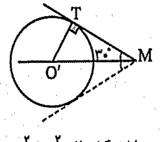
پاسخ تشریحی آزمون‌های فصل ۳

پاسخ تشریحی آزمون ۱۱

۱- گزینه‌ی (۱) کافی است از دستگاه زیر α را حذف کنیم.

$$\begin{cases}x=۲-۳\sin\alpha\\ y=۵+۳\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-۲=-۳\sin\alpha\\ y-۵=۳\cos\alpha\end{cases}=\begin{cases}(x-۲)^۲=۹\sin^۲\alpha\\ (y-۵)^۲=۹\cos^۲\alpha\end{cases}\Rightarrow(x-۲)^۲+(y-۵)^۲=۹$$

۲- گزینه‌ی (۲) فرض کنیم مماس‌های رسم شده از نقطه‌ی M بر دایره‌ی $C(O',R)$ با هم زاویه‌ی ۶۰ درجه بسازند. چون $O'M$ نیمساز است، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $O'MT$ نتیجه می‌گیریم $|O'T|=\frac{۱}{۲}|O'M|$، پس $|O'M|=۲R$ ، بنابراین فاصله‌ی M از مرکز O' همواره مقدار ثابت $۲R$ می‌باشد. در نتیجه مکان M روی دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $۲R$ است.

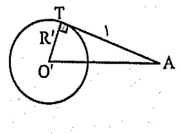


$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰\Rightarrow O'(۱,-۲)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۴}}{۲}=۲$$

پس مکان هندسی موردنظر دایره‌ای به مرکز $O'(۱,-۲)$ و شعاع ۴ می‌باشد؛ $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$: معادله‌ی مکان موردنظر

۳- گزینه‌ی (۲) ابتدا طول مماس رسم شده از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C را به‌دست می‌آوریم؛

$$\text{طول مماس}=\sqrt{C(A)}=\sqrt{۰+۱-۰+۴-۴}=۱$$



بنابراین طول مماس رسم شده از نقطه‌ی A بر دایره‌ی C' نیز برابر ۱ می‌باشد.
با توجه به شکل و اطلاعات مسأله داریم؛ $|O'A|=\sqrt{۳+۱}=۲$

بنابراین؛ $\overset{\Delta}{O'TA}:R'=\sqrt{O'A^۲-AT^۲}=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$

۴- گزینه‌ی (۳) باید وضعیت نسبی این دو دایره را بررسی کنیم؛

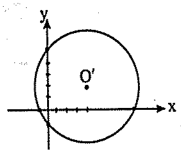
$$\begin{cases}x^۲+y^۲=۹\Rightarrow O(۰,۰)\ ,\ R=۳\\ x^۲+y^۲-۴x=۰\Rightarrow O'(۲,۰)\ ,\ R'=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=۲\end{cases}\Rightarrow|OO'|=\sqrt{۴+۰}=۲$$

دیده می‌شود $|R-R'|<|OO'|<R+R'$، پس دو دایره متقاطع‌اند و دارای دو مماس مشترک خارجی هستند.

۵- گزینه‌ی (۳) مرکز دایره روی خط $x+y-۶=۰$ قرار دارد. پس مختصات مرکز به صورت $O'(\alpha,۶-\alpha)$ است. چون نقاط A و B روی این دایره قرار دارند، نتیجه می‌گیریم؛

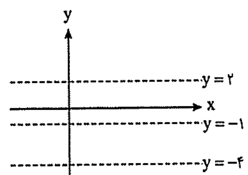
$$|AO'|=|BO'|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(۶-\alpha+۲)^۲}=\sqrt{(\alpha+۱)^۲+(۶-\alpha-۲)^۲}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲+۱-۲\alpha+\alpha^۲+۶۴-۱۶\alpha=\alpha^۲+۱+۲\alpha+\alpha^۲+۱۶-۸\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۲\alpha=۴۸\Rightarrow\alpha=۴\Rightarrow O'(۴,۲)\ ,\ R=|O'A|=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$



اگر دایره‌ای به مرکز $O'(۴,۲)$ و شعاع ۵ را رسم کنیم، دیده می‌شود این دایره در چهار نقطه محورهای مختصات را قطع می‌کند.

۶- گزینه‌ی (۱) دو خط $y=۲$ و $y=-۴$ موازی‌اند. چون دایره بر هر دوی آن‌ها مماس است، پس مرکز دایره روی خط $y=-۱$ قرار می‌گیرد. از طرفی مرکز دایره بر خط $۲y+x+۱=۰$ واقع است. بنابراین نقطه‌ی تلاقی این دو خط مرکز دایره می‌باشد. در ضمن فاصله‌ی دو خط موازی $y=۲$ و $y=-۴$ یعنی ۶ برابر قطر دایره است.



$$\begin{cases}۲y+x+۱=۰\\ y=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=-۱\end{cases}\Rightarrow O'(۱,-۱)\ ,\ ۲R=۶\Rightarrow R=۳$$

$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$: معادله‌ی دایره

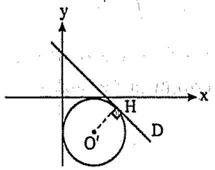
۷- گزینه‌ی (۱) بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره‌ی $C(O',R)$ برابر $|O'A|+R$ و کم‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره‌ی $C(O',R)$ برابر $||O'A|-R|$ می‌باشد. ابتدا طرفین معادله‌ی داده شده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛

$$x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰\Rightarrow O'(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۲)\ ,\ R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۱۶-۴}}{۲}=۲$$

$$|O'A|=\sqrt{(۵-۱)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$\begin{cases}\text{بیش‌ترین فاصله}=|O'A|+R=۵+۲=۷\\ \text{کم‌ترین فاصله}=||O'A|-R||=|۵-۲|=۳\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}}\text{مجموع}=۱۰$$

۸- گزینه‌ی (۳) مرکز این دایره به صورت $O'(R,-R)$ می‌باشد. چون دایره بر خط D مماس است، پس فاصله‌ی مرکز O' تا خط D برابر R می‌باشد.



$$|O'H|=R\Rightarrow\frac{|R-R-۶|}{\sqrt{۲}}=R\Rightarrow R\sqrt{۲}=۶\Rightarrow R=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi R^۲=\pi(۳\sqrt{۲})^۲=۱۸\pi$$

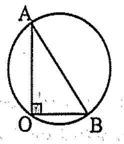
۹- گزینه‌ی (۳) مرکز دایره‌ی داده شده $O'(-\frac{m}{۲},-n)$ می‌باشد؛

$$(-\frac{m}{۲},-n)=(۲,۱)\Rightarrow\begin{cases}-\frac{m}{۲}=۲\\ -n=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-۴\\ n=-۱\end{cases}$$

$$\text{معادله‌ی دایره}:x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱=۰\Rightarrow R=\frac{\sqrt{۱۶+۴-۴}}{۲}=۲$$

گزینه‌ای درست است که فاصله‌ی مرکز دایره از آن برابر شعاع باشد. در بین گزینه‌ها تنها فاصله‌ی نقطه‌ی $(۲,۱)$ از خط $۳x+۴y=۰$ برابر ۲ می‌باشد.

۱۰- گزینه‌ی (۳) راه‌حل اول: مثلث OAB قائم‌الزاویه است زیرا $\overrightarrow{OA}=(۳,۱)$ ، $\overrightarrow{OB}=(-۱,۳)$ و $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=۰$، پس $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$، در نتیجه $\hat{O}=۹۰^\circ$، بنابراین AB قطر دایره‌ی محیطی است.



$$۲R=|AB|=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow R=\sqrt{۵}$$

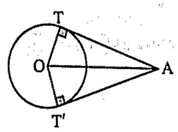
راه‌حل دوم: فرض کنید معادله‌ی دایره به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد، نقاط A ، B و O در این معادله صدق می‌کنند. به این صورت می‌توان مقادیر a ، b و c و سپس شعاع دایره را به‌دست آورد.

۱۱- گزینه‌ی (۴) طول وتر مینیمم، از رابطه‌ی $۲\sqrt{|C(A)|}$ به‌دست می‌آید، پس؛

$$۲\sqrt{|۱+۱+۶+۲+m|}=۶\Rightarrow۴|۱۰+m|=۳۶\Rightarrow۱۰+m=\pm۹\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=-۱۹\end{cases}$$

$m=-۱$ غیرقابل قبول است، چون به ازای آن نقطه‌ی A، خارج دایره خواهد بود.

۱۲- گزینه‌ی (۱) با توجه به شکل داریم؛



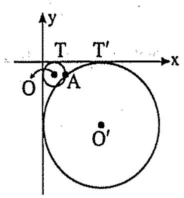
$$S_{OTAT'}=۲S_{OTA}$$

پس کافی است مساحت مثلث OTA را به‌دست آوریم.

$$\begin{cases}|OT|=R=\sqrt{۴+۴+۱}=۳\\ |AT|=\sqrt{C(A)}=\sqrt{۴+۱+۸-۴-۱}=۲\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow S_{OTA}=\frac{۱}{۲}\times۳\times۲\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$$

بنابراین $S_{OTAT'}=۶\sqrt{۲}$.

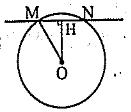
۱۳- گزینه‌ی (۳) دو دایره از نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ عبور کرده و بر محورهای مختصات مماسند، پس مرکز چنین دایره‌هایی به صورت $O(R,-R)$ می‌باشد و معادله‌ی این دایره‌ها به شکل زیر است؛



$$(x-R)^۲+(y+R)^۲=R^۲\xrightarrow{A\in\text{دایره}}(۲-R)^۲+(-۱+R)^۲=R^۲\Rightarrow۴+R^۲-۴R+۱+R^۲-۲R=R^۲$$

$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰\Rightarrow(R-۵)(R-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}R=۱\Rightarrow O(۱,-۱)\\ R=۵\Rightarrow O'(۵,-۵)\end{cases}\Rightarrow|OO'|=\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}$$

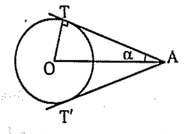
$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=|TT'|=\sqrt{|OO'|^۲-(R-R')^۲}=\sqrt{۳۲-(۵-۱)^۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$



۱۴- گزینه‌ی «۴» ابتدا شعاع دایره را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|OH|=\frac{|۳+۴+۸|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳\ ,\ |MN|=۸\Rightarrow|MH|=۴$$

$$\overset{\Delta}{OMH}:|OM|^۲=|OH|^۲+|MH|^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow|OM|=۵\Rightarrow R=۵$$

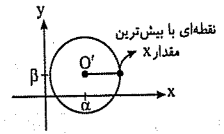


حال اگر از A دو مماس AT و AT′ را بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه زاویه‌ی بین این دو مماس زاویه‌ی رؤیت دایره است. می‌دانیم OA نیمساز $T\hat{A}T'$ است، در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAT داریم:

$$\begin{cases}O(۱,۱)\\A(۸,۰)\end{cases}\Rightarrow|OA|=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}\ ,\ \overset{\Delta}{OAT}:\sin\alpha=\frac{|OT|}{|OA|}=\frac{۵}{\sqrt{۵۰}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$$

پس زاویه‌ی رؤیت دایره از نقطه‌ی A یعنی زاویه‌ی بین دو مماس AT و AT′ برابر $۲\alpha=۹۰^\circ$ می‌باشد.

۱۵- گزینه‌ی «۳» اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره‌ای به شعاع R باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار x برابر $\alpha+R$ می‌باشد.



$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰\Rightarrow O'(۱,-۲)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴+۱۶+۱۶}}{۲}=۳$$

$$\text{بیش‌ترین مقدار } x=\alpha+R=۱+۳=۴$$

پاسخ تشریحی آزمون ۱۲

۱- گزینه‌ی «۲» باید فاصله‌ی مرکز دایره از دو خط $y=mx$ و $۲x+y-۱=۰$ برابر باشد.

$$O'(۱,۰)\Rightarrow|O'H|=|O'H'|\Rightarrow\frac{|m|}{\sqrt{۱+m^۲}}=\frac{|۲-۱|}{\sqrt{۵}}\Rightarrow ۵m^۲=۱+m^۲\Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

۲- گزینه‌ی «۳» می‌دانیم بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A همان قطر دایره می‌باشد. داریم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y-۶=۰\Rightarrow O'(۱,-۲)\ ,\ R=\sqrt{۱+۴+۶}=\sqrt{۱۱}$$

بنابراین طول بزرگ‌ترین وتر گذرنده از A برابر $۲\sqrt{۱۱}$ می‌باشد.

از طرفی طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A را از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$\text{طول وتر مینیمم}=۲\sqrt{|C(A)|}=۲\sqrt{|۱+۱۶-۲-۱۶-۶|}=۲\sqrt{۷}$$

از آن‌جا که $۴\sqrt{۷}<۶<۲\sqrt{۱۱}$ نتیجه می‌شود که دو وتر با این طول می‌توان رسم کرد.

۳- گزینه‌ی «۲» فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس را برابر شعاع دایره قرار می‌دهیم:

$$R=\frac{\sqrt{۴+۱۲}}{۲}=۲$$

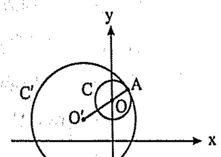
$$O'(۱,۰)\Rightarrow|O'H|=\frac{|m+۲|}{\sqrt{۱+m^۲}}\xrightarrow{|O'H|=R}\frac{|m+۲|}{\sqrt{۱+m^۲}}=۲\Rightarrow(m+۲)^۲=۴(۱+m^۲)\Rightarrow ۳m^۲-۴m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\m=\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

۴- گزینه‌ی «۴» اگر معادلات دو دایره را از هم کم کنیم به‌طوری که جملات $x^۲$ و $y^۲$ حذف شوند، به معادله‌ی مماس مشترک دو دایره خواهیم رسید.

$$\begin{cases}x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰\\\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۱}{۳}y^۲-x-y=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲+y^۲-۲x-۲y=۰\\x^۲+y^۲-۳x-۳y=۰\end{cases}\Rightarrow x+y=۰\Rightarrow m=-۱$$

اگر α زاویه‌ی این خط با محور xها باشد، آن‌گاه $\tan\alpha=-۱$، پس $\alpha=۱۳۵^\circ$.

۵- گزینه‌ی «۲» ابتدا فرض می‌کنیم مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $O(۰,\beta)$ باشد، اکنون مرکز دایره‌ی C′ را می‌یابیم:



$$C':x^۲+y^۲+۲x-۲y-۶=۰\Rightarrow O'(-۱,۱)$$

می‌دانیم خط‌المرکزین OO′ از نقطه‌ی تماس A عبور می‌کند، پس مرکز O روی خط O′A قرار دارد.

$$m_{O'A}=\frac{۱-۳}{-۱-۱}=۱\Rightarrow O'A\ \text{معادله‌ی خط}:y-۱=۱(x+۱)\Rightarrow y=x+۲$$

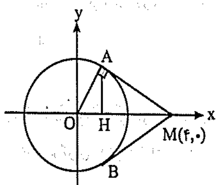
$$O\in(O'A\ \text{خط})\Rightarrow\beta=۲\Rightarrow O(۰,۲)\ ,\ R=|OA|=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

۶- گزینه‌ی «۳» اگر $A=(۲,-۱)$ و $B=(۱,-۲)$، آن‌گاه بنابر فرض تست داریم:

$$|AM|=\sqrt{۲}|BM|\Rightarrow\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۱)^۲}=\sqrt{۲}\sqrt{(x-۱)^۲+(y+۲)^۲}\Rightarrow x^۲+۴-۴x+y^۲+۱+۲y=۲(x^۲+۱-۲x+y^۲+۴+۴y)\Rightarrow x^۲+y^۲+۶y+۵=۰$$

مکان هندسی موردنظر، دایره‌ای به مرکز $O(۰,-۳)$ و شعاع $۲=\frac{\sqrt{۳۶-۲۰}}{۲}$ می‌باشد.

۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به شکل $|AB|=۲|AH|$، بنابراین باید طول AH را به‌دست آوریم. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM داریم:



$$|AH|\times|OM|=|OA|\times|AM|\quad(۱)$$

پس باید طول AM را به‌دست آوریم:

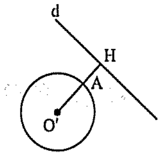
$$\overset{\Delta}{OAM}:|AM|=\sqrt{|OM|^۲-|OA|^۲}=\sqrt{۱۶-۴}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

با جای‌گذاری این مقدار در رابطه‌ی (۱) داریم:

$$|AH|\times۴=۲\times۲\sqrt{۳}\Rightarrow|AH|=\sqrt{۳}$$

در نتیجه $|AB|=۲|AH|=۲\sqrt{۳}$.

۸- گزینه‌ی «۲» با توجه به شکل، کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره تا خط d برابر $|AH|=|O'H|-R$ می‌باشد.



$$x^۲+y^۲=۲x\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x=۰\Rightarrow O'(۱,۰)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴}}{۲}=۱$$

$$|O'H|=\frac{|۳+۰+۷|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\ ,\ \text{کم‌ترین فاصله}=|O'H|-R=۲-۱=۱$$

۹- گزینه‌ی «۱» بنابر فرض، نقاط تلاقی خط $x+۲y-۴=۰$ با محورهای مختصات، دو سر قطر این دایره است.

$$x+۲y-۴=۰\xrightarrow{x=۰}y=۲\Rightarrow M(۰,۲)\ ,\ x+۲y-۴=۰\xrightarrow{y=۰}x=۴\Rightarrow N(۴,۰)$$

$$\begin{cases}۲R=|MN|=\sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow R=\sqrt{۵}\\\text{مرکز دایره}\ O'=\frac{M+N}{۲}=(۲,۱)\end{cases}\Rightarrow\ \text{معادله‌ی دایره}:(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

حال باید موقعیت نقطه‌ی $A(۲,۳)$ نسبت به این دایره را مشخص کنیم:

$$C(A)=(۲-۲)^۲+(۳-۱)^۲-۵=-۱<۰$$

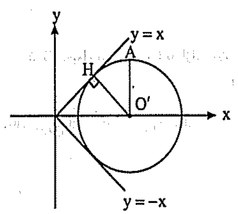
بنابراین نقطه‌ی A درون دایره قرار دارد و از آن نمی‌توان مماسی بر این دایره رسم کرد.

۱۰- گزینه‌ی «۳» دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس درونی هستند هرگاه $|OO'|=|R-R'|$.

$$\begin{cases}C:(x-m)^۲+y^۲=۹\Rightarrow O(m,۰)\ ,\ R=۳\\C':x^۲+y^۲-۸y-۴۸=۰\Rightarrow O'(۰,۴)\ ,\ R'=\frac{\sqrt{۶۴+۴\times۴۸}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴(۱+۳)}}{۲}=۸\end{cases}\Rightarrow|OO'|=\sqrt{m^۲+۱۶}$$

$$|OO'|=|R-R'|\Rightarrow\sqrt{m^۲+۱۶}=|۳-۸|\Rightarrow m^۲+۱۶=۲۵\Rightarrow m^۲=۹\Rightarrow m=\pm۳$$

۱۱- گزینه‌ی «۴» فرض کنیم A نقطه‌ی $(۲,\sqrt{۲})$ باشد. معادلات نیمساز ناحیه‌های اول و چهارم به صورت $y=x$ و $y=-x$ است. مسلماً مرکز دایره‌ای که به این دو نیمساز مماس است روی محور xها قرار دارد. فرض کنیم $O'(\alpha,۰)$ مرکز دایره باشد، در این صورت باید $|O'H|=|O'A|$.



$$|O'A|=\sqrt{(\alpha-۲)^۲+۲}\ ,\ |O'H|=\frac{|\alpha|}{\sqrt{۲}}$$

$$|O'A|=|O'H|\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۲)^۲+۲}=\frac{|\alpha|}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\alpha^۲+۴-۴\alpha+۲=\frac{\alpha^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow\alpha^۲-۸\alpha+۱۲=۰\Rightarrow(\alpha-۶)(\alpha-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۲\Rightarrow R=|O'H|=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow ۲R=۲\sqrt{۲}\\\alpha=۶\Rightarrow R=|O'H|=\frac{۶}{\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow ۲R=۶\sqrt{۲}\end{cases}$$

۱۲- گزینه‌ی ۴ مرکز دایره روی خط $x+y=2$ قرار دارد. فرض کنیم مختصات مرکز به صورت $O'(\alpha,2-\alpha)$ باشد. چون دایره بر خط $y=1-2x$ مماس است، پس فاصله‌ی O' تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$|O'H|=\sqrt{5}\Rightarrow\frac{|2-\alpha-1+2\alpha|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}\Rightarrow|\alpha+1|=5\Rightarrow\begin{cases}\alpha+1=5\Rightarrow\alpha=4\\ \alpha+1=-5\Rightarrow\alpha=-6\end{cases}$$

از آن‌جا که مرکز دایره در ربع چهارم قرار دارد، پس طول مرکز باید مثبت باشد، یعنی $\alpha=4$ قابل‌قبول است. بنابراین $O'(4,-2)$ مرکز دایره‌ی به شعاع $\sqrt{5}$ است.

$$(x-4)^2+(y+2)^2=5:\text{معادله ی دایره}$$

گزینه دو

۱۳- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره‌ای که بر محورهای مختصات مماس است روی نیمسازهای $y=x$ و $y=-x$ قرار دارد. پس نقطه‌ی تلاقی این دو نیمساز با خط‌المرکزین $y-2x+6=0$، مختصات مرکز دایره‌های موردنظر می‌باشد.

$$\begin{cases}y-2x+6=0\\ y=x\end{cases}\Rightarrow y-2y+6=0\Rightarrow y=6,\ x=6\Rightarrow O(6,6),\ R=6$$
$$\begin{cases}y-2x+6=0\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow -x-2x+6=0\Rightarrow x=2,\ y=-2\Rightarrow O'(2,-2),\ R'=2$$
$$\Rightarrow |OO'|=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی}=\sqrt{|OO'|^2-(R+R')^2}=\sqrt{80-64}=\sqrt{16}=4$$

قلم‌چی

۱۴- گزینه‌ی ۲ مرکز دایره باید در معادله‌ی خط $2y-x=1$ صدق کند.

$$x^2+y^2-2mx+(m-1)y=6\Rightarrow O'(m,-\frac{m-1}{2})$$

$$O'\in\text{خط}\Rightarrow -m+1-m=1\Rightarrow m=0\Rightarrow x^2+y^2-y=6\ ,\ R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{1+24}}{2}=\frac{5}{2}$$

۱۵- گزینه‌ی ۲ خطی که از مرکز دایره عبور کند بر دایره عمود است، پس $O'(1,b)$ در معادله‌ی خط $x-y+1=0$ صدق می‌کند.

$$1-b+1=0\Rightarrow b=2\Rightarrow O'(1,2)$$

مسلماً فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس $2x+y+1=0$ برابر شعاع دایره است.

$$R=|O'H|=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\quad,\quad (x-1)^2+(y-2)^2=5:\text{معادله‌ی دایره}$$

در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $(0,4)$ در این معادله صدق می‌کند.

پاسخ تشریحی آزمون ۱۳

۱- گزینه‌ی ۲ بیضی از مبدأ مختصات می‌گذرد، بنابراین $(0,0)$ در معادله‌ی بیضی صدق می‌کند. داریم:

$$a^2=a\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=1\end{cases}$$

$a=0$ قابل‌قبول نیست، زیرا به ازای آن جمله‌ی x^2 حذف می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

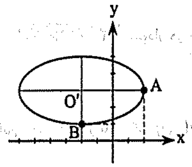
$$a=1\Rightarrow x^2+2y^2-3x+2y=0$$

حال خروج از مرکز بیضی را محاسبه می‌کنیم:

$$e=\sqrt{1-\frac{\text{ضریب کوچک‌تر } x^2 \text{ و } y^2}{\text{ضریب بزرگ‌تر } x^2 \text{ و } y^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲- گزینه‌ی ۲ بنابر فرض تست داریم:

$$S_{BA'F}=3S_{BAF}\Rightarrow\frac{1}{2}|OB|\times|FA'|=3(\frac{1}{2}|OB|\times|FA|)\Rightarrow|FA'|=3|FA|\Rightarrow a+c=3(a-c)\Rightarrow 2a=4c\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$$



۳- گزینه‌ی ۳ بیضی افقی است و مرکز آن $O'(-2,3)$ می‌باشد.

$$a=|O'A|=4\quad,\quad b=|O'B|=2\Rightarrow c^2=a^2-b^2=16-4=12\Rightarrow c=2\sqrt{3}$$

مختصات کانون‌های بیضی افقی به صورت زیر است:

$$F(c+\alpha,\beta)=(2\sqrt{3}-2,3)\quad,\quad F'(-c+\alpha,\beta)=(-2\sqrt{3}-2,3)$$

۴- گزینه‌ی ۲ راه‌حل اول: ابتدا معادله‌ی بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$x^2+2y^2-2x-8y=k^2\Rightarrow(x^2-2x+1)+2(y^2-4y+4)=k^2+1+8\Rightarrow(x-1)^2+2(y-2)^2=k^2+9\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{k^2+9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{k^2+9}{2}}=1$$

بدیهی است که $k^2+9>\frac{k^2+9}{2}$، پس خواهیم داشت:

$$a^2=k^2+9\quad,\quad b^2=\frac{k^2+9}{2}\Rightarrow c^2=\frac{k^2+9}{2}$$

از طرفی $O'(1,2)$ مرکز بیضی است، پس $c=|O'F|=3$، بنابراین $k^2+9=18$. داریم:

$$a^2=k^2+9=18\Rightarrow a=3\sqrt{2}\Rightarrow 2a=6\sqrt{2}$$

راه‌حل دوم: ابتدا با مشتق‌گیری، مرکز بیضی را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x,y)=x^2+2y^2-2x-8-k^2=0\Rightarrow\begin{cases}f'_x=0\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1\\ f'_y=0\Rightarrow 4y-8=0\Rightarrow y=2\end{cases}\Rightarrow O'(1,2)\Rightarrow c=|O'F|=3$$

$$e=\sqrt{1-\frac{\text{ضریب کوچک‌تر } x^2 \text{ و } y^2}{\text{ضریب بزرگ‌تر } x^2 \text{ و } y^2}}\Rightarrow\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{3}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=3\sqrt{2}\Rightarrow 2a=6\sqrt{2}$$

۵- گزینه‌ی ۲ ابتدا مقادر a، b و c را می‌یابیم:

$$4x^2+9y^2=72\Rightarrow\frac{x^2}{\frac{72}{4}}+\frac{y^2}{\frac{72}{9}}=1\Rightarrow\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1\Rightarrow a^2=18\ ,\ b^2=8\ ,\ c^2=a^2-b^2=10\Rightarrow c=\sqrt{10}$$

مستطیل MNQP دارای طول اضلاع $|MN|=2c$ و $|NQ|=\frac{2b^2}{a}$ است. پس داریم:

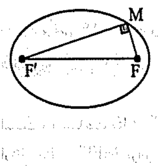
$$S_{MNQP}=2c\times\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2c}{a}=\frac{4\times8\times\sqrt{10}}{\sqrt{18}}=\frac{32\sqrt{10}}{3\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{20}}{3\times2}=\frac{32\sqrt{5}}{3}$$

۶- گزینه‌ی ۳ می‌دانیم $|FA'|=a+c$ و $|FA|=a-c$. از طرفی معادله‌ی بیضی به صورت $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=1$ است، پس:

$$a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\quad,\quad b^2=\frac{1}{9}\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

داریم:

$$|FA|\times|FA'|=(a+c)(a-c)=a^2-c^2=b^2=\frac{1}{9}$$



۷- گزینه‌ی ۴ چون $MF\perp MF'$، پس مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$|MF|^2+|MF'|^2=|FF'|^2\Rightarrow|MF|^2+|MF'|^2=4c^2\quad(1)$$

$$M\in\text{بیضی}\Rightarrow|MF|+|MF'|=2a\xrightarrow{\text{توان ۲ رساندن}}|MF|^2+|MF'|^2+2|MF|\times|MF'|=4a^2$$

$$\xrightarrow{(1)}4c^2+2|MF|\times|MF'|=4a^2\Rightarrow 2|MF|\times|MF'|=4(a^2-c^2)\Rightarrow|MF|\times|MF'|=2b^2$$

۸- گزینه‌ی ۳ فاصله‌ی مرکز بیضی تا کانون برابر c می‌باشد، پس $c=3$. از طرفی فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی بیضی تا کانون آن برابر $a+c$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases}c=3\\ a+c=9\end{cases}\Rightarrow a=6\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

۹- گزینه‌ی ۴ ضرایب x^2 و y^2 برابر نیست، پس معادله‌ی داده شده معادله‌ی یک دایره نمی‌تواند باشد.

$$2x^2+3y^2+4x-6y+9=0\Rightarrow 2(x^2+2x)+3(y^2-2y)+9=0\Rightarrow 2((x+1)^2-1)+3((y-1)^2-1)+9=0\Rightarrow 2(x+1)^2+3(y-1)^2=-4$$

این رابطه هیچ‌گاه برقرار نیست، پس معادله‌ی فوق تهی می‌باشد.