پاسخنامه دیفرانسیل ۴۰۸

تاریخ : ۲۵ مرداد ۹۶ 　　　　　　　　　　　　　　　 دبیرستان علامه حلی تهران

۱.گزینه ۲

تعریف: گوییم $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی M وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $n \geq M$ ، $|a_n - l| < \varepsilon$ باشد.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2n-1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{20} \Rightarrow \left|\frac{-7}{n+3}\right| < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{7}{n+3} < \frac{1}{20}$$
$$\Rightarrow n+3 > 140 \Rightarrow n > 137 \Rightarrow n \geq 138 \Rightarrow n_0 \text{ حداقل} = 138$$

۲.گزینه ۳ 　با کمی دقت متوجه می‌شویم که مقادیر $[\frac{15}{n}]$ از جمله پانزدهم به بعد برابر صفر است چون به ازای اعداد $n > 15$ ، $\frac{15}{n}$ کوچکتر ۱ می‌شوند و نیز دنباله‌ی $\sin\frac{n\pi}{2}$ به ازای اعداد زوج صفر است بنابراین داریم:

$$+0+(-5)+0+3+0+(-2)+0+\cancel{1}+0+\cancel{(-1)}+(0)+\cancel{(1)}+0+(-1)+0+0+0\cdots+0$$
$$= 15-5+3-2 = 11$$

۳.گزینه ۳

$$\text{نکته:}\ \sqrt{an^2+bn+c}\ \underset{n\to\infty}{\sim}\ \sqrt{a}\left(n+\frac{b}{2a}\right)$$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n-(n+1) = -1$$

طبق فرض داریم:

$$n+1| < \frac{1}{20} \Rightarrow \left|n-\sqrt{n^2+2n}+1\right| < \frac{1}{20} \Rightarrow (n+1)-\sqrt{n^2+2n} < \frac{1}{20} \Rightarrow \left(n+1-\frac{1}{20}\right)^2 < n^2+2n$$
$$\Rightarrow (n+1)^2 + \frac{1}{400} - \frac{1}{10}(n+1) < n^2+2n \Rightarrow 1+\frac{1}{400} < \frac{1}{10}(n+1) \Rightarrow n+1 > 10+\frac{1}{40}$$
$$\Rightarrow n > 9+\frac{1}{40} \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq 10$$

بنابراین حداقل n_0 ، برابر ۱۰ است.

۴.گزینه ۲

$$|a_n - 2| < \frac{1}{20} \to 2-\frac{1}{200} < a_n < 2+\frac{1}{20}$$

پس دنباله‌ی a_n کران دار است امّا نمی‌توان نتیجه گرفت که حتماً همگراست چون ممکن است که بدلیل نوسانی بودن کران دار باشد. و نیز ممکن است به عددی غیر از ۲ همگرا باشد پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۵.گزینه ۲

$$a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \qquad \cos n\pi = (-1)^n$$
$$\left|\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n} - 2\right| < \frac{1}{100} \to 2^n > 100 \to n \geq 7$$

پس حداقل مقدار n عدد ۷ است.

۶.گزینه ۲

$$\lim_{n\to+\infty}\log_{۲}^{\frac{n}{n^{۲}+۶۴}}=\lim_{n\to+\infty}\log_{۲}^{\frac{n}{n^{۲}}}=\lim_{n\to+\infty}\log_{۲}^{\frac{۱}{n}}=\log_{۲}^{(۰^{+})}=-\infty$$ دنباله واگراست

در اینگونه مسائل وقتی دنباله واگراست بهتر است به صورت نامعادله حل شود یعنی:

$$\log_{۲}^{\frac{n}{n^{۲}+۶۴}}<-۴\Rightarrow\frac{n}{n^{۲}+۶۴}<۲^{-۴}\Rightarrow n^{۲}+۶۴>۱۶n\Rightarrow(n-۸)^{۲}>۰$$

رابطه‌ی فوق فقط به‌ازای $n=۸$ برقرار نیست، پس برای $n\geq۹$ جملات دنباله از ۴- کوچک است.

۷.گزینه ۲

$$a_{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_{n}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}$$

حال باید نامعادله‌ی $\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۹۸}$ را حل کنیم، داریم:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}-\frac{۱}{۲}\right|=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

زیرا عبارت داخل قدر مطلق عددی منفی است. بنابراین نامعادله‌ی $\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}-\frac{۱}{۲}\right|<\frac{۱}{۹۸}$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۱}{۹۸}\Rightarrow\frac{۴۸}{۹۸}<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}\Rightarrow\frac{۹۸}{۴۸}>\frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow\frac{۴۹}{۲۴}>\frac{\sqrt{n+۱}}{\sqrt{n}}+۱\Rightarrow\frac{۲۵}{۲۴}>\frac{\sqrt{n+۱}}{\sqrt{n}}\Rightarrow$$ دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\frac{۶۲۵}{۵۷۶}>\frac{n+۱}{n}\Rightarrow۶۲۵n>۵۷۶n+۵۷۶\Rightarrow n>\frac{۵۷۶}{۴۹}=۱۱/\cdots\Rightarrow n\geq[۱۱/\cdots]+۱\Rightarrow\min(n_{۰})=۱۲$$

۸.گزینه ۴

نکته: $\sin u \underset{u\to۰}{\sim} u\ ,\ \cos u \underset{u\to۰}{\sim} ۱-\frac{u^{۲}}{۲}$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: $\lim_{n\to\infty}n\cos\frac{n\pi}{۲}\xrightarrow{n=۴k}\lim_{k\to\infty}۴k\cos۲k\pi=+\infty$ ×

گزینه‌ی ۲: $\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{n\pi}{۲}\xrightarrow{n=۴k+۱}\lim_{k\to\infty}(۴k+۱)\sin(۲k\pi+\frac{\pi}{۲})=+\infty$ ×

گزینه‌ی ۳: $\lim_{n\to\infty}n\cos\frac{۲}{n\pi}\overset{\text{نکته}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}n(۱-\frac{۲}{n^{۲}\pi^{۲}})=+\infty$ ×

گزینه‌ی ۴: $\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{۲}{n\pi}\overset{\text{نکته}}{=\!=}\lim_{n\to\infty}n(\frac{۲}{n\pi})=\frac{۲}{\pi}$ ✓

برای رد گزینه‌های ۱ و ۲ می‌توانیم جمله‌نویسی هم بکنیم.

۹.گزینه ۳ حد این دنباله یک است.

$$\left|\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}-۱\right|<۰/۱\Rightarrow\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}-۱<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}<\frac{۱۱}{۱۰}\Rightarrow۱+\frac{۲}{n}<\frac{۱۲۱}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{n}<\frac{۲۱}{۱۰۰}\Rightarrow n>\frac{۲۰۰}{۲۱}\Rightarrow n\geq\left[\frac{۲۰۰}{۲۱}\right]+۱\Rightarrow n\geq۱۰$$

۱۰.گزینه ۳

ابتدا حد دنباله را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

فاصله‌ی اعداد دنباله‌ی $\left\{ \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} \right\}$ از عدد ۲ باید کم‌تر از $\frac{1}{40}$ باشد، پس داریم:

$$\left|\frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} - 2\right| < \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{7}{3 + 2^{n-1}} < \frac{1}{40} \Rightarrow 280 < 3 + 2^{n-1} \Rightarrow 277 < 2^{n-1} \Rightarrow 2^8 < 277 < 2^9$$

عدد طبیعی است $n \Rightarrow n-1 \geq 9 \Rightarrow n \geq 10$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار n_0، ۱۰ است.

۱۱.گزینه ۳ نکته: اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی مانند n_0 وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geq n_0$ شرط $|a_n - \ell|$ برقرار باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. بنابراین طبق صورت سوال دنباله‌ی a_n به عدد صفر همگراست.

نکته: اگر b_n دنباله‌ای کراندار و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

طبق فرض $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، بنابراین باتوجه به کرانداری $\sin\frac{n\pi}{3}$ داریم: $\lim_{n\to\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{3} = 0$.

سایر گزینه‌ها الزاماً درست نیستند.

مثال نقض گزینه‌ی ۱: $a_n = \frac{1}{\sqrt{\log n}}$

مثال نقض گزینه‌های ۲ و ۴: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

۱۲.گزینه ۳

ابتدا حد دنباله‌ی $a_n = \frac{2n-5}{3n+2}$ را به دست می‌آوریم:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

باتوجه به فرض داریم:

$$\left|\frac{2n-5}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < 0{,}01 \Rightarrow \left|\frac{6n - 15 - 6n - 4}{3(3n+2)}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{19}{3(3n+2)} < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow 3n + 2 > \frac{1900}{3} \Rightarrow 3n > 631{,}3 \Rightarrow n > 210{,}4 \Rightarrow \min(n_0) = 211$$

۱۳.گزینه ۳ روش اول:

ابتدا ضابطه‌ی داده شده را ساده می کنیم، داریم:

$$a_n = \frac{n-2}{4n} = \frac{n}{4n} - \frac{2}{4n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$$

حال با در نظر گرفتن $n > 31$ یا به طور دقیق تر $n \geq 32$، به ساختن جمله ی عمومی دنباله اقدام می کنیم:

$$n \geq 32 \Rightarrow 2n \geq 64 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{64} \Rightarrow 0 > -\frac{1}{2n} \geq -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{15}{64} \leq a_n < \frac{1}{4}$$

روش دوم:

ابتدا یکنوایی دنباله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$a_n = \frac{n-۲}{۴n} \to a'_n = \frac{۸}{۱۶n^۲} > ۰ \to$ دنباله صعودی است

چون دنباله صعودی است پس جملات دنباله برای $n > ۳۱$ در بازه‌ی $[a_{۳۲}\ ,\ L)$ قرار می‌گیرند که در آن L حد دنباله است.

$$a_{۳۲} = \frac{۳۲-۲}{۴\times ۳۲} = \frac{۳۰}{۴\times ۳۲} = \frac{۱۵}{۶۴}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-۲}{۴n} = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین برای $n > ۳۱$ جملات دنباله در بازه‌ی $[\frac{۱۵}{۶۴}\ ,\ \frac{۱}{۴})$ قرار می‌گیرد.

۱۴.گزینه ۲ ابتدا عدد همگرایی دنباله را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{۲n+\cos n\pi} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{۲n} = \frac{۱}{۲}$$

۱) اگر n زوج باشد، داریم:

$$\left|\frac{n}{۲n+۱} - \frac{۱}{۲}\right| < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲(۲n+۱)} < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow ۲n+۱ > ۱۵ \Rightarrow n > ۷ \Rightarrow n \geq ۸$$

۲) اگر n فرد باشد، داریم:

$$\left|\frac{n}{۲n-۱} - \frac{۱}{۲}\right| < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲(۲n-۱)} < \frac{۱}{۳۰} \Rightarrow ۲n-۱ > ۱۵ \Rightarrow n > ۸ \Rightarrow n \geq ۹$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۸$، روابط فوق برقرار است.

۱۵.گزینه ۲

$$a_n = ۶n - n^۲$$
$$۶n - n^۲ < -۲۰۰۰ \to ۲۰۰۰ < n^۲ - ۶n \to ۲۰۰۰ < (n-۳)^۲ - ۹$$
$$\to ۲۰۰۹ < (n-۳)^۲ \to ۴۴{,}۰۰۰ < n-۳ \to ۴۷{,}۰۰۰ < n$$
$$n \geq [۴۷{,}۰۰۰] + ۱ \to n \geq ۴۸$$

۱۶.گزینه ۱ در دنباله‌ی $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ اگر عدد L وسط بازه نباشد باید بررسی شود که L^+ است یا L^-. اگر L^+ باشد، فاصله‌ی L تا انتهای بازه شعاع است و اگر L^- باشد فاصله‌ی ابتدای بازه تا L شعاع است.

در این مثال جواب حد ۲^- می‌باشد.

بنابراین جملات دنباله در بازه‌ی $(۱{,}۹۷, ۲)$ قرار می‌گیرد. چون $\lim_{n\to+\infty} a_n = ۲$ است پس $\varepsilon = ۰{,}۰۳$ در نظر می گیریم.

$$\left|\frac{۲n}{n+۳} - ۲\right| < \frac{۳}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۶}{n+۳} < \frac{۳}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{n+۳}{۶} > \frac{۱۰۰}{۳} \Rightarrow n > ۱۹۷ \Rightarrow n \geq ۱۹۸$$

۱۷.گزینه ۳

$$n > ۱۷ \to a_n = \frac{۲n+۱}{۳n-۴} \to a'_n = \frac{-۱۱}{(۳n-۴)^۲} > ۰$$

مشتق مثبت است بنابراین دنباله نزولی است و از جمله‌ی هفدهم به بعد هم نزولی می‌باشد و جملات دنباله در بازه‌ی $(\frac{۲}{۳}, a_{۱۸}]$ قرار دارند.

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{۲}{۳}$$

$$a_{۱۸} = \frac{۳۷}{۵۰} = \frac{۷۴}{۱۰۰} \to (\frac{۲}{۳}, \frac{۷۴}{۱۰۰}]$$

۱۸.گزینه ۳

$$۳a_{n+۱} + ۲a_n = ۰ \Rightarrow a_{n+۱} = -\frac{۲}{۳}a_n$$

بنابراین a_n یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱ = ۱$ و قدر نسبت $q = -\frac{۲}{۳}$ است. پس: $a_n = (-\frac{۲}{۳})^{n-۱}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-\frac{۲}{۳})^{n-۱} = ۰$$

باید $n_۰$ را طوری تعیین کنیم که به ازای هر $n \geq n_۰$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\left|(-\frac{۲}{۳})^{n-۱} - ۰\right| < \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^{n-۱} < \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow (\frac{۳}{۲})^{n-۱} > ۱۰ \Rightarrow n-۱ \geq ۶ \Rightarrow n \geq ۷ \Rightarrow n_۰ = ۷ \text{حداقل}$$

۱۹.گزینه ۲ در دنباله a_n داریم:

$$a'_n = \frac{۵(n+۱)-(۵n+۳)}{(n+۱)^۲} = \frac{۵n+۵-۵n-۳}{(n+۱)^۲} = \frac{۲}{(n+۱)^۲} > ۰$$

پس دنباله صعودی است، از طرفی $\lim_{n\to\infty} a_n = ۵$

بنابراین دنباله با مقادیر کمتر از ۵ به ۵ نزدیک می‌شود، یعنی $a_n < ۵$

$$f(x) = \begin{cases} ۳x+۲ & x<۱ \\ x+۳ & x>۲ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{x-۲}{۳} & x<۵ \\ x-۳ & x>۵ \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f^{-۱}(a_n) = f^{-۱}(۵^-) = \frac{۵-۲}{۳} = ۱$$

توجه: برای محاسبه $f^{-۱}(۵^-)$ باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم.

۲۰.گزینه ۱ نکته: $x \to \infty \Rightarrow [x] \sim x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{n}{۲}\right]}{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{۲}}{n+۱} = \frac{۱}{۲}$$

حال باید تعداد nهایی را بیابیم که به ازای آن‌ها داشته باشیم:

$$\left|\frac{\left[\frac{n}{۲}\right]}{n+۱} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰}$$

دو حالت را در نظر می‌گیریم:
حالت اول n زوج باشد.

$$n = ۲k \to \left|\frac{k}{۲k+۱} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰} \to \left|\frac{۱}{۴k+۲}\right| > \frac{۱}{۲۰} \to ۴k+۲ < ۲۰ \to k < \frac{۱۸}{۴} = ۴/۵$$

$\to k = ۱,۲,۳,۴$ چهار جمله

حالت دوم: n فرد باشد.

$$\left|\frac{\left[\frac{۲k-۱}{۲}\right]}{(۲k-h)+۱} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰} \to \left|\frac{\left[k-\frac{۱}{۲}\right]}{۲k} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰}$$

$$\to \left|\frac{k+\left[-\frac{۱}{۲}\right]}{۲k} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰} \to \left|\frac{k-۱}{۲k} - \frac{۱}{۲}\right| > \frac{۱}{۲۰} \to \left|\frac{-۱}{۲k}\right| > \frac{۱}{۲۰}$$

$$\to \frac{۱}{۲k} > \frac{۱}{۲۰} \to ۲k < ۲۰ \to k < ۱۰ \to k = ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹$$ نه جمله

مجموعاً **۱۳** جمله از نقطه همگرایی دنباله، فاصله‌ای بیشتر از $\frac{۱}{۲۰}$ دارند.