۱.گزینه ۴

نکته: در دنباله‌ی همو گرافیک $\left\{\dfrac{an+b}{cn+d}\right\}$ داریم:

۱) اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از یک بوده و $ad-bc>0$ باشد، دنباله صعودی است.

۲) اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از یک بوده و $ad-bc<0$ باشد، دنباله نزولی است.

$$\begin{cases} \text{زوج } n : a_n = \dfrac{n+2}{n+1} \Rightarrow a_2 = \dfrac{4}{3} \;,\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \xrightarrow{\text{دنباله نزولی است}} a_n \in (1\,,\,\dfrac{4}{3}] \quad I \\ \text{فرد } n : a_n = \dfrac{-n+2}{n+1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1}{2} \;,\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1 \xrightarrow{\text{دنباله نزولی است}} a_n \in (-1\,,\,\dfrac{1}{2}] \quad II \end{cases}$$

$$I \cup II \Rightarrow a_n \in (-1,\, \frac{4}{3}] \Rightarrow b-a = \frac{7}{3}$$

۲.گزینه ۱ روش اول)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{((n+1)-(n+2))(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{((2n+1)-(2n-1))(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2\sqrt{2n}}{4\sqrt{n}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم) رادیکال‌های صورت و مخرج را در $\sqrt{n}$ ضرب می‌کنیم تا زیر رادیکال‌ها درجه‌ی دو شوند. و سپس از هم ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+\frac{1}{2})-(n+1)}{\sqrt{2}(n+\frac{1}{4})-\sqrt{2}(n-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

یادآوری: هم‌ارزی رادیکال‌ها:

$$\lim \sqrt[p]{ax^p+bx^{p-1}+\cdots} \underset{x\to\infty}{\simeq} \lim \sqrt[p]{a}\left|x+\frac{b}{ap}\right|$$

۳.گزینه ۱

بهترین روش برای حل حدهایی که کسری هستند و $\infty - \infty$ هستند، مخرج مشترک گیری است.

$$\frac{+a)(n+1)-(n+a)(n^2+1)}{(n+a)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a)n^2+(a-1)n}{n^2+(a+1)n+a} = 1-a \to \lim_{n\to\infty} \frac{(1-a)n^2}{n^2} = 1-a$$

$$\Rightarrow 1-a = 2 \Rightarrow a = -1$$

۴.گزینه ۴

به دلیل وجود جمله‌ی $(-1)^n$ باید حالت زوج و فرد جدا محاسبه گردد.

$$\text{زوج } n : a_n = \frac{3n-5}{2n-17} < 0 \Rightarrow \frac{5}{3} < n < \frac{17}{2} \xrightarrow[\text{زوج } n]{n\in N} n \in \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\text{فرد } n : a_n = \frac{۵ - ۳n}{۲n - ۱۷} < ۰ \Rightarrow n > \frac{۱۷}{۲} \text{ یا } n < \frac{۵}{۳} \xrightarrow[\text{فرد } n]{n \in N} n \in \{۱, ۹, ۱۱, ۱۳, \cdots, ۴۹\}$$

پس دنباله، در پنجاه جمله‌ی اول، جمعاً ۲۶ جمله‌ی منفی دارد.

.۵گزینه ۱

$$\lim_{n\to\infty} [\log \frac{۲n-۱}{۲n+۳}] = \lim_{n\to\infty} [\log \frac{۲n+۳-۴}{۲n+۳}] = \lim_{n\to\infty} [\log(۱ - \frac{۴}{۲n+۳})] = [\log ۱^-] = [۰^-] = -۱$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{۲}{n} = \lim_{n\to\infty} n(\frac{۲}{n}) = ۲$$

می‌دانیم اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ ، $x > \sin x$ می‌باشد، بنابراین به ازای nهای خیلی بزرگ $\sin \frac{۲}{n} < \frac{۲}{n}$ سپس :

$$n \sin \frac{۲}{n} < ۲$$

$$\lim_{n\to\infty} [n \sin \frac{۲}{n}] = [۲^-] = ۱$$

.۶گزینه ۱

راه اول:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳+۳} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳} = ۰ \qquad (*)$$

$$-۱ \leq \cos n! \leq ۱ \Rightarrow -\frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳+۳} \leq \frac{\sqrt[۳]{n} \cdot \cos\ n!}{n^۳+۳} \leq \frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳+۳}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (-\frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳+۳}) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n} \cdot \cos\ n!}{n^۳+۳} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳+۳} \xrightarrow{(*)} ۰ \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n} \cdot \cos n!}{n^۳+۳} \leq ۰$$

راه دوم: باتوجه به قضیه رشد می‌دانیم که $n^۳ > \sqrt[۳]{n}$ است پس: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[۳]{n}}{n^۳} = ۰$

.۷گزینه ۴

$$= \frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{an^b} = \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{an^b} = \frac{n^۲+n}{۲an^b} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲+n}{۲an^b} = ۵ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{۲an^b} = ۵$$

شرط برقراری حد فوق این است که:

$$\begin{cases} b = ۲ \\ \frac{۱}{۲a} = ۵ \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۰} \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{۱}{۵}$$

.۸گزینه ۱ در توابع و دنباله‌های کسری برای محاسبه حد بی‌نهایت می‌توانیم از قانون پر توان استفاده کنیم.
یعنی هر عبارت هم‌ارز جمله‌ای است که توان یا قدرت بیشتری دارد.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+۱)!}{(n+۲)\times n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+۱)\times n!}{(n+۲)\times n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+۱}{n+۲} = \frac{n}{n} = ۱$$

$$b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{۲(n!)}{n!} = ۲ \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \cdot b_n + ۱}{b_n - a_n} = \frac{۱\times۲+۱}{۲-۱} = ۳$$

۹.گزینه ۲

$$a_n = n\sin\frac{n\pi}{۲}$$

$a_۱ = ۱, a_۲ = ۰, a_۳ = -۳, a_۴ = ۰, a_۵ = ۵, \cdots, a_{۷۹} = -۷۹, a_{۸۰} = ۰$ جملات زوج صفر هستند. بنابراین مجموع جملات دنباله‌ی فوق برابر است با مجموع جملات دنباله‌ی $۱, -۳, ۵, -۷, ۹, \cdots, -۷۹$ دنباله‌ی مذکور ۴۰ جمله دارد.

$$\underbrace{۱+(-۳)}_{-۲}+\underbrace{۵-۷}_{-۲}+\underbrace{۹-۱۱}_{-۲}\cdots+\underbrace{۷۷-۷۹}_{-۲} = \frac{۴۰}{۲}(-۲) = -۴۰$$

۱۰.گزینه ۲

$$a_n < ۰/۹۹۶ \Rightarrow ۱+\frac{\sin\frac{n\pi}{۲}}{n^۲} < ۰/۹۹۶ \Rightarrow \frac{\sin\frac{n\pi}{۲}}{n^۲} < -\frac{۴}{۱۰۰۰}$$

اگر $\sin\frac{n\pi}{۲}$ برابر صفر یا یک باشد، نامعادله غیر ممکن است پس $\sin\frac{n\pi}{۲} = -۱$ است.

$$\frac{-۱}{n^۲} < \frac{-۴}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{n^۲} > \frac{۴}{۱۰۰۰} \Rightarrow n^۲ < ۲۵۰ \Rightarrow n < ۱۵/۸۱$$

$$n \leq ۱۵$$

از طرفی برای این که $\sin\frac{n\pi}{۲} = -۱$ برقرار باشد باید $n = ۴k+۳ (k \in Z)$ باشد، پس:

$n \in \{۳, ۷, ۱۱, ۱۵\} \Rightarrow$ ۴ جمله وجود دارد.

۱۱.گزینه ۱

ابتدا تبدیل جمع به ضرب را می نویسیم:

$$\cos p - \cos q = -۲\sin(\frac{p-q}{۲})\sin(\frac{p+q}{۲})$$

$$a_n = \cos\sqrt{n+۱} - \cos\sqrt{n} = -۲\sin(\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{۲})\sin(\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{۲})$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} -۲\sin(\frac{۱}{۲(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})})\sin(\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{۲}) = -۲\times ۰ \times (\text{کراندار}) = ۰$$

توجه کنید که:

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}{۲(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}+۱-\cancel{n}}{۲(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})} = \frac{۱}{۲(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}$$

۱۲.گزینه ۲

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - n) = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^۲+۲n}-n = \lim_{n\to+\infty}\frac{۲n}{\sqrt{n^۲+۲n}+n} = ۱$$

پس همگرا به ۱ و گزینه ۲ درست است.

۱۳.گزینه ۲

$$a_n = \frac{۲^{n+۱}+(-۱)^n}{۲^n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim\frac{۲^{n+۱}}{۲^n} = ۲ \quad \cos n\pi = (-۱)^n$$

$$|\frac{۲^{n+۱}+(-۱)^n}{۲^n} - ۲| < \frac{۱}{۱۰۰} \to ۲^n > ۱۰۰ \to n \geq ۷$$

پس حداقل مقدار n عدد ۷ است.

۱۴.گزینه ۴

$$n \to \text{زوج} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+k}{n} = ۱$$
$$n \to \text{فرد} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n+k}{n+۲} = ۲$$

حال برای اینکه مقدار جزء صحیح حدها برابر شوند باید

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+k}{n} = ۱^+ \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{۲n+k}{n+۲} = ۲^-$ شود، بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{n+k}{n} \geq ۱ \to n+k \geq n \to k \geq ۰ \\ \frac{۲n+k}{n+۲} < ۲ \to ۲n+k < ۲n+۴ \to k < ۴ \end{cases} \Rightarrow \quad ۰ \leq k < ۴$$

۱۵.گزینه ۳ می‌دانیم a_n همگرا به $\frac{k}{۲}$ است. برای آنکه $[a_n]$ همگرا به ۲ باشد، باید $۲ \leq \frac{k}{۲} \leq ۳$ باشد، پس $۴ \leq k \leq ۶$ است.

۱) به ازای $k = ۴$، دنباله‌ی $a_n = \frac{۴n+۱}{۲n+۳}$ با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ همگرا است (زیرا a_n صعودی است)، بنابراین $[a_n]$ به ۱ همگراست.

۲) به ازای $k = ۵$، دنباله‌ی $a_n = \frac{۵n+۱}{۲n+۳}$ همگرا به $\frac{۵}{۲}$ و $[a_n]$ همگرا به ۲ است.

۳) به ازای $k = ۶$، دنباله‌ی $a_n = \frac{۶n+۱}{۲n+۳}$ با مقادیر کمتر از ۳ به ۳ همگراست (زیرا a_n صعودی است)، بنابراین $[a_n]$ به ۲ همگراست.

پس جواب‌های قابل قبول برای k عبارتند از: $k = ۵$ و $k = ۶$ که جمع آن‌ها برابر ۱۱ می‌باشد.

۱۶.گزینه ۴

ابتدا عدد همگرایی دنباله‌ی موردنظر را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۳n^۲ - ۲}{n^۲+۲} = ۳$$

می‌بایست فاصله جملات دنباله‌ی از عدد همگرایی خود کم‌تر از ۰٫۰۱ باشد، بنابراین:

$$|a_n - L| < \varepsilon \to |a_n - ۳| < ۰٫۰۱ \Rightarrow \left|\frac{۳n^۲-۲}{n^۲+۲} - ۳\right| = \left|\frac{۳n^۲ - ۲ - ۳n^۲ - ۶}{n^۲+۲}\right|$$
$$= \frac{۸}{n^۲+۲} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow ۸۰۰ < n^۲+۲ \Rightarrow n^۲ > ۷۹۸ \Rightarrow n \geq ۲۹$$

۱۷.گزینه ۳ می‌دانیم: $\cos n\pi = (-۱)^n$

$$a_n = n - \left[\frac{n^۲+(-۱)^n}{n+۲}\right]$$

زوج $n : a_n = n - \left[\frac{n^۲+۱}{n+۲}\right] :$

$$\begin{array}{l|l} n^۲+۱ & \underline{n+۲} \\ \underline{-n^۲-۲n} & n-۲ \\ -۲n+۱ & \\ \underline{۲n+۴} & \\ ۵ & \end{array} \Rightarrow a_n = n - \left[n-۲+\frac{۵}{n+۲}\right] \Rightarrow a_n = n-n+۲-\left[\frac{۵}{n+۲}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

فرد $n : a_n = n - \left[\frac{n^۲-۱}{n+۲}\right] :$

$$\begin{array}{l|l} n^۲-۱ & \underline{n+۲} \\ \underline{-n^۲-۲n} & n-۲ \\ -۲n-۱ & \\ \underline{۲n+۴} & \\ ۳ & \end{array} \Rightarrow a_n = n - \left[n-۲+\frac{۳}{n+۲}\right] \Rightarrow a_n = n-n+۲-\left[\frac{۳}{n+۲}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = ۲$$

پس $\{a_n\}$ همگرا به ۲ است.

۱۸.گزینه ۳   می‌دانیم در دنباله فیبوناتچی، $a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n$ ، داریم:
طرفین را با هم جمع می‌کنیم :

$$\begin{cases} \cancel{a}_۳ = a_۲ + a_۱ \\ \cancel{a}_۴ = \cancel{a_۳} + a_۲ \\ \cancel{a}_۵ = \cancel{a_۴} + a_۳ \\ \quad\vdots \\ \cancel{a}_{۱۳۹۶} = \cancel{a}_{۱۳۹۵} + a_{۱۳۹۴} \\ a_{۱۳۹۷} = \cancel{a}_{۱۳۹۶} + a_{۱۳۹۵} \end{cases}$$

$$a_{۱۳۹۷} = a_۲ + (a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_{۱۳۹۵})$$
$$\Rightarrow a_{۱۳۹۷} = ۱ + (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۳۹۵})$$
$$\Rightarrow a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۳۹۵} = a_{۱۳۹۷} - ۱$$

۱۹.گزینه ۲   ابتدا عدد همگرایی این دنباله را می‌یابیم.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۲n\tan^{-۱}(-n)}{\pi n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۲\tan^{-۱}(-n)}{\pi} = \frac{۲(\frac{-\pi}{۲})}{\pi} = -۱$$

باتوجه به تعریف زیر دنباله اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. آن گاه $\lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = L$ و $\lim_{n\to\infty} a_{۲n} = L$. لذا:

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n^۳} + a_{n+۱} + ۲a_n) = -۱-۱-۲ = -۴$$

۲۰.گزینه ۲   هر چهار دنباله ابهام $\infty - \infty$ دارند و باید در مزدوج ضرب و تقسیم شوند.

گزینه‌ی «۱» : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-n-۲}{\sqrt{n}+\sqrt{n+۲}} = \frac{-۲}{+\infty} = ۰$

گزینه‌ی «۲» : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{۵n+۱}-\sqrt{۳n+۲} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{۵n}-\sqrt{۳n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{۵}-\sqrt{۳})(\sqrt{n}) = +\infty$

گزینه‌ی «۳» : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^۲+۵n}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^۲+۵n-n^۲}{\sqrt{n^۲+۵n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۵n}{۲n} = \frac{۵}{۲}$

گزینه‌ی «۴» : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{۱}{۲}$