۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a'_n = \frac{۴-۳\times۵}{(۳n+۱)^۲} = \frac{-۱۱}{(۳n+۱)} < ۰$$

این دنباله همواره نزولی و همگرا به $\frac{۴}{۳}$ است، لذا:

$$n > ۳۲ \Rightarrow n \geq ۳۳ \Rightarrow a_n \in (\frac{۴}{۳}, a_{۳۳}] \Rightarrow a_n \in (\frac{۴}{۳}, \frac{۱۳۷}{۱۰۰}] \Rightarrow a_n \in (۱/\overline{۳}, ۱/۳۷]$$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

گزاره‌ی بیان شده در صورت مسئله:

$$\forall k > ۰ \quad \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow a_n < -k$$

تعریف حد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ است، پس:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱+|a_n|}{a_n} \xlongequal{a_n < -k} \lim_{n\to\infty} \frac{۱-a_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{a_n} - ۱) = ۰ - ۱ = -۱$$

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\times۲^n + ۴\times۲^n}{۲n\times۲^n + ۲} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۴)\times۲^n}{۲n\times۲^n + ۲} \cong \lim_{n\to\infty} \frac{(n+۴)}{۲n} = \frac{۱}{۲}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$|a_n - ۲| = \left|۲ - \frac{(-۱)^n}{n} - ۲\right| < \frac{۱}{۲۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۲۰۰} \Rightarrow n > ۲۰۰ \Rightarrow n \geq ۲۰۱$$

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

کافی است حد $\sqrt{n^۲+۴n} - n$ را بیابیم:

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^۲+۴n} - n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^۲+۴n) - n^۲}{\sqrt{n^۲-۴n} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۴n}{\sqrt{n^۲-۴n+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۴n}{n+n} = ۲$$

پس حد دنباله‌ی داده شده برابر ۱ است.

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a_n = \log(۲n+۱) + \log(۵n+۱) - ۲\log n = \log\big((۲n+۱)(۵n+۱)\big) - \log n^۲ = \log\frac{(۲n+۱)(۵n+۱)}{n^۲} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \log ۱۰ = ۱$$

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲n-۱}{n+۳} = ۲$$

$$\left|\frac{۲n-۱}{n+۳} - ۲\right| < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \left|\frac{-۷}{n+۳}\right| < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۷}{n+۳} < \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow n+۳ > ۱۴۰ \Rightarrow n > ۱۳۷ \Rightarrow n \geq ۱۳۸ \Rightarrow n_۰$$ حداقل ۱۳۸

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^۲+a)(n+۱) - (n+a)(n^۲+۱)}{(n+a)(n+۱)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(۱-a)n^۲ + (a-۱)n}{n^۲ + (a+۱)n + a} = ۱-a \Rightarrow ۱-a = ۲ \Rightarrow a = -۱$$

۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a_n = \frac{(-۱)^n}{n} \quad , \quad b_n : ۱,۰,۱,۰,\ldots \qquad \Rightarrow \quad [a_n] + b_n = ۰ \qquad : ۱$$ ل ن قض گ زی نه‌ی

$$a_n = ۱ \quad , \quad b_n : \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \ldots \quad \Rightarrow \quad a_n + [b_n] = ۱ \qquad : ۲$$ ل ن قض گ زی نه‌ی

$$a_n = ۱ \quad , \quad b_n : (-۱)^n \qquad \Rightarrow \quad a_n + |b_n| = ۲ \qquad : ۳$$ ل ن قض گ زی نه‌ی

اما در گزینه‌ی ۳ چون $|a_n|$ همگرا و b_n واگراست، $|a_n| + b_n$ واگرا خواهد بود.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

چون گزینه‌ها همه در مورد همگرایی دنباله صحبت می‌کند، لذا فرض می‌کنیم دنباله دنباله‌ی همگراست:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = l$$

$$l = \sqrt{۱۲ + l} \Rightarrow l^۲ - l - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} l = ۴ \\ l = -۳ \ \text{ق} \end{cases}$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به شرط داده شده، دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به صفر است.و کافی است دنباله‌ای که در a_n ضرب می‌شود، کراندار باشد تا حاصل‌ضرب آن‌ها هم همگرا شود. در بین گزینه‌ها، گزینه‌ی ۲ مناسب است.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱: جملات این دنباله بین ۱- و صفر در نوسان است، پس واگراست.

گزینه‌ی ۲:

$$\lim_{n\to+\infty} \log \frac{n}{n^۲ + ۱} = \log(۰^+) = -\infty \Rightarrow \text{واگرا}$$

گزینه‌ی ۳:

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Cos}^{-۱} \frac{۱}{n} = \operatorname{Cos}^{-۱} ۰ = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \text{همگرا}$$

گزینه‌ی ۴:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n + ۱} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n} = \infty \Rightarrow \text{واگرا}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{۲a_n + ۱}{a_n + ۲} = \frac{۲a_n + ۴ - ۳}{a_n + ۲} = ۲ - \frac{۳}{a_n + ۲}$$

این دنباله تنها در صورتی به ۲ همگراست که $\lim_{n\to\infty} \frac{۳}{a_n + ۲} = ۰$ باشد. چنین چیزی فقط وقتی ممکن است که

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$$

در این صورت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{۱ + a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{a_n}} = \frac{۱}{۱ + ۰} = ۱$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a_n=\frac{۲n+\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\Rightarrow a_n=۲+\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=۲$$

$$\lim_{n\to\infty}[a_n]=\lim_{n\to\infty}\left[۲+\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\right]=۲+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\right]$$

واگراست، زیرا:

$$\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\right]=۰ \qquad -۱$$

پس a_n همگراست، اما $[a_n]$ واگراست.

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\log_۲\frac{n}{n^۲+۶۴}<-۴\Rightarrow \frac{n}{n^۲+۶۴}<۲^{-۴}\Rightarrow n^۲+۶۴>۱۶n\Rightarrow (n-۸)^۲>۰$$

رابطه‌ی فوق فقط به‌ازای $n=۸$ برقرار نیست، پس برای $n\geq ۹$ جملات دنباله از ۴- کوچک‌تر است.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا قسمت‌های صحیح را از داخل براکت خارج می‌کنیم:

$$a_n=n-\left[\frac{n^۲-۱-۶}{n+۱}\right]=n-\left[n-۱-\frac{۶}{n+۱}\right]=n-\left(n-۱+\left[-\frac{۶}{n+۱}\right]\right)\Rightarrow a_n=۱-\left[-\frac{۶}{n+۱}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=۱-[۰^-]=۱-(-۱)=۲$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{۵}{۳-۴x}>۳\Rightarrow \frac{۵}{۳-\frac{۴n}{n+۱}}>۳\Rightarrow \frac{۵n+۵}{۳-n}>۳\Rightarrow \frac{۵n+۵}{۳-n}-۳>۰\Rightarrow \frac{۸n-۴}{۳-n}>۰\Rightarrow \frac{۱}{۲}<n<۳\Rightarrow n=۱\ ,\ ۲$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

حد این دنباله یک است و با مقادیر بیشتر از یک هم به یک میل می‌کند.

$$\left|\sqrt{۱+\frac{۲}{n}}-۱\right|<۰/۱\Rightarrow \sqrt{۱+\frac{۲}{n}}-۱<\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow \sqrt{۱+\frac{۲}{n}}<\frac{۱۱}{۱۰}\Rightarrow ۱+\frac{۲}{n}<\frac{۱۲۱}{۱۰۰}\Rightarrow \frac{۲}{n}<\frac{۲۱}{۱۰۰}\Rightarrow n>\frac{۲۰۰}{۲۱}\Rightarrow n\geq ۱۰$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

رادیکال‌های صورت و مخرج را در $\sqrt{n}$ ضرب می‌کنیم تا زیر رادیکال‌ها درجه‌ی دو شوند.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^۲+n}-\sqrt{n^۲+۲n}}{\sqrt{۲n^۲+n}-\sqrt{۲n^۲-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\frac{۱}{۲})-(n+۱)}{\sqrt{۲}(n+\frac{۱}{۴})-\sqrt{۲}(n-\frac{۱}{۴})}=\frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left\{\begin{array}{l} n\ \text{زوج}: a_n=\frac{n+۲}{n+۱}\Rightarrow a_۲=\frac{۴}{۳}\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=۱\xrightarrow[\text{است}]{\text{دنباله نزولی}}a_n\in(۱,\frac{۴}{۳}] \\ n\ \text{فرد}: a_n=\frac{-n+۲}{n+۱}\Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۲}\quad ,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=-۱\xrightarrow[\text{است}]{\text{دنباله نزولی}}a_n\in(-۱,\frac{۱}{۲}] \end{array}\right.\Rightarrow a_n\in(-۱,\frac{۴}{۳}]\Rightarrow b-a=\frac{۷}{۳}$$