = -۲g(-AB) \Rightarrow ۲۵^۲ - ۰ = ۲۰AB \Rightarrow AB = ۳۱/۲۵m$$

$$h_A = AB + h_B = ۳۱/۲۵ + ۴۰ = ۷۱/۲۵m$$

۱۷۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$V_x = V_{\circ x} = V_\circ \cos\alpha = ۴۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۰\sqrt{۲}\ \frac{m}{s}$$

$$\Delta x = ۴۰ \Rightarrow V_x \cdot t = ۴۰ \Rightarrow ۲۰\sqrt{۲} \cdot t = ۴۰ \Rightarrow t = \sqrt{۲}s$$

$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_{\circ y}t = -۵ \times (\sqrt{۲})^۲ + (۴۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}) \times \sqrt{۲} = -۱۰ + ۴۰ = ۳۰m$$

گلوله در ارتفاع ۳۰ متر از زمین به دیوار برخورد می‌کند یعنی ۱۰ متر پایین‌تر از نقطه‌ی B.

راه حل دیگر: ازمعادله‌ی مسیر پرتابه استفاده می‌کنیم. کافی است به ازای $x = ۴۰$ ، مقدار y را بیابیم.

$$y = \frac{-gx^۲}{۲V_\circ^۲ \cos^۲\alpha} + x\tan\alpha = \frac{-۱۰ \times ۴۰^۲}{۲(۴۰)^۲ \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} + ۴۰(۱) = -۱۰ + ۴۰ = ۳۰m \Rightarrow \text{B فاصله تا نقطه‌ی} = ۱۰m$$

۱۷۱- گزینه ۲ پاسخ است.

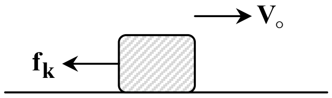
$$F=\frac{Gm_۱m_۲}{r^۲}$$

حالت اول: $m_۱=m_۲=m$ و $r=d$

حالت دوم: $m_۱=\frac{۲}{۳}m$ و $m_۲=\frac{۴}{۳}m$ و $r=\frac{d}{۳}$

$$\frac{F'}{F}=\frac{\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۳}}{(\frac{۱}{۳})^۲}=۸$$

۱۷۲- گزینه ۴ پاسخ است.



$$V^۲-V_\circ^۲=۲a\Delta x\xrightarrow{V=۰}-V_\circ^۲=۲a\Delta x\Rightarrow|\Delta x|=\frac{V_\circ^۲}{۲a}$$

$$\sum F=ma\Rightarrow f_k=ma\Rightarrow mg\mu_k=ma\Rightarrow a=g\mu_k$$

اندازه‌ی شتاب جسم $g\mu_k$ است و به‌جرم آن بستگی ندارد.

در آزمایش دوم $V_\circ$ دو برابر شده و a عوض نشده، پس: $d'=۴d$

۱۷۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\sum F=ma\Rightarrow F-f_k=ma\Rightarrow ۳۰-f_k=۱۰\times۱\Rightarrow f_k=۲۰N$$

در حالت دوم $F=۶۰N$:

$$\sum F=ma\Rightarrow ۶۰-۲۰=۱۰a\Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲}$$

بیان کوتاه‌تر:

$$\sum F=ma\Rightarrow\sum F_۲-\sum F_۱=m(a_۲-a_۱)$$

f_k ثابت است و F به اندازه‌ی ۳۰ نیوتن زیاد شده است.

$$۳۰=m(a-۱)\Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲}$$

۱۷۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{cases}m_۲g-T=m_۲a\\T-m_۱g-F=m_۱a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۰۰-T=۱۰a\\T-۵۰-۲۰=۵a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۱۰۰-T=۱۰a\\T-۷۰=۵a\end{cases}$$

$$\frac{۱۰۰-T}{۱۰}=\frac{T-۷۰}{۵}\Rightarrow ۱۰۰-T=۲T-۱۴۰\Rightarrow ۲۴۰=۳T\Rightarrow T=۸۰N$$

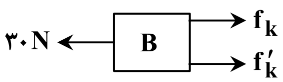
۱۷۵- گزینه ۴ پاسخ است.

چون دستگاه در حالت تعادل است پس نخ عمودی متصل به وزنه نیرویی برابر با وزن وزنه دارد. یعنی: $۵۰N$

چون همین نخ تا نقطه‌ی A نیز ادامه پیدا کرده، پس نیروی کشش در نقطه‌ی A نیز $۵۰N$ است و زاویه‌دار بودن نخ تأثیری در مقدار نیروی کشش آن ندارد.

۱۷۶- گزینه ۲ پاسخ است.

چون جسم A متعادل است پس کشش A با اصطکاک بین A و B برابر است.



$$f_k=T=۲N$$

برای جسم B داریم:

$$۳۰-f_k-f'_k=ma\Rightarrow ۳۰-۲-f'_k=۴\times۵\Rightarrow f'_k=۸N$$

۱۷۷- گزینه ۳ پاسخ است.

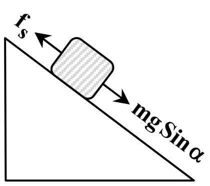
$$۲T-m_۱g=۰\Rightarrow T=۵۰N$$

کشش طناب در تمام نقاط آن یکسان است (جرم طناب ناچیز است).

$$T-f_{s_۲}=۰\Rightarrow f_{s_۲}=۵۰N$$

$$f_s\le N\cdot\mu_s\Rightarrow f_{s_۲}\le m_۲g\mu_s\Rightarrow ۵۰\le ۱۰۰\mu_s\Rightarrow ۰/۵\le\mu_s$$

۱۷۸- گزینه ۲ پاسخ است.



وقتی جسم روی سطح شیب‌دار ساکن است:

$$f_s=mg\,Sin\alpha \quad و \quad f_s\le\mu_s mg\,Cos\alpha$$

با کاهش α، اولاً $\mu_s mg\,Cos\alpha$ زیاد می‌شود و $mg\,Sin\alpha$ کم می‌شود، پس اگر در حالت اول جسم ساکن بوده باز هم ساکن می‌ماند. ثانیاً چون $mg\,Sin\alpha$ کم می‌شود، اصطکاک هم کم می‌شود.

۱۷۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$m_۳g=۸۰N \quad و \quad m_۱g=۱۰۰N \quad و \quad f_{s_{max۲}}=m_۲g\mu_s=۴۰N$$

می‌خواهیم به $m_۳$ آن‌قدر وزنه اضافه کنیم که در آستانه‌ی حرکت به‌طرف پایین باشد. یعنی $m_۲$ در آستانه‌ی لغزیدن به‌طرف چپ باشد، پس $f_{s_۲}$ به‌طرف راست می‌شود.

$$m'_۳g-m_۱g-f_{s_{max۲}}=۰\Rightarrow m'_۳g=۱۴۰\Rightarrow m'_۳=۱۴kg\Rightarrow m'_۳-m_۳=۱۴-۸=۶kg$$

به جرم $m_۳$، ۶ کیلوگرم می‌تواند اضافه شود تا دستگاه ساکن بماند.

۱۸۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$m_1 g \operatorname{Sin}\alpha = ۱۰۰ \operatorname{Sin} ۴۵^\circ = ۵۰\sqrt{۲} \simeq ۷۰ N$

$m_۲ g = ۱۰۰ N$

$m_۲ g > m_1 g \operatorname{Sin}\alpha \Rightarrow$ اگر دستگاه حرکت کند، m_1 بالا و $m_۲$ پایین می‌رود.

پس اصطکاک وارد بر m_1 به طرف پایین شیب است.

$f_{s_{max_1}} = (m_1 g \operatorname{Cos}\alpha)\mu_s = ۱۰۰\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۰/۵ = ۲۵\sqrt{۲} \simeq ۳۵ N$

$m_۲ g < m_1 g \operatorname{Sin}\alpha + f_{s_{max1}} \Rightarrow$ دستگاه ساکن می‌ماند $\Rightarrow m_۲ g - m_1 g \operatorname{Sin}\alpha - f_{s_1} = ۰ \Rightarrow f_{s_1} = ۳۰ N$

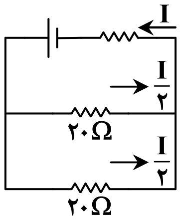
پاسخ پرسش‌های درس‌های پایه

۱۶۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$V = IR \Rightarrow \Delta V = R\Delta I \Rightarrow ۱۶ - ۱۰ = R \times ۰/۳ \Rightarrow R = ۲۰\Omega$

$P_1 = \frac{V_1^۲}{R} = \frac{۱۰ \times ۱۰}{۲۰} = ۵ W$

۱۶۷- گزینه ۲ پاسخ است.



$R_1 = R_۲ \Rightarrow I_1 = I_۲ = \frac{I}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} P_r = rI^۲ = ۲I^۲ \\ P_{R_1} = R_1(\frac{I}{۲})^۲ = ۲۰\frac{I^۲}{۴} = ۵I^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_{R_1}}{P_r} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{U_1}{۵} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow U_1 = \frac{۲۵}{۲} J$$

۱۶۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$R_1 I_1 = R_۲ I_۲ \Rightarrow ۳۰ I_۲ = ۱۵ \times ۰/۲ \Rightarrow I_۲ = ۰/۱ A$

$I_t = I_۳ = I_1 + I_۲ = ۰/۲ + ۰/۱ = ۰/۳ A$

$\varepsilon - R_۳ I_۳ - R_۲ I_۲ - rI = ۰ \Rightarrow \varepsilon = ۲۰ \times ۰/۳ + ۳۰ \times ۰/۱ + ۲ \times ۰/۳ = ۹/۶ v$

۱۶۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$d_A = \frac{۱}{۲} d_B \Rightarrow \frac{A_A}{A_B} = (\frac{d_A}{d_B})^۲ = \frac{۱}{۴}$

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{V^۲}{R} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{R_B}{R_A} \\ R = \frac{\rho l}{A} \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = \frac{l_B}{l_A} \cdot \frac{A_A}{A_B} = \frac{۱}{۵} \times (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲۰} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{۱}{۲۰}$$

۱۷۰- گزینه ۱ پاسخ است.

تمام مقاومت‌های شکل با هم موازی هستند.

$\frac{۱}{R_T} = \frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۶۰} = \frac{۶}{۶۰} \Rightarrow R_T = \frac{۶۰}{۶} = ۱۰\Omega$

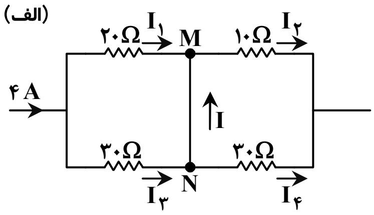
۱۷۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} P = \varepsilon I \text{ توان کل باتری} \\ P = RI^۲ = VI \text{ توان مفید باتری} \end{array}\right\} \Rightarrow R_a = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} = \frac{V}{\varepsilon}$$

$R_a = \frac{V}{\varepsilon} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow ۰/۸ = \frac{P_{\text{کل}} - P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}} = ۱ - \frac{P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}} = ۰/۲$

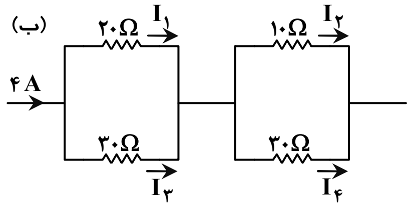
۱۷۲- گزینه ۴ پاسخ است.

قانون جریان کیرشهف در نقطه‌ی M:



$I_۲ = I_1 + I$

با توجه به شکل (ب) جریان‌های I_1 و $I_۲$ را حساب می‌کنیم تا مقدار I به دست آید.



$$\begin{cases}۲۰I_۱=۳۰I_۳\\ I_۱+I_۳=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_۱=\frac{۳}{۵}\times ۴=۲/۴A\\ I_۳=\frac{۲}{۵}\times ۴=۱/۶A\end{cases}$$

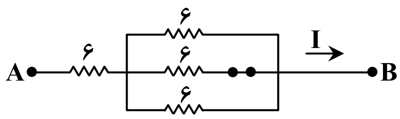
$$\begin{cases}۱۰I_۲=۳۰I_۴\\ I_۲+I_۴=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_۲=\frac{۳}{۴}\times ۴=۳A\\ I_۴=\frac{۱}{۴}\times ۴=۱A\end{cases}\xrightarrow{I=I_۲-I_۱} I=۳-۲/۴=۰/۶A$$

۱۷۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_۱-R_۱I_۱-R_۲(I_۱+I_۲)=۰\Rightarrow ۱۰-۰/۵R_۱-R_۲=۰\\ \varepsilon_۲-R_۲(I_۱+I_۲)-r_۲I_۲=۰\Rightarrow ۶-R_۲-۰/۵\times ۲=۰\end{array}\right\}\Rightarrow R_۲=۵\Omega\ ,\ R_۱=۱۰\Omega$$

۱۷۴- گزینه ۳ پاسخ است.

اختلاف پتانسیل بین A و B برابر ε و ثابت است.



$$\left.\begin{array}{l}\text{حالت اول}: R_۱=۶+\frac{۶}{۳}=۸\\ \text{حالت دوم}\ R_۲=۶+\frac{۶}{۲}=۹\end{array}\right\}\Rightarrow R_۱I_۱=R_۲I_۲\Rightarrow\frac{I_۲}{I_۱}=\frac{۸}{۹}$$

۱۷۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$(۱۵+۲۵)I_۱=(۱۲+۸)I_۲\Rightarrow I_۲=۲I_۱$$

$$\begin{cases}P_۸=۸I_۲^۲=۸(۲I_۱)^۲=۳۲I_۱^۲\\ P_{۲۵}=۲۵I_۱^۲\end{cases}\Rightarrow\frac{P_۸}{P_{۲۵}}=\frac{۳۲}{۲۵}$$

۱۷۶- گزینه ۲ پاسخ است.

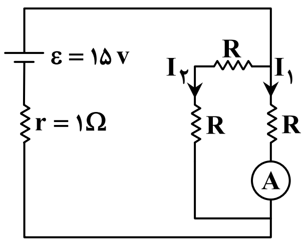
$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲\Rightarrow ۱۰^{-۳}=\frac{۱}{۲}\times ۸۰\times ۱۰^{-۶}V_c^۲\Rightarrow V_c^۲=۲۵\Rightarrow V_c=۵v$$

$$V_c=R_۱I_۱\Rightarrow ۵=۱۰I_۱\Rightarrow I_۱=۰/۵A$$

$$I_۱=I_۳=\frac{\varepsilon}{r+R_۱+R_۳}\Rightarrow ۰/۵=\frac{۱۲}{۴+۱۰+R_۳}\Rightarrow R_۳=۱۰\Omega$$

۱۷۷- گزینه ۳ پاسخ است.

حالت اول:

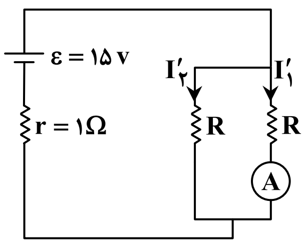


$$I_t=\frac{\varepsilon}{۱+\frac{۲R\cdot R}{۲R+R}}=\frac{\varepsilon}{۱+\frac{۲}{۳}R}$$

$$RI_۱=۲RI_۲\Rightarrow I_۱=۲I_۲\Rightarrow I_۱=\frac{۲}{۲+۱}\cdot I_t=\frac{۲}{۳}I_t=\frac{۲}{۳}\frac{\varepsilon}{۱+\frac{۲}{۳}R}$$

$$\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}=\frac{۲\times ۱۵}{۳+۲R}\Rightarrow R=۳\Omega$$

حالت دوم: مقاومت R افقی، اتصال کوتاه شده است.



$$I_t=\frac{\varepsilon}{۱+\frac{R}{۲}}$$

$$I'_۱=\frac{۱}{۲}I_t=\frac{\varepsilon}{۲+R}=\frac{۱۵}{۳+۲}=۳A$$

۱۷۸- گزینه ۲ پاسخ است.

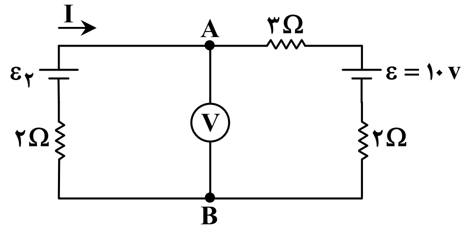
چون لامپ‌ها سری و مشابه هستند، اختلاف پتانسیل دو سر هر کدام $\frac{۱}{۳}V_t$ است.

$$V_۱=V_۲=V_۳=\frac{۱}{۳}\times ۲۲۰v$$

$$P=\frac{V^۲}{R}\Rightarrow\frac{P}{۱۲۰}=\left(\frac{\frac{۱}{۳}\times ۲۲۰}{۲۲۰}\right)^۲\Rightarrow P_۱=P_۲=P_۳=\frac{۱}{۹}\times ۱۲۰$$

$$P_t=P_۱+P_۲+P_۳=۳P_۱=۴۰W$$

۱۷۹- گزینه ۱ پاسخ است.

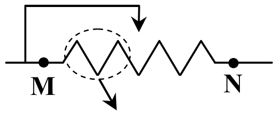


از ولت‌متر جریانی عبور نمی‌کند.

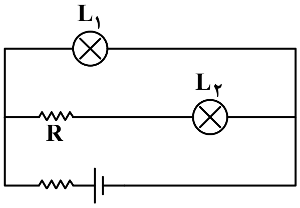
$$V_A - 3I - 10 - 2I = V_B$$
$$\Rightarrow V_A - V_B = 5I + 10 \Rightarrow 12/5 = 5I + 10 \Rightarrow I = 0/5A$$
$$V_A - \varepsilon_2 + 2I = V_B \Rightarrow 12/5 = \varepsilon_2 - 2\times 0/5$$
$$\Rightarrow \varepsilon_2 = 13/5v$$

۱۸۰- گزینه ۴ پاسخ است.

با حرکت لغزنده به‌طرف N مقاومت R_{MN} کم می‌شود.



این قسمت اتصال کوتاه می‌شود.



با کاهش مقاومت R_{MN} شدت جریان شاخه‌ی پایینی زیادتر و شدت جریان شاخه‌ی بالایی کم می‌شود.

$$R\downarrow \Rightarrow R_t\downarrow \Rightarrow I_t\uparrow \xrightarrow{V_t=\varepsilon - rI_t} V_t\downarrow$$

پس اختلاف پتانسیل دو سر L_1 کم شده و L_1 کم‌نورتر می‌شود. جریان گذرنده از آن نیز کاهش می‌یابد.

$$I_t = I_1 + I_2 \xrightarrow{I_1\downarrow\ ,\ I_t\uparrow} I_2\uparrow \Rightarrow$$ پرنورتر شده L_2

شیمی

۱۸۱- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۱ کتاب

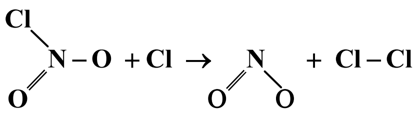
بر اساس نظریه‌ی برخورد هنگامی برخورد مؤثر است که ذره‌های برخوردکننده جهت‌گیری مناسب و انرژی کافی داشته باشند، پس فقط جهت‌گیری مناسب کافی نیست.

۱۸۲- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۱۲ کتاب

بررسی گزینه‌های ۲ و ۳: مرتبه‌ی واکنش با تغییر غلظت تغییر نمی‌کند، مگر در موارد خاص که غلظت یک واکنش‌دهنده آنقدر زیاد باشد که تغییر آن در هنگام پیشرفت واکنش محسوس نباشد.

بررسی گزینه‌ی ۴: در کلیه‌ی ظروف تعداد مولکول NO کم‌تر از O_3 است و با توجه به واکنش $NO + O_3 \rightarrow NO_2 + O_2$ در هر دو ظرف NO محدودکننده است.

۱۸۳- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۱۳ کتاب



تعداد پیوندها در دو طرف واکنش برابر ۴ می‌باشد.

بر اساس نظریه‌ی حالت گذار انرژی فعال‌سازی از مجموع انرژی پیوندهای در حال شکستن کم‌تر است زیرا این نوع پیوندها در حالت گذار فقط سست می‌شوند.

۱۸۴- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۱۸ کتاب

در قسمت x فقط واکنش‌دهنده‌های مرحله‌ی دوم نوشته می‌شوند که در این‌جا شامل ذره‌ی حد واسط H_2O_2 و یک مولکول H_2 است.

۱۸۵- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۱۴ کتاب

بر اساس نظریه‌ی حالت گذار ذره‌های واکنش‌دهنده مدت‌زمانی کنار یکدیگر باقی می‌مانند، سپس آرام آرام پیوندهای اولیه سست و پیوندهای جدید خودنمایی می‌کنند.

۱۸۶- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۱۶ کتاب

نوع پیوندها تغییر نکرده است اما به‌دلیل افزایش تعداد رادیکال‌ها در واکنش، سطح انرژی افزایش می‌یابد و علت پیشرفت واکنش فقط می‌تواند افزایش آنتروپی باشد.

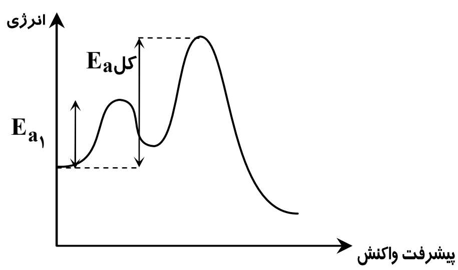
۱۸۷- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۱۷ و ۱۸ کتاب

مرحله‌ی اول : $NO_{2(g)} + NO_{2(g)} \rightarrow NO_{(g)} + NO_{3(g)}$

مرحله‌ی دوم : $NO_{3(g)} + CO_{(g)} \rightarrow NO_{2(g)} + CO_{2(g)}$

این واکنش ساز و کار دومرحله‌ای دارد و در مرحله‌ی اول که آهسته است فقط NO_2 نقش واکنش‌دهنده دارد پس فقط NO_2 بر سرعت واکنش تأثیر دارد و تغییر غلظت CO بر سرعت واکنش تأثیری ندارد.

۱۸۸- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۱۸ کتاب



E_a کل $> E_{a_1}$

۱۸۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۱۷ و ۱۸ کتاب

$$\Delta H_{کل} = \Delta H_۱ + \Delta H_۲ = (۱۵۰ - ۲۵۰) + (۲۵۰ - ۳۵۰) = -۲۰۰ \ kJ \cdot mol^{-1}$$

۱۹۰- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۱۹ و ۲۰ کتاب

واکنش تجزیه‌ی $KClO_۳$ از جمله واکنش‌های گرماده است که نمودار آن در صفحه‌ی ۲۰ کتاب سال چهارم آورده شده است.

۱۹۱- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۱۹ کتاب

کاتالیزگر باعث کاهش انرژی فعال‌سازی می‌شود اما انرژی فعال‌سازی را به صفر نمی‌رساند یا نیاز به انرژی فعال‌سازی را برطرف نمی‌کند.

۱۹۲- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۲۰ کتاب

در واکنش هیدروژن‌دار شدن مانند $C_۲H_{۴(g)} + H_{۲(g)} \rightarrow C_۲H_{۶(g)}$ تعداد مول‌های گازی کاهش می‌یابد، بی‌نظمی نیز کاهش می‌یابد و علت پیشرفت واکنش کاهش سطح انرژی می‌باشد.

۱۹۳- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۲۱ کتاب

کاتالیزگر در نوع واکنش‌دهنده‌ها و فرآورده‌ها تغییر ایجاد نمی‌کند پس ΔH واکنش را تغییر نمی‌دهد و بدین‌ترتیب انرژی فعال‌سازی را در مسیر رفت و برگشت به یک اندازه کاهش می‌دهد.

بدون کاتالیزگر $E_a = ۱۰۰$ و $\Delta H = -۵۰ \Rightarrow E'_a = ۱۵۰$

در حضور کاتالیزگر $E_a = ۸۵$ و $\Delta H = -۵۰ \Rightarrow E'_a = ۱۳۵$

$$\text{درصد کاهش} = \frac{۱۵}{۱۵۰} \times ۱۰۰ = ٪۱۰$$

۱۹۴- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۲۰ کتاب

اگر مرحله‌ی اول آهسته‌تر است، سرعت تولید حد واسط $(NO_۲)$ کم‌تر از سرعت مصرف آن در مرحله‌ی بعدی خواهد بود.

۱۹۵- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۴ الی ۷ کتاب

ابتدا با توجه به جرم مواد گازی‌شکل که برابر ۵/۴ گرم است، مول $KNO_۳$ تجزیه‌شده را به‌دست می‌آوریم و سرعت متوسط را محاسبه می‌نماییم (جرم اولیه‌ی داده‌شده از $KNO_۳$ بی‌مورد است).

$$۴KNO_{۳(s)} \rightarrow ۲K_۲O_{(s)} + \underbrace{۲N_{۲(g)} + ۵O_{۲(g)}}$$

$$\frac{x\ mol}{۴} = \frac{۵/۴}{۲(۲۸) + ۵(۳۲)}$$

$$x = \frac{۴ \times ۵/۴}{۲۱۶} \Rightarrow x = ۰/۱\ mol$$ پتاسیم نیترات تجزیه‌شده

$$\overline{R}_{KNO_۳} = \frac{۰/۱}{۵} = ۰/۰۲\ mol \cdot min^{-1}$$

پاسخ پرسش‌های درس‌های سال چهارم

۱۹۶- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۲ کتاب

۱۹۷- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۴ کتاب

$$\left.\begin{array}{l} R_{A\ (۰-۲۰)} = -\frac{۰/۵۶ - ۱}{۲۰} = ۰/۰۲۲ \\ R_{B\ (۵۰-۷۰)} = \frac{۰/۸۴ - ۰/۷۴}{۲۰} = ۰/۰۰۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R_A}{R_B} = \frac{۰/۰۲۲}{۰/۰۰۵} = ۴/۴$$

۱۹۸- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۵ کتاب

$$۲N_۲O_{۵(g)} \rightarrow ۴NO_{۲(g)} + O_{۲(g)}$$

$$\overline{R}_{N_۲O_۵}(mol.L^{-1}.s^{-1}) = \frac{\overline{R}_{N_۲O_۵}(mol.s^{-1})}{۵}$$

$$\overline{R}_{NO_۲}(mol.s^{-1}) = ۲\overline{R}_{N_۲O_۵}(mol.s^{-1}) \qquad \Rightarrow \frac{\overline{R}_{NO_۲}(mol.s^{-1})}{\overline{R}_{N_۲O_۵}(mol.L^{-1}.s^{-1})} = ۱۰$$

۱۹۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحه ۷ کتاب

$$۲NO_{۲(g)} \rightarrow ۲NO_{(g)} + O_{۲(g)}$$

ضریب $NO_۲$ در معادله‌ی واکنش ۲ برابر ضریب $O_۲$ می‌باشد، به‌همین علت شیب تغییرات غلظت $NO_۲$ همواره تندتر از $O_۲$ است.

۲۰۰- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۸ و ۹ کتاب

علت انجام نشدن واکنش بین $O_{۲(g)}$ و $H_{۲(g)}$ در دمای اتاق فراهم نشدن انرژی فعال‌سازی است. ماهیت این واکنش‌دهنده‌ها به‌قدری فعال است که با ایجاد یک جرقه، واکنش بسیار سریع و به حالت انفجاری روی می‌دهد.

۲۰۱- گزینه ۳ پاسخ است. صفحه ۸ کتاب

ثابت بودن سرعت نشانه ثابت بودن شیب نمودار غلظت- زمان است و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که با تغییر غلظت واکنش‌دهنده‌ها سرعت تغییر نمی‌کند.

۲۰۲- گزینه ۲ پاسخ است.   صفحه ۹ کتاب

با جایگذاری گزینه‌های مختلف در رابطه‌ی قانون سرعت و استفاده از آزمایش ۱، هر دو گزینه‌ی ۲ و ۴ می‌توانند با رابطه سازگار باشند اما آزمایش ۲ و ۳ با گزینه‌ی ۴ سازگاری ندارند و بدین‌ترتیب گزینه‌ی ۲ را انتخاب می‌کنیم.

۲۰۳- گزینه ۳ پاسخ است.   صفحه ۱۳ کتاب

واکنشی که انرژی فعال‌سازی آن در مسیر برگشت کم‌تر است با سرعت بیش‌تری در این مسیر پیشرفت می‌کند.

۲۰۴- گزینه ۴ پاسخ است.   صفحات ۴ الی ۷ کتاب

	$۲A$	$\rightarrow$	$۳B$
مقدار اولیه	۱۰		۰
در ثانیه t	$۱۰-۲x$		$۳x$

$$\Rightarrow ۳x = ۱/۵\,(۱۰-۲x) \Rightarrow ۳x = ۱۵-۳x \Rightarrow ۶x = ۱۵ \Rightarrow x = ۲/۵$$

$$\overline{R}_A = ۲\overline{R}_{\text{واکنش}} = ۰/۰۴ = \frac{\overset{|\Delta n_A|}{۵}}{\underset{\text{زمان(ثانیه)}}{t} \times \underset{\text{حجم ظرف}}{۵}} \Rightarrow ۰/۲t = ۵ \Rightarrow t = ۲۵\,s$$

۲۰۵- گزینه ۳ پاسخ است.   صفحه ۱۳ کتاب

$$\left.\begin{array}{l} E_a = ۳\Delta H \\ \Delta H = E_a - E'_a \Rightarrow \Delta H = ۳\Delta H - E'_a \Rightarrow E'_a = ۲\Delta H \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E'_a}{E_a} = \frac{۲\Delta H}{۳\Delta H} = \frac{۲}{۳}$$

۲۰۶- گزینه ۱ پاسخ است.   صفحات ۱۷ و ۱۸ کتاب

با توجه به رابطه‌ی قانون سرعت این واکنش بنیادی نیست و تنها در واکنش‌های بنیادی، واکنش‌دهنده‌ها به‌طور مستقیم به فرآورده‌ها تبدیل می‌شوند.

۲۰۷- گزینه ۴ پاسخ است.   صفحه ۱۲ کتاب

بر طبق نظریه‌ی برخورد ذرات واکنش‌دهنده به صورت گوی‌های سخت در نظر گرفته می‌شود و سرعت واکنش به تعداد برخوردها در واحد حجم و در واحد زمان بستگی دارد.

۲۰۸- گزینه ۲ پاسخ است.   صفحه ۴ الی ۷ کتاب

مجموع ضرایب فرآورده‌ها بیش‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است، پس سرعت متوسط تولید فرآورده‌ها نیز بیش‌تر است اما بر اساس قانون بقای جرم تغییر جرم فرآورده‌ها با تغییر جرم واکنش‌دهنده‌ها برابر می‌باشد.

۲۰۹- گزینه ۲ پاسخ است.   صفحات ۴ الی ۷ کتاب

برای مواد جامد تغییر غلظت وجود ندارد و رابطه‌ای که در گزینه‌ی ۲ نوشته شده است، نادرست است.

۲۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.   صفحات ۴ الی ۷ کتاب

$$۲Na_{(s)} + ۲H_۲O_{(l)} \rightarrow ۲NaOH_{(aq)} + H_{۲(g)}$$

$$mol\ H_{۲(g)} = ۲/۳\,g\ Na \times \frac{۱}{۲۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \overline{R}[H_۲] = \frac{\frac{۱}{۲۰}}{(\frac{۱۰}{۶۰}) \times ۸} = \frac{۳}{۸۰}$$

$$mol\ Na(OH)_{(aq)} = ۲/۳\,g\ Na \times \frac{۱}{۲۳} \times \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \overline{R}_{[NaOH]} = \frac{(\frac{۱}{۱۰})}{(\frac{۱۰}{۶۰}) \times ۲} = \frac{۳}{۱۰}$$

توجه: حجم مؤثر برای $NaOH$ برابر ۲ لیتر و برای $H_۲$ برابر ۸ لیتر است.

پاسخ پرسش‌های درس‌های پایه

۱۹۶- گزینه ۳ پاسخ است.   صفحه ۳۴ کتاب شیمی ۲

از ۹ مورد پیش‌گویی مندلیف در مورد عناصر هشت مورد آن درست بود.

۱۹۷- گزینه ۴ پاسخ است.   صفحه ۳۵ کتاب شیمی ۲

در تناوب چهارم زیرلایه‌های $۴s$، $۴p$ و $۳d$ در حال پر شدن هستند. عناصر یک تناوب در تعداد لایه‌های الکترونی وجه اشتراک دارند و در قانون تناوبی جدید، خواص تناوبی تابع افزایش عدد اتمی است.

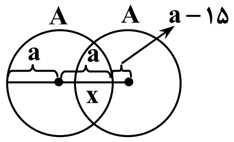
۱۹۸- گزینه ۴ پاسخ است.   صفحات ۳۷ و ۳۸ کتاب شیمی ۲

در گروه IA چگالی افزایش نامنظم دارد اما نقطه‌ی ذوب و جوش به‌طور منظم کاهش می‌یابند.

۱۹۹- گزینه ۲ پاسخ است.   صفحه ۴۲ کتاب شیمی ۲

فلزات دسته‌ی d درگروه سوم تا دوازدهم جای دارند. در اکتینیدها زیرلایه‌ی $۵f$ در حال پر شدن است و اکتینیدها به‌جز اورانیم و توریم هسته‌ی ناپایدار دارند. (در بین اکتینیدها اورانیم و توریم هسته‌هایی با عمر طولانی دارند.)

۲۰۰- گزینه ۳ پاسخ است.		صفحه ۴۷ کتاب شیمی ۲



$$x = ۱۵\ pm$$
$$a + a + (a - ۱۵) = ۱۸۰ \Rightarrow a = ۶۵\ pm$$
$$r_c = a - \frac{x}{۲} = ۶۵ - ۷/۵ = ۵۷/۵\ pm$$

۲۰۱- گزینه ۳ پاسخ است.		صفحه ۴۷ کتاب شیمی ۲

با افزایش تعداد الکترون‌ها در لایه‌های درونی و بیرونی اثر پوششی افزایش می‌یابد اما در یک تناوب به‌دلیل افزایش بار مؤثر هسته و ثابت ماندن تعداد لایه‌ها شعاع اتمی کاهش می‌یابد.

۲۰۲- گزینه ۲ پاسخ است.		صفحه ۴۹ کتاب شیمی ۲

این عنصر در تناوب سوم و گروه IIIA قرار دارد، بنابراین نسبت به عنصر گروه IIA و IVA هم تناوب خود انرژی یونش کم‌تری دارد.
این عنصر Al می‌باشد و نسبت به Ga شعاع بزرگ‌تری دارد و یک مورد استثناء در تغییرات شعاع اتمی محسوب می‌گردد.

۲۰۳- گزینه ۳ پاسخ است.		صفحات ۴۹ و ۵۰ کتاب شیمی ۲

۲۰۴- گزینه ۴ پاسخ است.		صفحات ۵۲ و ۵۳ کتاب شیمی ۲

در گزینه‌ی ۱: H^- آرایش He دارد اما هشتایی نیست.

در گزینه‌ی ۲: $Fe^{۲+}$ آرایش گاز نجیب ندارد.

در گزینه‌ی ۳: $SiCl_۴$ ترکیب کووالانسی است هرچند هر دو اتم آرایش هشتایی دارند.

۲۰۵- گزینه ۳ پاسخ است.		صفحه ۵۴ کتاب شیمی ۲

یون‌های تک‌اتمی متداول (یون‌هایی که کم‌تر متداول‌اند با علامت * مشخص شده‌اند.)

نشانه‌ی شیمیایی	نام یون	بار منفی	نشانه‌ی شیمیایی	نام یون	بار مثبت
H^- F^- Cl^- Br^- I^-	یون هیدرید * یون فلوئورید یون کلرید یون برمید یون یدید	۱-	H^+ Li^+ Na^+ K^+ Cs^+ Ag^+	یون هیدروژن * یون لیتیم یون سدیم یون پتاسیم یون سزیم یون نقره	۱+
$O^{۲-}$ $S^{۲-}$	یون اکسید یون سولفید	۲-	$Mg^{۲+}$ $Ca^{۲+}$ $Sr^{۲+}$ $Ba^{۲+}$ $Zn^{۲+}$	یون منیزیم یون کلسیم یون استرانسیم * یون باریم یون روی	۲+
$N^{۳-}$	یون نیترید *	۳-	$Al^{۳+}$	یون آلومینیم	۳+

۲۰۶- گزینه ۱ پاسخ است.		صفحه ۵۷ کتاب شیمی ۲

شعاع Cl^- از Na^+ بزرگ‌تر است، بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ نادرست هستند و باید نسبت شعاع Na^+ به شعاع Cl^- برابر ۰/۵۶۴ باشد که فقط در گزینه‌ی ۱ این‌چنین می‌باشد (توضیح اول صورت سؤال بی‌مورد است).

۲۰۷- گزینه ۴ پاسخ است.		صفحات ۵۶ الی ۵۸ کتاب شیمی ۲

در ترکیبات یونی برخلاف ترکیبات کووالانسی پس از تشکیل پیوند نیروهای جاذبه از دافعه قوی‌ترند.

۲۰۸- گزینه ۲ پاسخ است.		صفحه ۵۸ و ۵۹ کتاب

رسانایی ترکیبات یونی فقط در حالت مذاب و محلول تعریف می‌شود که یون‌ها آزادانه حرکت می‌کنند و جریان برق را هدایت می‌کنند. در حالت جامد یون‌ها در شبکه‌ی بلور درگیر هستند و امکان جابه‌جایی ندارند.

۲۰۹- گزینه ۲ پاسخ است.		صفحه ۶۰ کتاب شیمی ۲

در مقایسه‌ی انرژی شبکه‌ی بلور ابتدا بار کاتیون و سپس بار آنیون را مبنای مقایسه قرار می‌دهیم و در صورت برابری بار یون‌ها، ترکیبی که در آن یون‌ها اندازه‌ی کوچک‌تری دارند، انرژی شبکه‌ی بلور بیش‌تری خواهد داشت.

۲۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.		صفحات ۶۶ و ۶۷ کتاب شیمی ۲

$$\left.\begin{array}{l} mol\ H_۲O = ۱/۸\,g \times \frac{۱}{۱۸} = ۰/۱\,mol \\ mol\ \text{نمک} = ۰/۰۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{تعداد آب تبلور} = \frac{mol\ H_۲O}{mol\ \text{نمک}} = \frac{۰/۱}{۰/۰۲} = ۵$$