تست دوره‌ای گسسته- همنهشتی و کاربردها:

۱- در رابطه همنهشتی به پیمانه ۳۹ عدد ۳۵۱ با کدام عدد داده شده در یک کلاس همنهشتی قرار دارد؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۱۶ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۸

۲- به ازای کدام مقدار a عدد چهار رقمی $\overline{83a4}$ به کلاس هم ارزی $[2]_{13}$ تعلق دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳- در همنهشتی به پیمانه m چهار عدد a و ۶۷ و ۱۶۵ و ۲۴۹ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند رقم یکان کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه $\mathbb{Z}$ به بیش‌ترین تعداد کلاس‌های هم ارزی افراز شود کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۴- باقیمانده‌ی 3^{54} بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۱۴

۵- باقیمانده‌ی عدد 3^{84} بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۷

۶- باقی‌مانده تقسیم 5^{67} بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۱۳ ۴) ۲

۷- باقیمانده عدد $3^{24}-2^{24}$ بر ۶۵ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱۵ ۴) ۴۳

۸- باقیمانده عدد $51^{39}+a$ بر ۱۶ برابر یک است. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷

۹- دو عدد ۲۹ و ۲۵۷ به پیمانه‌ی m $(m \neq 1)$ همنهشت هستند. اگر $(m, 18)=1$ ، باقیمانده m^{m+1} بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱۶ ۳) ۳ ۴) ۱۳

۱۰- اگر $7 \mid 13^n+6$ آنگاه:

۱) n اول است ۲) n عدد طبیعی فرد است ۳) n عدد طبیعی زوج است ۴) n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد.

۱۱- رقم یکان عدد $(1!)^2+(2!)^3+(3!)^4+\dots+(31!)^{32}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۲- اگر $a^3-a^2 \equiv a^2 \pmod{m}$ و $(m, a-2)=1$ آن‌گاه:

۱) $m \mid a$ ۲) $m \mid a+1$ ۳) $m \mid a^2$ ۴) $m \mid a-1$

۱۳- اگر $2a^3-3a^2+1 \equiv 3a^3-2a^2+1 \pmod{m}$ ، $(a, m)=1$ آنگاه:

۱) $m \mid a^2$ ۲) $m \mid a-1$ ۳) $m \mid a+1$ ۴) $m \mid a^3-a^2$

۱۴- تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a که در رابطه همنهشتی $18a+17 \overset{13}{\equiv} a-12$ صدق می‌کننـد کـدام است؟

۱) ۸۹۷ ۲) ۸۹۸ ۳) ۸۸۶ ۴) ۸۸۹

۱۵- رقم یکان بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی a که در رابطه همنهشتی $22a \overset{13}{\equiv} 1$ صدق می کند کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۶- کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۸۰۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۳۰۰ و ۵۰۰ ریالی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۷- اگر p عددی اول باشد و $p|a$ کدامیک از معادلات سیاله زیر قطعاً دارای جواب است؟(b,a دو عدد صحیح دلخواه هستند.)

۱) $(p-1)!x+py=1$ ۲) $(p^2-1)x+(p^2+1)y=1$

۳) $a^2x+by=p$ ۴) $(p+2)x+py=1$

۱۸- معادله سیاله $35x+34y=3434$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹- معادله‌ی سیاله خطی $18x+7y=720$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۰- چند نقطه با طول و عرض صحیح روی منحنی $3y=x^2-23$ وجود دارد ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

۲۱- معادله سیاله‌ی $21x+13y=910$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۲- اگر $(a,30)=1$ آن‌گاه $(240, a^4-1)$ کدام است؟

۱) ۸۰ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴۰

۲۳- باقیمانده تقسیم عدد 7^{139} بر ۷۱ کدام است ؟

۱) ۳۱ ۲) ۴۱ ۳) ۵۱ ۴) ۶۱

۲۴- اگر $a \overset{12}{\equiv} 5$ و $a \overset{8}{\equiv} 1$ آنگاه باقیمانده a بر ۲۴ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

۲۵- رقم یکان بزرگترین عدد طبیعی سه رقمی a که در رابطه همنهشتی $22a \overset{13}{\equiv} 1$ صدق می کند کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۸

۲۶- چه تعداد از گزاره های زیر همواره صحیح است ؟ ($a,b \in \mathbb{Z}$ $m,n,c \in N$)

الف) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{mc}{\equiv} bc$ ب) $(p-2)! \overset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow$ اگر P اول باشد

ج) $(a+b)^n \overset{n}{\equiv} a^n+b^n$ د) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۷- در رابطه همنهشتی به پیمانه ۳۹ عدد ۳۵۱ با کدام عدد داده شده در یک کلاس همنهشتی قرار دارد؟

۱) ۱۱۵ ۲) ۱۱۶ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۸

۲۸- باقیمانده $7^{35}+a$ بر ۲۶ صفر است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

۲۹- کم‌ترین تعداد تمبر برای بسته‌ای که نیاز به ۱۹۵۰۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۱۹۰ و ۱۵۰ ریالی کدام است؟

۱) ۱۰۱ ۲) ۱۰۲ ۳) ۱۰۳ ۴) ۱۰۶

۳۰- دو عدد ۱۹ و ۱۹۳ در یک دسته‌ی هم‌ارزی به پیمانه‌ی m قرار دارند. اگر $(m,۶)=۱\ ,\ m\neq ۱$، باقیمانده عدد $m^{m+۱}$ بـر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۱- باقیمانده عدد $۵۱^{۳۹}+a$ بر ۱۶ برابر یک است. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷

۳۲- اگر $a^n=۱۰k+۳$ آن‌گاه رقم یکان $a^{n+۸}+a^{n+۴}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۱ ۴

۳۳- معادله‌ی سیاله خطی $۱۸x+۷y=۷۲۰$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۴) ۵ ۴) ۶

۳۴- پست خانه‌ای فقط تمبرهای ۱۴۰ و ۲۱۰ ریالی برای فروش دارد. برای چسباندن تمبر به بسته‌ای که برای آن ۴۹۷۰ ریال تمبر لازم است، کمترین تعداد تمبر مورد نیاز کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۳۵- تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی a که در رابطه همنهشتی $۱۸a+۱۷\overset{۱۳}{\equiv}a-۱۲$ صدق می‌کننـد کـدام است؟

۱) ۸۹۷ ۲) ۸۹۸ ۳) ۸۸۶ ۴) ۸۸۹

۳۶- دورقم سمت راست عدد $۳^{۴۶}$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۹ ۳) ۳۹ ۴) ۴۹

۳۷- باقیمانده تقسیم عدد $(۴۱۵۷۵۷۴۴)^{۳۰۲}-۱$ بر ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۵۸ ۲) ۷ ۳) ۵۷ ۴) ۸

۳۸- به ازای چند مقدار a از مجموعه $\{۱,۲,۳,\cdots,۱۰۰\}$ معادله سیاله $ax+۴۵y=۳$ دارای جواب است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۱ ۳) ۵۹ ۴) ۶۱

۳۹- به ازای چند مقدار x عدد $\overline{۱۵۳۳xx}$ مضرب ۸ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ همنهشتی و کاربردها:

۱- گزینه ۳ پاسخ است .

می‌دانیم دو عدد در یک کلاس همنهشتی قرار دارند هرگاه با هم به پیمانه مورد نظر همنهشت باشند، یعنی تفاضلشان مضربی از پیمانه باشد. به پیمانه ۳۹ عدد ۳۵۱ با عدد ۱۱۷ همنهشت است زیرا

$$۳۵۱-۱۱۷=۲۳۴=۶\times ۳۹ \Rightarrow ۳۹ \mid ۳۵۱-۱۱۷ \Rightarrow ۳۵۱ \equiv ۱۱۷ \ (\text{پیمانه } ۳۹)$$

نکته:

۱) دو عدد به پیمانه m در یک دسته همنهشتی قرار دارند هرگاه به پیمانه‌ی m با هم همنهشت باشند.

۲) همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ به معنی $m \mid a-b$ است.

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\overline{۸۳a۴} \in [۲]_{۱۳} \Rightarrow \overline{۸۳a۴} \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۴+۱۰a+۳۰۰+۸۰۰۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \xrightarrow{(۱۰۰۰ \overset{۱۳}{\equiv} -۱)} ۴+۱۰a+۳۰۰-۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow ۴+۱۰a+۳۰۰ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۱۰a \overset{۱۳}{\equiv} -۲۹۴ \Rightarrow -۳a \overset{۱۳}{\equiv} -۲۹۴$$

$$\Rightarrow a \overset{۱۳}{\equiv} ۹۸ \Rightarrow a \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \xrightarrow[a]{\text{با توجه به رقم بودن}} \boxed{a=۷}$$

نکته: قاعده تقسیم پذیری بر ۱۳ به صورت زیر است:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \dots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۳}{\equiv} \overline{a_۲ a_۱ a_۰} - \overline{a_۵ a_۴ a_۳} + \overline{a_۸ a_۷ a_۶} - \dots$$

نکته: همواره داریم:

$$a \in [b]_m \Leftrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

۳- گزینه ۴ پاسخ است .

چون اعداد a و ۶۷ و ۱۶۵ و ۲۴۹ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند پس دو به دو با یکدیگر همنهشت هستند بنابراین داریم:

$$۲۴۹ \overset{m}{\equiv} ۱۶۵ \Rightarrow m \mid ۸۴$$

$$۱۶۵ \overset{m}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow m \mid ۹۸$$

$$۲۴۹ \overset{m}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow m \mid ۱۸۲$$

چون $۲^۲\times ۳\times ۷=۸۴$, $۲\times ۷^۲=۹۸$, $۲\times ۷\times ۱۳=۱۸۲$ و می‌خواهیم حداکثر تعداد کلاس‌های هم ارزی ایجاد شود پس باید m ماکزیمم باشد (چون تعداد کلاس‌های هم ارزی ایجاد شده در رابطه همنهشتی به پیمانه m دقیقاً برابر m است) و بنابراین باید $m=۲\times ۷$ یعنی $m=۱۴$ باشد پس داریم:

$$a \overset{۱۴}{\equiv} ۶۷ \Rightarrow a \overset{۱۴}{\equiv} -۳ \Rightarrow a=۱۴K-۳$$

$$\xrightarrow{k=۸} a=۱۰۹ \Rightarrow \text{رقم یکان} = ۹$$

نکته: تمامی اعدادی که در یک کلاس هم‌ارزی در همنهشتی به پیمانه m قرار دارند اعدادی هستند که با یکدیگر به پیمانه m همنهشت هستند.

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

r = باقیمانده‌ی 3^{54} بر ۱۷ $\Leftrightarrow 3^{54} \overset{17}{\equiv} r\ ,\ 0 \le r < 17$

$$3^{54} \overset{17}{\equiv} \left(3^3\right)^{18} \underset{27 \overset{17}{\equiv} -7}{\overset{17}{\equiv}} (-7)^{18} \overset{17}{\equiv} \left((-7)^2\right)^9 \overset{17}{\equiv} 49^9 \underset{49 \overset{17}{\equiv} -2}{\overset{17}{\equiv}} (-2)^9 \overset{17}{\equiv} \left((-2)^4\right)^2 \cdot (-2) \overset{17}{\equiv} (16)^2(-2) \overset{17}{\equiv} (-1)^2(-2) \overset{17}{\equiv} -2 \overset{17}{\equiv} -2+17 \overset{17}{\equiv} 15$$

$\Rightarrow$ باقیمانده‌ی 3^{54} بر ۱۷ = ۱۵

راه دیگر:

اگر p اول باشد و $p \nmid a$ آنگاه $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$. در اینجا ۱۷ اول است و $17 \nmid 3 \Leftarrow 3^{16} \overset{17}{\equiv} 1$

$$3^{54} \overset{17}{\equiv} \left(3^{16}\right)^3 3^6 \overset{17}{\equiv} 1^3 \times \left(3^3\right)^2 \overset{17}{\equiv} (27)^2 \overset{17}{\equiv} (-7)^2 \overset{17}{\equiv} 49 \overset{17}{\equiv} 15$$

نکته:

۱) فرض کنید m یک عدد طبیعی است. باقیمانده‌ی عدد صحیح a بر m برابر r است اگر و تنها اگر $a \overset{m}{\equiv} r\ ,\ 0 \le r < m$

۲) در یافتن باقیمانده بر اساس همنهشتی می‌توان به جای پایه در اعداد توان دار و به جای عوامل ضرب یا جمع یا تفریق همنهشت آنها به همان پیمانه را قرار داد.

۳) $a \overset{m}{\equiv} b$ اگر و تنها اگر $m \mid a-b$.

۴) در همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌توان مضربی از پیمانه را به b یا به a اضافه کرد یعنی مثلاً از همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌توان همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b+mk$ را نتیجه گرفت.

۵- گزینه ۲ پاسخ است .

مطابق معمول باید از توانهای کوچک شروع کنیم و به تدریج توان <u>۸۴</u> را بسازیم:

$$3^{84} \overset{17}{\equiv} \left(3^4\right)^{21} \overset{17}{\equiv} (81)^{21} \overset{17}{\equiv} (-4)^{21} \overset{17}{\equiv} \left((-4)^2\right)^{10} \times (-4) \overset{17}{\equiv} (16)^{10} \times (-4)$$
$$\overset{17}{\equiv} (-1)^{10}(-4) \overset{17}{\equiv} -4 \overset{17}{\equiv} 13$$

راه دیگر: می‌دانیم اگر P اول باشد و $P \nmid a$ آن‌گاه $a^{P-1} \overset{P}{\equiv} 1$.

$$3^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{84} \overset{17}{\equiv} \left(3^{16}\right)^5 \times 3^4 \overset{17}{\equiv} 1^5 \times 3^4 \overset{17}{\equiv} 81 \overset{17}{\equiv} 13$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

برای یافتن باقیمانده‌ی 5^{67} بر ۱۷ باید عدد r را چنان پیدا کنیم که: $5^{67}\overset{17}{\equiv}r\,,\,0\le r<17$

$$5^{67}\overset{17}{\equiv}\left(5^{2}\right)^{33}\times 5\overset{17}{\equiv}(25)^{33}\times 5\underset{\substack{\uparrow\\ 25\overset{17}{\equiv}8}}{\overset{17}{\equiv}}8^{33}\times 5\overset{17}{\equiv}\left(8^{2}\right)^{16}\times 8\times 5\overset{17}{\equiv}(64)^{16}\times 40\underset{\substack{\uparrow\\ 64\overset{17}{\equiv}-4\,,\,40\overset{17}{\equiv}6}}{\overset{17}{\equiv}}(-4)^{16}\times 6$$

$$\overset{17}{\equiv}\left((-4)^{2}\right)^{8}\times 6\overset{17}{\equiv}(16)^{8}\times 6\underset{\substack{\uparrow\\ 16\overset{17}{\equiv}-1}}{\overset{17}{\equiv}}(-1)^{8}\times 6\overset{17}{\equiv}1\times 6\overset{17}{\equiv}6\Rightarrow 5^{67}\overset{17}{\equiv}6\Rightarrow$$ باقیمانده‌ی 5^{67} بر ۱۷ $=6$

راه حل دوم: قضیه فِرما می‌گوید: اگر P اول باشد و $P\nmid a$ آنگاه $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$. اگر $p=17$ را در نظر بگیریم داریم: $5^{16}\overset{17}{\equiv}1$

$$5^{67}\overset{17}{\equiv}\left(5^{16}\right)^{4}5^{3}\underset{\substack{\uparrow\\ 5^{16}\overset{17}{\equiv}1}}{\overset{17}{\equiv}}1^{4}\times 5^{3}\overset{17}{\equiv}125\overset{7}{\equiv}6\Rightarrow$$ باقیمانده‌ی 5^{67} بر ۱۷ $=6$

نکته:

۱-اگر $a\overset{m}{\equiv}r$ و $0\le r<m$ آنگاه $r=$ باقیمانده‌ی a بر m.

۲- در یافتن باقیمانده‌ی یک عدد توان دار بر یک عدد از طریق همنهشتی می‌توان به جای عوامل جمع و تفریق و ضرب و پایه‌ی توان همنهشت آن‌ها را به پیمانه همان همنهشتی قرار داد.

۳- $a\overset{m}{\equiv}b$ اگر و تنها اگر $m\mid a-b$، مثلاً $64\overset{17}{\equiv}-4$ درست است زیرا: $17\mid\underbrace{64-(-4)}_{68}$.

۷- گزینه ۱ پاسخ است .

$$3^{24}-2^{24}\overset{65}{\equiv}\left(3^{4}\right)^{6}-\left(2^{4}\right)^{6}\overset{65}{\equiv}(81)^{6}-(16)^{6}\overset{65}{\equiv}16^{6}-16^{6}\overset{65}{\equiv}0$$

$\Rightarrow$ باقیمانده $3^{24}-2^{24}$ بر ۶۵ $=0$

نکته:

۱) می‌توان در همنهشتی به پیمانه m به جای پایه در اعداد توان دار همنهشت آن را به پیمانه m قرار داد.

۲) می‌توان در همنهشتی به پیمانه m به جای عوامل جمع همنشهت آن‌ها به پیمانه m را قرار داد.

۳) اگر $a\overset{m}{\equiv}r\,,\,0\le r<m$ آن‌گاه باقیمانده a بر m برابر r است.

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$51^{39}+a\overset{16}{\equiv}1\Rightarrow 1=$ باقیمانده $51^{39}+a$ بر ۱۶

$$51^{39}\overset{16}{\equiv}3^{39}\overset{16}{\equiv}\left(3^{4}\right)^{9}\times 3^{3}\overset{16}{\equiv}(81)^{9}\times 3^{3}\overset{16}{\equiv}(1)^{9}3^{3}\overset{16}{\equiv}27\overset{16}{\equiv}11$$

در همنهشتی بالا از همنهشتی‌های $51 \overset{16}{\equiv} 3$ و $81 \overset{16}{\equiv} 1$ استفاده شده است. اکنون داریم:

$5^{39}+a \overset{16}{\equiv} 1 \Rightarrow 11+a \overset{16}{\equiv} 1 \Rightarrow$ کوچکترین عدد طبیعی $a = 6$

نکات:

۱- در یک همنهشتی می‌توان به‌جای یک جمله، همنهشت آن را قرار داد.

۲- در یافتن باقیمانده‌ی اعداد توان‌دار می‌توان به‌جای پایه در عدد توان‌دار همنهشت آن را قرار داد. (صفحه ۵۳ کتاب)

۹- گزینه ۲ پاسخ است .

$$\left.\begin{array}{l} 257 \overset{m}{\equiv} 29 \Rightarrow m \mid 257-29 \Rightarrow m \mid 228 \Rightarrow m \mid 2^2\times 3\times 19 \\ (m\,,18)=1 \Rightarrow \left(m\,,2\times 3^2\right)=1 \Rightarrow 2\nmid m\,,\ 3\nmid m \end{array}\right\} \xrightarrow{m\neq 1} m=19$$

$$m^{m+1} \overset{17}{\equiv} 19^{20} \overset{17}{\equiv} 2^{20} \overset{17}{\equiv} \left(2^4\right)^5 \overset{17}{\equiv} (16)^5 \overset{17}{\equiv} (-1)^5 \overset{17}{\equiv} -1 \overset{17}{\equiv} 16$$

نکته:

۱) همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ به معنی $m \mid a-b$ است.

۲) در همنهشتی به پیمانه m در اعداد توان دار می‌توان به جای پایه‌ها، همنهشت آن‌ها به پیمانه‌ی m را قرار داد.

۳) می‌توان مضارب پیمانه را به یک طرف همنهشتی اضافه یا کم کرد.

۴) اگر $a \overset{m}{\equiv} r\,, 0\leq r<m$ آن‌گاه r باقیمانده ی a بر m است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$7 \mid 13^n+6 \Rightarrow 13^n+6 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow (-1)^n+6 \overset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow (-1)^n \overset{7}{\equiv} -6 \Rightarrow (-1)^n \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow$ باید n زوج باشد

نکته: همواره داریم $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

می‌دانیم که از !۵ به بعد، مضرب ۱۰ هستند $(5!=120)$ پس از !۵ به بعد، رقم یکان همگی صفر است:

$$(1!)^2+(2!)^3+(3!)^4+(4!)^5+\dots+(31!)^{32} \overset{10}{\equiv} (1)^2+(2)^3+(6)^4+(4)^5+(0)+\dots+(0)$$

$$1+8+(36)^2+1024 \overset{10}{\equiv} 1+8+6+4 \overset{10}{\equiv} 19 \overset{10}{\equiv} 9 \Rightarrow \boxed{\text{رقم یکان}=9}$$

نکته : رقم یکان اعداد $k!$ $(k\geq 5)$ برابر صفر است .

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است .

$$a^3-a^2 \overset{m}{\equiv} a^2 \Rightarrow m \mid \left(a^3-a^2\right)-a^2 \Rightarrow m \mid a^3-2a^2 \Rightarrow m \mid a^2(a-2)\,,\ (m\,,a-2)=1$$

$$\xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} m \mid a^2$$

نکته:

۱) همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ به معنی $m \mid a-b$ است.

۲) اگر $(a\,,b)=1\,, a\mid bc$ آن‌گاه $a \mid c$. (لم اقلیدس)

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$۲a^۳ - ۳a^۲ + ۱ \overset{m}{\equiv} ۳a^۳ - ۲a^۲ + ۱ \Rightarrow m \Big| \left(۲a^۳ - ۳a^۲ + ۱\right) - \left(۳a^۳ - ۲a^۲ + ۱\right) \Rightarrow m \Big| -a^۳ - a^۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m \big| a^۳ + a^۲ \Rightarrow m \big| a^۲(a+۱) \\ (a,m) = ۱ \Rightarrow \left(a^۲, m\right) = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} m \big| a+۱$$

نکته:

۱- اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$.

۲- اگر $(a,b)=۱$ آنگاه برای اعداد طبیعی m,n داریم $\left(a^m, b^n\right)=۱$ مثلاً اگر $(a,m)=۱$ می‌توان نتیجه گرفت $\left(a^۲, m\right)=۱$

۳- لم اقلیدس: اگر $a|bc$ و $(a,b)=۱$ آنگاه $a|c$.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$۱۲ - a \overset{۱۳}{\equiv} ۱۸a + ۱۷ \Rightarrow ۱۹a \overset{۱۳}{\equiv} -۵ \Rightarrow ۶a \overset{۱۳}{\equiv} -۵ \Rightarrow$$

$$۶a \overset{۱۳}{\equiv} -۱۸ \Rightarrow a \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \Rightarrow a = ۱۳k - ۳$$

$$\begin{cases} k = ۷۷ \Rightarrow MAX\ a = ۹۹۸ \\ K = ۸ \Rightarrow Min\ a = ۱۰۱ \end{cases} \Rightarrow ۹۹۸ - ۱۰۱ = ۸۹۷$$

نکته: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

نکته: $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \quad , \quad d = (m,c)$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$۲۲a \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۵ \times ۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۶۶ \rightarrow ۲۲a \overset{۱۳}{\equiv} ۶۶ \rightarrow a \overset{۱۳}{\equiv} ۳$$

$\Rightarrow \quad a = ۱۳k + ۳ \rightarrow$ بزرگترین عدد سه رقمی: $۱۳k + ۳ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۳k < ۹۹۷ \Rightarrow k < ۷۶/۷ \Rightarrow k \leq ۷۶$

پس بزرگترین مقدار a به ازای $k = ۷۶$ حاصل می‌شود: $max(a) = ۱۳ \times ۷۶ + ۳ = ۹۹۱$

نکته : برای حل یک معادله همنهشتی به شکل کلی $ax \overset{m}{\equiv} b$ کافیست بجای عدد b همنهشت با b که مضرب a باشد را قرار دهیم سپس رابطه همنهشتی را برعدد a تقسیم کنیم تا ضریب x به ۱ تبدیل شود در این صورت با نوشتن تعریف همنهشتی دسته جواب مربوط به x بدست می آید.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

تعداد تمبرهای لازم ۳۰۰ ریالی را x و ۵۰۰ ریالی را y می‌گیریم. x و y باید در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$۳۰۰x + ۵۰۰y = ۸۸۰۰ \Rightarrow ۳x + ۵y = ۸۸$$

ابتدا یک جواب خاص برای معادله به دست می‌آوریم $x_0=1, y_0=17$ و سپس جواب‌های کلی را می‌نویسیم:

$$(3\,,5)=1\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{1}k+1\\ y=-\frac{3}{1}k+17\end{cases},\ k\in Z\Rightarrow\begin{cases}x=5k+1\\ y=-3k+17\end{cases},\ k\in Z$$

می‌دانیم تعداد تمبرها باید نامنفی باشند یعنی $x\geq 0$ و $y\geq 0$ در نتیجه:

$$\begin{cases}5k+1\geq 0\\ -3k+7\geq 0\end{cases},k\in Z\Rightarrow 0\leq k\leq 2\,,k\in Z$$

از طرفی مجموع تعداد تمبرهای لازم برابر $x+y$ است که بر حسب k به صورت زیر است:

$$x+y=(5k+1)+(-3k+17)=2k+18$$

برای آنکه کمترین مقدار $x+y$ را بدست آوریم با توجه به عبارت $x+y$ بر حسب k در اینجا باید کمترین مقدار k یعنی صفر را قرار دهیم که کمترین تعداد تمبر لازم ۱۸ به دست می‌آید.

نکته:

۱- برای یافتن جواب‌های معادله سیاله $ax+by=c$ ابتدا یک جواب خاص $(x_0\,,y_0)$ برای معادله به دست می‌آوریم و سپس اگر $(a\,,b)=d$ آنگاه جواب‌های کلی معادله را به صورت روبرو می‌نویسیم: $\begin{cases}x=\frac{b}{d}k+x_0\\ y=-\frac{a}{d}k+y_0\end{cases}$, $k\in Z$

۲- برای یافتن جواب‌های نامنفی معادله سیاله $ax+by=c$ ابتدا جواب‌های کلی آن را می‌نویسیم سپس نامعادلات $x\geq 0$ و $y\geq 0$ را بر حسب k حل کرده و اشتراک جواب‌های دو نامعادله را بدست می‌آوریم. به ازای k های به دست آمده جواب‌های نامنفی معادله‌ی سیاله به‌دست می‌آید.

۱۷- گزینه ۱ پاسخ است .

گزینه ۱ جواب است زیرا به ازای هر عدد اول p همواره $((p-1)!\,,p)=1$ (توجه شود که هر عدد اول نسبت به تمامی اعداد طبیعی کوچکتر از خودش و درنتیجه نسبت به حاصلضرب آنها نیز اول است) و بنابراین شرط وجود جواب معادله سیاله برقرار است .

گزینه ۲ نادرست است زیرا به غیر از $p=2$ به ازای هر عدد اول دیگر p^2-1 , p^2+1 هر دو زوج هستند و بنابراین $(p^2-1,p^2+1)=2\nmid 1$ یعنی شرط وجود جواب معادله سیاله برقرار نیست .

گزینه ۳ نادرست است زیرا اگر b مضرب p^2 باشد آنگاه $(a^2,b)=p^2$ خواهد شد و $p^2\nmid p$

گزینه ۴ نادرست است زیرا به ازای $p=2$ خواهیم داشت : $(p+2,\,p)=2$, $2\nmid 1$

نکته : شرط وجود جواب معادله سیاله $ax+by=c$ اینست که $(a,b)|c$ بنابراین اگر $c=1$ باشد معادله سیاله فقط به ازای $(a,b)=1$ دارای جواب خواهد بود .

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است .

$$35x+34y=34\times 101$$

ابتدا یک جواب برای معادله بدست می‌آوریم $x_0=0, y_0=101$. جواب معادله بنا بر قضیه به صورت زیر است:

چون جوابهای طبیعی را می‌خواهیم، باید حدود k را طوری به دست آوریم که x و y مثبت باشند.

$$(35\,,34)=1\Rightarrow\begin{cases}x=34k+0\\ y=-35k+101\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 34k > 0 \\ , \\ -35k + 101 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge 1 \\ , \\ k \le 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \le k \le 2 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 2$$

تعداد جواب‌های طبیعی ۲ تاست. زیرا تعداد k های بدست آمده برای آن‌که x و y طبیعی شوند ۲ تا می‌باشد.

نکته:

۱) اگر (x_0, y_0) یک جواب معادله $ax + by = C$ باشد و $(a, b) = d$ آن‌گاه جواب‌های صحیح معادله $ax + by = C$ از روابط $\begin{cases} x = \frac{b}{d}k + x_0 \\ y = -\frac{a}{d}k + y_0 \end{cases}$ بدست می‌آیند.

۲) برای یافتن جواب‌های طبیعی معادله باید نامعادلات $\begin{cases} \frac{b}{d}k + x_0 > 0 \\ -\frac{a}{d}k + y_0 > 0 \end{cases}$ را به طور هم زمان حل کنیم.

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا یک جواب خاص برای معادله پیدا می‌کنیم: $y_0 = 0$ و $x_0 = 40$ و سپس طبق فرمول‌های کلی جواب معادله را می‌نویسیم:

$$(18, 7) = 1 \Rightarrow \begin{matrix} x = 7K + 40 \\ y = -18K + 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}} \begin{cases} 7K + 40 > 0 \\ -18K > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{40}{7} < K < 0 \Rightarrow K = -1, -2, -3, -4, -5$$

$\Rightarrow x, y$ تعداد جواب‌های طبیعی $= K$ تعداد جواب‌های $= 5$

نکات:

۱- اگر (x_0, y_0) یک جواب معادله سیاله $ax + by = c$ باشد جواب‌های معادله از رابطه $\begin{cases} x = \frac{b}{d}K + x_0 \\ y = -\frac{a}{d}K + y_0 \end{cases}$ به‌دست می‌آیند که در آن $d = (a, b)$ (یعنی d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است) (صفحه ۵۵ کتاب)

۲- برای یافتن جواب‌های طبیعی یک معادله‌ی سیاله باید پس از یافتن جواب‌های کلی x و y نامعادلات $x > 0$ و $y > 0$ را برحسب K با هم حل کنیم.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

راه اول :

$$3y = x^2 - 23 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 23}{3}$$

اگر $x = 3k \Rightarrow x^2 = 3k' \Rightarrow y = \frac{3k' - 23}{3} = k' - \frac{23}{3} \notin Z$

اگر $x \ne 3k \Rightarrow x^2 = 3k' + 1 \Rightarrow y = \frac{3k' + 1 - 23}{3} = k' - \frac{22}{3} \notin Z$

پس به ازای هر مقدار صحیح x، مقدار y غیر صحیح خواهد بود .

راه دوم : $x^2 = 3y + 23 = 3k + 2$

اما عدد مربع کامل به فرم $3k + 2$ نداریم، یعنی اگر عددی به فرم $3k + 2$ باشد، قطعاً مربع کامل نیست .

نکته : اگر عددی مضرب ۳ باشد مربع آن نیز مضرب ۳ خواهد بود و اگر عددی مضرب ۳ نباشد مربع آن به شکل $3k + 1$ خواهد بود .

۲۱- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا یک جواب خاص برای معادله‌ی سیاله $21x + 13y = 910$ به دست می‌آوریم. چون ۹۱۰ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و خارج قسمت آن ۷۰ است می‌توان جواب خاص را به صورت $x_0 = 0\,,\, y_0 = 70$ در نظر گرفت.

سپس بر طبق فرمول جواب کلی معادله را می‌نویسیم:

$$(21\,,13) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{1}k + 0 \\ y = -\frac{21}{1}k + 70 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13k \\ y = -21k + 70 \end{cases}, k \in Z \xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}} \begin{cases} 13k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{13} \\ , \\ -21k + 70 \geq 1 \Rightarrow 21k \leq 69 \Rightarrow k \leq 3/3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq k \leq 3$$

$k \Rightarrow$ تعداد جواب $= 3 \Rightarrow$ تعداد جواب طبیعی $= 3$

نکته:

۱) اگر $(x_0\,,\,y_0)$ یک جواب خاص برای معادله‌ی $ax + by = c$ بوده و $(a\,,\,b) = d$ باشد، جواب کلی معادله سیاله‌ی $ax + by = c$ از روابط $\begin{cases} x = \frac{b}{k}k + x_0 \\ y = -\frac{a}{d}k + y_0 \end{cases}, k \in Z$ به دست می‌آیند.

۲) برای یافتن جواب‌های طبیعی یک معادله سیاله پس از یافتن جواب کلی معادله، نامعادلات $y \geq 1\,,\, x \geq 1$ را بر حسب k حل می‌کنیم و جواب‌های k را به دست می‌آوریم. تعداد جواب‌های k تعداد جواب‌های طبیعی معادله است

۲۲- گزینه ۴ پاسخ است . صفحه ۴۱ تا ۴۷ کتاب

$$30 = 2 \times 3 \times 5\,,\, (a\,,30) = 1 \Rightarrow 2 \nmid a\,,\, 3 \nmid a\,,\, 5 \nmid a$$

$$2 \nmid a \Rightarrow a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4(2x) + 1 = 8q + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = 8k(8k + 2) = 16k(4k + 1) \Rightarrow 16 \mid a^4 - 1 \\ 3 \nmid a \Rightarrow a = 3k \pm 1 \Rightarrow a \overset{3}{\equiv} \pm 1 \Rightarrow a^4 \overset{3}{\equiv} 1 \qquad \Rightarrow 3 \mid a^4 - 1 \\ 5 \nmid a \Rightarrow \begin{cases} a = 5k \pm 1 \\ \text{یا} \\ a = 5k \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \overset{5}{\equiv} \pm 1 \\ \text{یا} \\ a \overset{5}{\equiv} \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 \overset{5}{\equiv} 1 \\ \text{یا} \\ a^4 \overset{5}{\equiv} 16 \end{cases} \Rightarrow a^4 \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow 5 \mid a^4 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [16\,,3\,,5] \mid a^4$$

$$\Rightarrow 240 \mid a^4 - 1 \Rightarrow (240\,,\, a^4 - 1) = 240$$

نکته:

۱) می‌توان طرفین یک همنهشتی را به توان دلخواه رساند.

۲) مضارب مشترک چند عدد مضارب ک.م.م آن چند عدد می‌باشند.

۳) حاصلضرب دو عدد متوالی همواره زوج است.

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.

چون $(7,71)=1 \xRightarrow{\text{طبق قضیه فرما}} 7^{70}\overset{71}{\equiv}1 \xRightarrow{\text{به توان ۲}} 7^{140}\overset{71}{\equiv}1$

چون $7^{140}\overset{71}{\equiv}-70 \xRightarrow[(7,71)=1]{\text{طرفین بر ۷ تقسیم}} 7^{139}\overset{71}{\equiv}-10\overset{71}{\equiv}61 \Rightarrow r=61$

نکته : اگر a عددی صحیح و p عددی اول باشد به طوری که $(a,p)=1$ آنگاه همواره $a^{p-1}\overset{p}{\equiv}1$ (قضیه فرما)

نکته : اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ آنگاه $ac\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}bc$ که در آن $d=(m,c)$ (قضیه تقسیم طرفین همنهشتی بر یک عدد)

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{12}{\equiv}5\overset{12}{\equiv}-7 \\ a\overset{8}{\equiv}1\overset{8}{\equiv}-7 \end{array}\right\} a\overset{[12,8]}{\equiv}-7 \Rightarrow a\overset{24}{\equiv}-7\overset{24}{\equiv}17$$

$$\Rightarrow r=17$$

نکته : اگر $a\overset{m}{\equiv}b$, $a\overset{n}{\equiv}b$ آنگاه $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$22a\overset{13}{\equiv}1\overset{13}{\equiv}1+5\times13\overset{13}{\equiv}66 \rightarrow 22a\overset{13}{\equiv}66 \rightarrow a\overset{13}{\equiv}3$

$\Rightarrow a=13k+3 \rightarrow$ بزرگترین عدد سه رقمی: $13k+3<1000 \Rightarrow 13k<997 \Rightarrow k<76.7 \Rightarrow k\le 76$

پس بزرگترین مقدار a به ازای $k=76$ حاصل می‌شود: $\max(a)=13\times76+3=991$

نکته : برای حل یک معادله همنهشتی به شکل کلی $ax\overset{m}{\equiv}b$ کافیست بجای عدد b همنهشت با b که مضرب a باشد را قرار دهیم سپس رابطه همنهشتی را برعدد a تقسیم کنیم تا ضریب x به ۱ تبدیل شود در این صورت با نوشتن تعریف همنهشتی دسته جواب مربوط به x بدست می آید.

۲۶- گزینه ۲ صحیح است.

گزاره الف همواره صحیح است زیرا :

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a-b=km \xRightarrow[\text{ضرب } C]{\text{طرفین در}} ac-bc=kmc \xRightarrow{\text{طبق تعریف همنهشتی}} ac\overset{mc}{\equiv}bc$$

گزاره ب همواره صحیح است زیرا :

طبق قضیه ویلسون $(p-1)!\overset{p}{\equiv}-1 \Rightarrow (p-1)!\overset{p}{\equiv}p-1 \Rightarrow (p-1)(p-2)!\overset{p}{\equiv}p-1$

$$\xrightarrow[(p,p-1)=1]{\text{طرفین بر } (p-1) \text{ تقسیم}} (p-2)!\overset{p}{\equiv}1$$

گزاره ج همواره صحیح نیست زیرا به عنوان مثال نقض داریم : $(1+2)^6 \overset{6}{\not\equiv} 1^6+2^6$

گزاره د به صورت دو شرطی همواره برقرار نیست به بیان دقیقتر رابطه $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ همواره برقرار است اما عکس آن همواره برقرار نیست زیرا به عنوان مثال نقض داریم : $3^4 \overset{10}{\equiv} 1^4 \not\Rightarrow 3 \overset{10}{\equiv} 1$

نکته : طبق قضیه ویلسون اگر p عددی اول باشد آنگاه همواره داریم $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$

نکته : طبق ویژگیهای رابطه همنهشتی همواره داریم $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ اما عکس این رابطه در حالت کلی برقرار نیست از طرفی رابطه $(a+b)^n \overset{n}{\equiv} a^n + b^n$ نیز در حالت کلی برقرار نیست اما اگر n عددی اول باشد رابطه همواره برقرار خواهد بود یعنی داریم:

$(a+b)^p \overset{p}{\equiv} a^p + b^p$: با فرض اول بودن p

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است .

می‌دانیم دو عدد در یک کلاس همنهشتی قرار دارند هرگاه با هم به پیمانه مورد نظر همنهشت باشند، یعنی تفاضلشان مضربی از پیمانه باشد. به پیمانه ۳۹ عدد ۳۵۱ با عدد ۱۱۷ همنهشت است زیرا

$$351 - 117 = 234 = 6 \times 39 \Rightarrow 39 \mid 351 - 117 \Rightarrow 351 \equiv 117 \quad (\text{پیمانه } 39)$$

نکته:

۱) دو عدد به پیمانه m در یک دسته همنهشتی قرار دارند هرگاه به پیمانه‌ی m با هم همنهشت باشند.

۲) همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ به معنی $m \mid a-b$ است.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است .

$$7^{35} \overset{26}{\equiv} \left(7^2\right)^{17} \times 7 \overset{26}{\equiv} (49)^{17} \times 7 \overset{26}{\equiv} (-3)^{17} \times 7 \overset{26}{\equiv} \left((-3)^3\right)^5 \times (-3)^2 \times 7 \overset{26}{\equiv} (-27)^5 \times 63$$
$$\overset{26}{\equiv} (-1)^5 \times 11 \overset{26}{\equiv} -11 \overset{26}{\equiv} 15$$
$$7^{35} + a \overset{26}{\equiv} \ \Rightarrow 7^{35} + a \overset{26}{\equiv} 15 + a \overset{26}{\equiv} 0 \Rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد طبیعی} = 11$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است .

تعداد تمبر ۱۹۰ ریالی را x و تعداد تمبر ۱۵۰ ریالی را y می‌گیریم. برای چسباندن مبلغ ۱۹۵۰۰ ریال تمبر بر روی پاکت باید x و y در معادله $190x + 150y = 19500$ صدق کنند. بنابراین:

$$\Rightarrow 19x + 15y = 1950 \Rightarrow 19x + 15y = 130 \times 15 \Rightarrow x_0 = 0 \,,\, y_0 = 130$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15k + 0 \\ y = -19k + 130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15k \geq 0 \\ -19k + 130 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 6 \Rightarrow$$

k	۰	۱	...	۶
x	۰	۱۵		۹۰
y	۱۳۰	۱۱۱		۱۶

کم‌ترین تعداد تمبر وقتی حاصل می‌شود که $x = 90$ و $y = 16$ باشد که مجموع تعداد آن‌ها ۱۰۶ است.

نکته:

اگر (x_0 , y_0) یک جواب معادله $ax + by = c$ باشد و $(a , b) = d$ آن‌گاه جواب‌های صحیح معادله $ax + by = c$ از روابط $\begin{cases} x = \dfrac{b}{a}k + x_0 \\ y = \dfrac{a}{d}k + y_0 \end{cases}$ بدست می‌آیند.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$[۱۹۳]=[۱۹]\Rightarrow ۱۹۳\overset{m}{\equiv}۱۹\Rightarrow m\,|\,۱۹۳-۱۹\Rightarrow m\,|\,۱۷۴\ ,\ ۱۷۴=۲\times۳\times۲۹\ ,\ m\neq۱\ ,\ (m,۶)=۱\Rightarrow m=۲۹$$

$$m^{m+1}\overset{۱۳}{\equiv}۲۹^{۳۰}\overset{۱۳}{\equiv}۳^{۳۰}\overset{۱۳}{\equiv}\left(۳^{۳}\right)^{۱۰}\overset{۱۳}{\equiv}(۲۷)^{۱۰}\overset{۱۳}{\equiv}۱^{۱۰}\overset{۱۳}{\equiv}۱\Rightarrow \text{باقیمانده } m^{m+1} \text{ بر } ۱۳=۱$$

در روابط بالا از همنهشتهی‌های روبرو استفاده شده است: $۱\overset{۱۳}{\equiv}۲۷\ ,\ ۳\overset{۱۳}{\equiv}۲۹$

نکات:

۱- به پیمانه‌ی m دو دسته همنهشتی $[a]$ و $[b]$ برابرند اگر و تنها اگر $a\overset{m}{\equiv}b$. (صفحه ۵۱ کتاب)

۲- برای یافتن باقیمانده‌ی عدد a بر عدد m کافی است عدد r را چنان پیدا کنیم که $a\overset{m}{\equiv}r$ و $۰\le r<m$، در این‌صورت r باقیمانده‌ی a بر m است.

۳- در یافتن همنهشت یک عدد توان‌دار می‌توان به‌جای پایه‌ی عدد توان‌دار همنهشت آن را به همان پیمانه قرار داد. (صفحه ۵۳ کتاب)

۳۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$۵۱^{۳۹}+a\overset{۱۶}{\equiv}۱\Rightarrow \text{باقیمانده } ۵۱^{۳۹}+a \text{ بر } ۱۶=۱$$

$$۵۱^{۳۹}\overset{۱۶}{\equiv}۳^{۳۹}\overset{۱۶}{\equiv}\left(۳^{۴}\right)^{۹}\times۳^{۳}\overset{۱۶}{\equiv}(۸۱)^{۹}\times۳^{۳}\overset{۱۶}{\equiv}(۱)^{۹}\,۳^{۳}\overset{۱۶}{\equiv}۲۷\overset{۱۶}{\equiv}۱۱$$

در همنهشتی بالا از همنهشتی‌های $۵۱\overset{۱۶}{\equiv}۳$ و $۸۱\overset{۱۶}{\equiv}۱$ استفاده شده است. اکنون داریم:

$$۵^{۳۹}+a\overset{۱۶}{\equiv}۱\Rightarrow ۱۱+a\overset{۱۶}{\equiv}۱\Rightarrow \text{کوچکترین عدد طبیعی } a=۶$$

نکات:

۱- در یک همنهشتی می‌توان به‌جای یک جمله، همنهشت آن را قرار داد.

۲- در یافتن باقیمانده‌ی اعداد توان‌دار می‌توان به‌جای پایه در عدد توان‌دار همنهشت آن را قرار داد.

۳۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a^{n+۸}\overset{۱۰}{\equiv}a^{n+۴}\overset{۱۰}{\equiv}a^{n}\overset{۱۰}{\equiv}۱۰k+۳\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

$$a^{n+۸}+a^{n+۴}\overset{۱۰}{\equiv}۳+۳\overset{۱۰}{\equiv}۶\Rightarrow \text{رقم یکان } \left(a^{n+۸}+a^{n+۴}\right)=۶$$

نکات:

۱- رقم یکان هر عدد برابر باقیمانده آن عدد بر ۱۰ است.

۲- رقم یکان a^n با رقم یکان $a^{n+۴}$ برابر است. یعنی $a^{n+۴}\overset{۱۰}{\equiv}a^{n}$، این مطلب در کتاب درسی نیامده ولی در کنکور سراسری ۸۳ (تست ۱۵۳) مطرح شده است.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا یک جواب خاص برای معادله پیدا می‌کنیم: $y_{۰}=۰$ و $x_{۰}=۴۰$ و سپس طبق فرمول‌های کلی جواب معادله را می‌نویسیم:

$$(۱۸,۷)=۱\Rightarrow \begin{matrix}x=۷K+۴۰\\ y=-۱۸K+۰\end{matrix}\xrightarrow{\text{جواب‌های طبیعی}}\begin{cases}۷K+۴۰>۰\\ -۱۸K>۰\end{cases}\Rightarrow -\frac{۴۰}{۷}<K<۰\Rightarrow K=-۱,-۲,-۳,-۴,-۵$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی } x,y=\text{تعداد جواب‌های } K=۵$$

نکات:

۱- اگر $(x_\circ,y_\circ)$ یک جواب معادله سیاله $ax+by=c$ باشد جواب‌های معادله از رابطه $\begin{cases}x=\frac{b}{d}K+x_\circ\\ y=-\frac{a}{d}K+y_\circ\end{cases}$ به‌دست می‌آیند که در آن $d=(x,y)$ (یعنی d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است) (صفحه ۵۵ کتاب)

۲- برای یافتن جواب‌های طبیعی یک معادله‌ی سیاله باید پس از یافتن جواب‌های کلـی x و y نامعـادلات $x>\circ$ و $y>\circ$ را برحسب K با هم حل کنیم.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

تعداد تمبر ۱۴۰ ریالی مورد نیاز را x و تعداد تمبر مورد نیاز ۲۱۰ ریالی را y می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$۱۴۰x+۲۱۰y=۴۹۷۰\Rightarrow ۲x+۳y=۷۱$$

یک جواب خاص برای معادله به‌دست می‌آوریم $y_\circ=۷$ $x_\circ=۲۵$. جواب‌های کلی معادله عبارتند از:

$$(۲,۳)=۱\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۳}{۱}K+۲۵\\ y=-\frac{۲}{۱}K+۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۳K+۲۵\\ y=-۲K+۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳K+۲۵\ge\circ\\ -۲K+۷\ge\circ\end{cases}\Rightarrow-\frac{۲۵}{۳}\le K\le\frac{۷}{۲}$$
$$\Rightarrow -۸\le K\le ۳$$

چون می‌خواهیم کمترین مقدار تعداد تمبر مورد نیاز را به‌دست آوریم باید $x+y$ را در نظر بگیریم:

$$x+y=۳K+۲۵-۲K+۷\Rightarrow x+y=K+۳۲\Rightarrow \text{کمترین مقدار } x+y=-۸+۳۲=۲۴$$

نکات:

۱- اگر $(x_\circ,y_\circ)$ یک جواب معادله سیاله $ax+by=c$ بـوده و $(a,b)=d$ باشـد آن‌گـاه کلیـه جـواب‌هـای معادلـه سـیاله $ax+by=c$ از رابطه $\begin{cases}x=\frac{b}{d}K+x_\circ\\ y=-\frac{a}{d}K+y_\circ\end{cases}$ به‌دست می‌آید.

۲- برای یافتن تعداد تمبر لازم برای چسباندن روی پاکت باید معادلات $x\ge\circ$ و $y\ge\circ$ را برحسب K با هم حـل کنـیم. (در کتاب به‌جای تمبر، بُن آمده است)

۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$۱۲-a\overset{۱۳}{\equiv}۱۸a+۱۷\Rightarrow ۱۹a\overset{۱۳}{\equiv}-۵\Rightarrow ۶a\overset{۱۳}{\equiv}-۵\Rightarrow$$
$$۶a\overset{۱۳}{\equiv}-۱۸\Rightarrow a\overset{۱۳}{\equiv}-۳\Rightarrow a=۱۳k-۳$$
$$\begin{cases}k=۷۷\Rightarrow MAX\ a=۹۹۸\\ K=۸\Rightarrow Min\ a=۱۰۱\end{cases}\Rightarrow ۹۹۸-۱۰۱=۸۹۷$$

نکته: $a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$

نکته: $ac\overset{m}{\equiv}bc\Rightarrow a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b$

که در رابطه فوق $d=(m\,,c)$ می‌باشد.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا توسط تابع حسابی اویلر $\varphi(۱۰۰)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\varphi(۱۰۰) = \varphi\left(۵^۲ \times ۲^۲\right) = \varphi\left(۵^۲\right)\varphi\left(۲^۲\right) = \left(۵^۲ - ۵\right)\left(۲^۲ - ۲\right) = ۲۰ \times ۲ = ۴۰$$

طبق قضیه اویلر $\xrightarrow{(۳\,,\,۱۰۰)=۱} ۳^{\varphi(۱۰۰)} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$

از طرفی داریم : $۳^۴ \overset{۱۰۰}{\equiv} -۱۹ \Rightarrow ۳^۶ \overset{۱۰۰}{\equiv} -۱۷۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۹$

$$\begin{cases} ۳^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \\ ۳^{۶} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۹ \end{cases} \Rightarrow ۳^{۴۶} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow \text{دو رقم سمت راست} = ۲۹$$

نکته: اگر n عدد طبیعی بوده و $n = P_۱^{\alpha_۱}P_۲^{\alpha_۲}\cdots P_k^{\alpha_k}$ آن‌گاه داریم: $\varphi(n) = n\left(۱-\frac{۱}{P_۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{P_۲}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{p_k}\right)$

نکته: قضیه اویلر :اگر a عدد صحیحی بوده و m عددی طبیعی باشد و $(a\,,m)=۱$ آن‌گاه همواره داریم: $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} ۱$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ است .

$$۴۱۵۷۵۷۴۴ \overset{۱۰۱}{\equiv} ۴۴ - ۵۷ + ۵۷ - ۴۱ \overset{۱۰۱}{\equiv} ۳ \Rightarrow (۴۱۵۷۵۷۴۴)^{۳۰۲} - ۱ \overset{۱۰۱}{\equiv} ۳^{۳۰۲} - ۱$$

طبق قضیه فرما $\xrightarrow{(۳\,,\,۱۰۱)=۱} ۳^{۱۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۳۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow$

$$۳^{۳۰۲} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۳^{۳۰۲} - ۱ \overset{۱۰۱}{\equiv} ۸ \Rightarrow \boxed{r = ۸}$$

نکته: برای تعیین باقیمانده تقسیم یک عدد بر ۱۰۱ کافی است ارقام عدد را از سمت راست، دو رقم دو رقم جدا کنیم سپس اعداد دو رقمی به‌دست آمده را یک در میان تفریق و جمع کنیم در این صورت باقیمانده تقسیم عدد حاصل بر ۱۰۱ با باقیمانده تقسیم اصلی برابر است.

نکته: اگر a عدد صحیح و P عددی اول باشد آن‌گاه در صورتی که $(a\,,P)=۱$ آن‌گاه $a^{P-۱} \overset{P}{\equiv} ۱$ (قضیه فرما)

۳۸- گزینه ۲ پاسخ است.

باید $(a\,,۴۵) \mid ۳ \Rightarrow (a\,,۴۵) = ۱$ یا ۳

حال باید دقت شود که در صورتی $(a\,,۴۵)$ برابر ۱ یا ۳ نیست که یا a مضرب ۵ باشد یا مضرب ۹ باشد (زیرا $۵ \times ۳^۲ = ۴۵$) پس کافی است تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ را که مضرب ۵ یا ۹ هستند از تعداد کل اعداد کم کنیم یعنی داریم:

A : مضرب ۵

B : مضارب ۹

$$\begin{aligned} \text{تعداد مطلوب} &= |S| - |A \cup B| \\ &= |S| - |A| - |B| + |A \cap B| \\ &= ۱۰۰ - \left[\frac{۱۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۹}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۴۵}\right] \\ &= ۱۰۰ - ۲۰ - ۱۱ + ۲ \\ &= ۷۱ \end{aligned}$$

نکته: شرط وجود جواب معادله سیاله $ax + by = c$ این است که $(a\,,b) \mid c$

۳۹- گزینه ۱ صحیح است.

چون x رقم است باید بین صفر تا ۹ باشد .

$$\overline{۱۵۳۳xx} \overset{\wedge}{\equiv} x + ۲x + ۴ \times ۳ \overset{\wedge}{\equiv} ۳x + ۱۲ \overset{\wedge}{\equiv} ۳x + ۱۲ \overset{\wedge}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳x \overset{\wedge}{\equiv} -۱۲ \Rightarrow x \overset{\wedge}{\equiv} -۴ \Rightarrow x = ۴$$

تست دوره‌ای نظریه اعداد

۱- به ازای کدام مقدار n ، عدد $۲۳+۳^n$ بر ۱۳ بخش پذیر است ؟

۱) ۱۷۹ ۲) ۴۷۲ ۳) ۳۱۵ ۴) ۲۹۳

۲- چند عدد اول P ، در رابطه‌ی $P^۲|۶۰!$ صدق می‌کند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۳- مجموع سه عدد اول متمایز برابر ۲۴ شده است . چه تعداد از اعضای مجموعه‌ی زیر می‌تواند حاصلضرب این سه عدد باشد؟

$A=\{۱۳۶و۲۴۲و۱۷۰و۱۳۰و۱۱۴\}$

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۴- باقیمانده‌ی تقسیم دو عدد ۶۱ و ۱۴۴ بر عدد طبیعی m به ترتیب ۴ و ۱۱ می‌باشد . رقم یکان عدد $۲m^۲+۶m^۳$ کدام است ؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۹ ۴) ۶

۵- در تقسیمی مقسوم برابر ۲۰ و باقیمانده از حداکثر مقدار مجاز خود سه واحد کمتر است. مقسوم علیه چند مقدار مختلف می‌تواند بگیرد؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۸

۶- چه تعداد عدد شش رقمی به صورت $\overline{ababab}$ وجود دارد که بر ۲۷ بخش پذیر باشد؟

۱) هیچ ۲) ۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰

۷- چند زوج عدد طبیعی a و b وجود دارد که $a+b+(a,b)=۹۱$ بوده و $۵\le(a,b)\le۱۲$ باشد؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۸- بزرگترین مقسوم علیه دو عدد طبیعی برابر ۱۲ و مجموع آنها برابر ۲۴۰ می‌باشد . کدام گزینه نمی‌تواند تفاضل دو عدد باشد؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۷۲ ۳) ۹۶ ۴) ۱۶۸

۹- اگر $a^۲-b^۲|a$ چه تعداد از نتایج زیر صحیح نیست؟

الف) $a-b|b$ ب) $a^۲-b^۲|b^۳$ ج) $a+b|b$ د) $a-b|a+b$

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۰- عددی در مبنای ۸ به صورت (abb) و در مبنای ۹ به صورت (baa) است مقدار $۲a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۱- عدد ۷۲۰۰ دارای چند مقسوم علیه طبیعی است که هم مضرب ۶ و هم مضرب ۸ باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۱۲- اگر مجموعه $\{۲و۳و۵و۷و...وp\}$ شامل ۱۰۰۰ عدد اول باشد باقیمانده تقسیم $p^۴+...+۷^۴+۵^۴+۳^۴+۲^۴$ بر ۸ کدام است ؟

۱) صفر ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۱

۱۳- اگر m عددی طبیعی بوده و معادله $(۴m-۱)x \overset{۲-۳m}{\equiv} ۷$ در Z جواب نداشته باشد آنگاه کدام گزینه با فرض $k\in Z$ مقدار m را مشخص می‌کند؟

۱) $m=۵k+۱$ ۲) $m=۷k+۴$ ۳) $m=۷k+۳$ ۴) $m=۵k+۴$

۱۴- اعداد طبیعی a و b و c در رابطه‌های $24a-35b=1$ و $b|12c$ صدق می‌کنند حاصل $(b,[a,c])$ کدام است ؟

۱) a ۲) c ۳) b ۴) ۱

۱۵- اگر $\varphi(n)=k$ و $(n,30)=6$ باشد آنگاه $\varphi(150n)$ کدام است ؟

۱) $100k$ ۲) $50k$ ۳) $60k$ ۴) $120k$

۱۶- اگر x جواب معادله همنهشتی $7x \overset{12}{\equiv} \sum_{k=1}^{1385} k!$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $[x-3\ ,\ 12]=12$ ۲) $[x-3\ ,\ 12]=|x-3|$ ۳) $[x-4\ ,\ 12]=|x-4|$ ۴) $[x-4\ ,\ 12]=12$

۱۷- اگر $A=4!+5!+6!+\ldots+17!$ باشد، دو رقم سمت راست عدد A^2 کدام است ؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۶ ۳) ۹۶ ۴) ۷۶

۱۸- اگر $x=(a^2+2\ ,\ a^4+4)$ و $a\in Z$ آنگاه برای x چند جواب وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۹- چند عدد ۶ رقمی به صورت $\overline{xyxyxy}$ وجود دارد که بر ۳۳ بخش پذیر باشد؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) هیچ

۲۰- کدامیک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است ؟ $(x,y\in Z)$

۱) $x^5+y^5|x^{20}-y^{20}$ ۲) $x^2+y^2|x^{10}-y^{10}$ ۳) $x^3+y^3|x^{12}+y^{12}$ ۴) $x^2+y^2|x^{24}+y^{24}$

۲۱- اگر در تقسیمی مقسوم ۸۱۷ و خارج قسمت ۱۸ باشد، آنگاه مقسوم علیه چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۲۲- در تقسیم عدد طبیعی a بر ۶۹ باقیمانده از مکعب خارج قسمت ۲ واحد بیشتر است ، بزرگترین مقدار a بر کدام عدد بخشپذیر است ؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۹

۲۳- عدد شش رقمی $\overline{23ab56}$ بر عدد ۹۹ بخش‌پذیر است ، رقم a کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۴- اگر $(ba5)_6=(ab1)_8$ رقم a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۲۵- اگر عدد طبیعی n چنان باشد که $n+2|11$، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2+8n-10$ و $n+2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۱ یا ۱۱ ۴) ۱ یا ۵

۲۶- اگر دو عدد a و ۴۰ نسبت به هم اول باشند ، بزرگترین عددی که همواره a^4-1 را می‌شمارد کدام است ؟

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۶۰

۲۷- اگر $a^p=10k-3$ آن گاه رقم یکان $a^{p+4}+a^p$ کدام است ؟ $(a>0)$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۲۸- اگر $5^{212}+a$ مضرب ۳۱ باشد ، کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۷

۲۹- معادله‌ی سیاله خط $۲۵x - ۲۴y = ۲۰۵۰$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۱) ۸۲ ۲) ۸۳ ۳) بیشمار ۴) ۸۵

۳۰ - مجموع دو عدد برابر ۶۶ و ک . م . م.آنها برابر ۱۸۰ است. تفاضل آنها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۳۱- در تقسیم عدد سه رقمی **a** بر ۵ و ۷ باقیمانده‌ها به ترتیب برابر ۳ و ۵ است. مجموع ارقام کوچکترین مقدار **a** کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۲ - اگر **n** عددی طبیعی و $۵^n + ۱$ بر ۱۳ بخش پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی **n** کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۳۳- اگر $(a,۳b) = ۲$ باشد آنگاه مجموعه $S = \{۳ma + nb \mid m,n \in Z, ۰ < ۳ma + nb < ۱۰۰\}$ حداقل دارای چند عضو است؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۳ ۴) ۴۹

۳۴- معادله سیاله $x + y + xy = n$ به ازاء کدام مقدار **n** در مجموعه اعداد طبیعی جواب ندارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۵۰ ۴) ۸۰

۳۵- اگر $(a , ۷۲) = ۱$ آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که همواره $a^۲ - ۱$ را می شمارد، کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

۳۶- به ازای چند مقدار **a** از مجموعه $\{۱ , ۲ , ۳ , \dots , ۱۰۰\}$ معادله سیاله $ax + ۴۵y = ۳$ دارای جواب است؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۱ ۳) ۵۹ ۴) ۶۱

۳۷- تعداد اعداد طبیعی مانند **n** به طوری که $۴۰ | n$ و $n | ۱۱۲۰$ کدام است ؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۳۸- کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۸۸۰۰ ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۳۰۰ و ۵۰۰ ریالی کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۳۹- عدد شش رقمی $\overline{۷a۵b۲۶}$ بر عدد ۲۲ تقسیم پذیر است ، باقیمانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۳

۴۰- اگر **n** عدد طبیعی و دو عدد $۸n - ۷$ و $n + ۲$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند ، تعداد اعداد دو رقمی **n** کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۱- در همنهشتی به پیمانه‌ی **m** سه عدد $۱۸۴,۴۱,a$ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند. کوچکترین عدد سه رقمی **a** به طوری که مجموعه‌ی **Z** به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز گردد ، کدام است؟

۱) ۱۰۴ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۰۶ ۴) ۱۰۷

۴۲- دو عدد ۲۸ و ۱۰۵ در یک دسته‌ی هم ارزی به پیمانه‌ی **m** همنهشت هستند . اگر $m \neq ۱$ و $(m,۱۱) = ۱$ باقیمانده‌ی عدد $(m + ۲)$ بر ۸ کدام است ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۳- عدد $۵^{۲۱} + a$ مضرب ۲۳ است. کوچکترین عدد طبیعی **a** کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۴

۴۴- کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته‌ای که نیاز به ۱۱۵۰۰ریال تمبر دارد، با تمبرهای ۴۵۰ و ۲۵۰ ریالی کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۲۶

۴۵- به ازای کدام مقدار n، مجموع ارقام عدد $10^{3n} - 2\times 10^{n}$ برابر ۱۷۹ است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۴۶- بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2 + n + 14$, $n + 8$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۱

۴۷- اگر (پیمانه‌ی m) $a^3 + 3a^2 - 3 \equiv a^2 + 2a + 1$ و داشته باشیم $(m, a^2 - 2) = 1$ آنگاه :

۱) $m \mid a - 2$ ۲) $m \mid a + 1$ ۳) $m - a = 3$ ۴) $m \mid a + 2$

۴۸- عدد شش رقمی $7a5b35$ بر عدد ۵۵ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم آن بر ۹ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۴۹- اگر n عدد طبیعی و دو عدد «$n + 2, 9n + 5$» دارای مقسوم علیه مشترک غیر ۱ باشند تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ تست دوره‌ای نظریه اعداد

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$3^n + 23 \overset{13}{\equiv} 0 \Rightarrow 3^n \overset{13}{\equiv} -23 \overset{13}{\equiv} 3 \xrightarrow{(13,3)=1} 3^{n-1} \overset{13}{\equiv} 1 \qquad (1)$$

$$3^{n-1} \overset{13}{\equiv} 1 \xrightarrow{\qquad\qquad} 3^{3k} \overset{13}{\equiv} 1 \qquad (2)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) داریم :

$$\left.\begin{matrix} 3^{3k} \overset{13}{\equiv} 1 \\ 3^{n-1} \overset{13}{\equiv} 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n-1 = 3k \Rightarrow n = 3k+1$$

در بین گزینه‌ها فقط گزینه‌ی ۳ به صورت $(3k+1)$ است .

۲- گزینه ۳ پاسخ است

به دنبال بزرگترین عدد اولی هستیم که در تجزیه‌ی عدد !۶۰ ، ۲ عامل از آن وجود داشته باشد.

$$60! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 29 \times \ldots \times \underset{\underset{2 \times 29}{\downarrow}}{58} \times 59 \times 60$$

پس بزرگترین عدد p ، همان ۲۹ می‌باشد . در نتیجه با توجه به نکته‌ی گفته شده در رابطه‌ی مورد نظر صدق می‌کند.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر مجموع ۳ عدد برابر عددی زوج شود ، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد .

الف) هر سه زوجند   ب) دو عدد فرد و دیگری زوج است

حال در این مسئله $p_1 + p_2 + p_3 = 24$ واضح است که حالت (ب) اتفاق افتاده است. پس $p_1 = 2$ و $p_2 + p_3 = 22$ می‌باشد .

لذا داریم :

p_2	p_3
۱۹	۳
۱۷	۵

پس : $p_1 \times p_2 \times p_3 = 2 \times 19 \times 3 = 114$
$p_1 \times p_2 \times p_3 = 2 \times 17 \times 5 = 170$

نکته درسی:

۱) همه‌ی اعداد اول به جز «۲» فردند

۲) هر عدد اول $p > 2$ به صورت $2k+1$ می‌باشد

۳) هر عدد اول $p > 3$ به صورت $3k \pm 1$ می‌باشد

۴) هر عدد اول به جز ۲ و ۳ به صورت $6k \pm 1$ می‌باشد

۴- گزینه ۴ پاسخ است

$144 \overset{m}{\equiv} 11 \Rightarrow 133 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow$ عدد $(133 = 19 \times 7)$ مضرب m است

$61 \overset{m}{\equiv} 4 \Rightarrow 57 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow$ عدد $(57 = 19 \times 3)$ مضرب m است

در نتیجه $m = 19$ برقرار است . حال با توجه به نکته‌ی شماره‌ی ۳ داریم :

$$2m^2 + 6m^3 \overset{10}{\equiv} 2(19)^2 + 6(19)^3 \overset{10}{\equiv} 2(-1)^2 + 6(-1)^3 \overset{10}{\equiv} 2-6 \overset{10}{\equiv} -4 \overset{10}{\equiv} 6$$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

واضح است که با توجه به شرط باقیمانده $(\circ \le r < b)$، حداکثر مقدار مجاز برای باقیمانده همان $(b-1)$ می‌باشد . پس در این مساله $r = b-1-3$ است . لذا داریم :

$$20 = bq + (b-1-3) : \circ \le b-4 \Rightarrow b \ge 4$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است

$$\overline{ababab} \overset{27}{\equiv} \overline{ab} + 100\overline{ab} + 100^2\overline{ab}$$

$999 = 37 \times 27$ پس :

$$100^2 \overset{27}{\equiv} 10 \times 1000 \overset{27}{\equiv} 10 \times (1) \overset{27}{\equiv} 10$$

پس داریم:

$$\overline{ababab} \overset{27}{\equiv} \overline{ab} + 100\overline{ab} + 10\overline{ab} \overset{27}{\equiv} 111\overline{ab} \overset{27}{\equiv} 3\overline{ab}$$

پس از عبارت بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که $3\overline{ab}$ مضرب ۲۷ است پس $\overline{ab}$ مضرب ۹ است در نتیجه به دنبال اعداد ۲ رقمی مضرب ۹ هستیم که برابر است با : $\left[\frac{99}{9}\right] - \left[\frac{9}{9}\right] = 10$

روش دوم: $B = \overline{ababab} = \overline{aba} \times 1000 + \overline{bab}$

چون $1000 = 27 \times 37 + 1$ پس $1000 \overset{27}{\equiv} 1$ لذا داریم:

$$B \overset{27}{\equiv} \overline{aba} + \overline{bab} \overset{27}{\equiv} a + b + 10(a+b) + 100(a+b) \overset{27}{\equiv} 111(a+b) \overset{27}{\equiv} 3(a+b) \overset{27}{\equiv} 0$$

در نتیجه $a+b$ باید مضربی از ۹ باشد که با توجه به اینکه a,b رقم هستند و $a \ne 0$ داریم:

a	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۹
b	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۹

$\Rightarrow$ ۱۰ حالت

حال داریم :

$$24 = bq + b = b(q+1)$$
$$= 24 \times 1 = 12 \times 2 = 8 \times 3 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = 3 \times 8 = 2 \times 12 = 1 \times 24$$

در شرایط باقیمانده دیدیم که $b \ge 4$ قابل قبول است پس b ، مقادیر ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۴ را به خود می‌گیرد.

در گزینه (۱) شرط باقیمانده یعنی $b \ge 4$ در نظر گرفته نشده .

۷- گزینه ۳ پاسخ است

$$a + b + (a,b) = 91 \qquad \Rightarrow a'd + b'd + d = 91 = 13 \times 7$$

چون $5 \le (a,b) \le 12$ ، پس $(a,b) = 7$ لذا داریم

$$(a' + b' + 1)d = 91 = 13 \times 7 \xrightarrow{d=7} a' + b' + 1 = 13 \Rightarrow a' + b' = 12$$

a'	۱۱	۵
b'	۱	۷

۸- گزینه ۳ پاسخ است

هر گاه دو عدد غیر اول داده شد ، با توجه به نکات گفته شده ، فضای کاری خود را تغییر دهید و با دو عدد a' و b' که نسبت به هم اولند کار کنید.

$$a + b = a'd + b'd = (a' + b')d = 240$$

چون $d=12$ است پس $a'+b'=20$ است پس :

a'	۱۹	۱۷	۱۳	۱۱
b'	۱	۳	۷	۹

پس:

$$a-b=(a'-b')\times 12=\begin{cases}(19-1)\times 12=216\\(17-3)\times 12=168\\(13-7)\times 12=72\\(11-9)\times 12=24\end{cases}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

گزاره الف صحیح است زیرا

$$a^2-b^2|a \Rightarrow (a-b)(a+b)|a \Rightarrow \begin{cases}a-b\,|a\\a+b\,|a\end{cases}$$

$$\begin{cases}a-b\,|a\\a-b\,|a-b\end{cases}\xRightarrow{\text{تفاضل}} a-b|b$$

حال با استفاده از فرض سؤال می‌توان درستی گزاره ج را نتیجه گرفت زیرا:

$$\begin{cases}a+b|a\\a+b|a+b\end{cases}\xRightarrow{\text{تفاضل}} a+b|b$$

با استفاده از درستی گزاره‌های الف و ج می‌توان نتیجه گرفت :

$$\begin{cases}a-b|b\\a+b|b\end{cases}\Rightarrow a^2-b^2|b^2 \longrightarrow a^2-b^2|b^3$$

بنابراین گزاره ب نیز صحیح است .

گزاره د نیز صحیح است زیرا:

$$\begin{cases}a-b|a\\a-b|b\end{cases}\Rightarrow a-b|a+b$$

بنابراین تمامی گزاره‌های داده شده صحیح هستند.

۱۰-گزینه ۲ پاسخ است.

$$(abb)_8=b+8b+64a=64a+9b$$
$$(abb)_9=a+9a+81b=81b+10a$$

$$64a+9b=81b+10a \Rightarrow 72b=54a \Rightarrow 4b=3a$$

با توجه به اینکه

$$1\le a\le 7$$
$$1\le b\le 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\Rightarrow 2a+b=11$$

همچنین باید توجه شود که $\forall i\ :\ 0\le a_i\le b-1$ یعنی بزرگترین رقم مورد استفاده در مبنای مفروض b برابر $(b-1)$است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است

چون مقسوم علیه‌های مطلوب هم مضرب ۶ و هم مضرب ۸ هستند پس باید مضرب ۲۴ باشند (زیرا $[6,8]=24$) پس کافیست تعداد مقسوم علیه‌های عدد $3\times 2^2\times 5^2$ را بیابیم :

$$\Rightarrow 7200=3^2\times 2^5\times 5^2 = (3\times 2^3)\times 3\times 2^2\times 5^2$$

$$\Longrightarrow \text{تعداد مقسوم علیه‌های مطلوب}=(1+1)(2+1)(2+1)=18$$

پس تعداد مقسوم علیه‌های مطلوب برابر ۱۸ می‌باشد.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

چون تمامی اعداد اول به غیر از ۲ اعدادی فرد هستند و می‌دانیم مربع هر عدد فرد به شکل $8k+1$ است پس برای تمامی اعضای مجموعه به جز ۲ داریم:

$$P_i \neq 2 \quad \Rightarrow P_i^2 = 8k+1 \quad \Rightarrow P_i^2 \overset{8}{\equiv} 1 \quad \Rightarrow P_i^4 \overset{8}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 2^4+3^4+5^4+7^4+\dots+P^4 \overset{8}{\equiv} 0+\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{۹۹۹ تا}}$$

$$\overset{8}{\equiv} 999 \overset{8}{\equiv} -1 \overset{8}{\equiv} 7$$

$$\Rightarrow \boxed{r=7}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

چون معادله فوق در $\mathbb{Z}$ جواب ندارد بنابراین $7 \nmid (2-3m \text{ و } 4m-1)$ حال اگر فرض کنیم خواهیم داشت.

$$\begin{cases} d|4m-1 \\ d|2-3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|12m-3 \\ d|8-12m \end{cases} \Rightarrow d|5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

پس باید $d=5$ باشد تا شرط فوق بر قرار شود و بنابراین داریم :

$$4m-1=5k \Rightarrow 4m-1 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 4m \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow -m \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow m \overset{5}{\equiv} -1 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow m=5k+4$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

چون ترکیب خطی $24a-35b$ را می‌توان ترکیبی خطی از اعداد b و ۲۴ دانست پس $(b \text{ و } 24)=1$ بنابراین $(b \text{ و } 12)=1$ حال داریم :

$$\left.\begin{aligned} b&|12c \\ (b \text{ و } 12)&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} b|c$$

از طرفی می‌توان ترکیب خطی $24a-35b$ را ترکیب خطی اعداد a و b دانست پس $(a,b)=1$ و بنابراین داریم :

$$(b \text{ و } [a,c]) = [(b,a),(b,c)] = [1,b] = b$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

چون $(n,30)=6$ می‌باشد n دارای عوامل ۲ و ۳ است ولی فاقد عامل ۵ می‌باشد بنابراین داریم :

$$\varphi(150n) = 150n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_k})$$

توجه شود که سایر عوامل اول عدد n به غیر از ۲ و ۳ را $p_1, p_2 \dots, p_k$ فرض کرده‌ایم بنابراین داریم:

$$\varphi(150n) = 150(1-\frac{1}{5}) \times \underbrace{n \times (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_k})}_{\varphi(n)}$$

$$\varphi(150n) = 120\varphi(n) = 120k$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$7x \overset{12}{\equiv} \sum_{k=1}^{1385} k! \quad \Rightarrow 7x \overset{12}{\equiv} 1!+2!+3!+\dots+1385!$$

$$\Rightarrow 7x \overset{12}{\equiv} 1+2+6+0+0+\dots+0 \qquad \Rightarrow 7x \overset{12}{\equiv} 9 \Rightarrow$$

$$7x \overset{12}{\equiv} 21 \xrightarrow[(7,12)=1]{\text{بر ۷ تقسیم}} x \overset{12}{\equiv} 3 \quad \Rightarrow 12|x-3 \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق}} [x-3, 12] = |x-3|$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$4! \overset{100}{\equiv} 24 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۵}} 5! \overset{100}{\equiv} 120 \overset{100}{\equiv} 20 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۶}} 6! \overset{100}{\equiv} 120 \overset{100}{\equiv} 20$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۷}} 7! \overset{100}{\equiv} 140 \overset{100}{\equiv} 40 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۸}} 8! \overset{100}{\equiv} 320 \overset{100}{\equiv} 20$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۹}} 9! \overset{100}{\equiv} 180 \overset{100}{\equiv} 80 \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{طرفین در ۱۰}} 10! \overset{100}{\equiv} 800 \overset{100}{\equiv} 0$$

از !۱۰ تا !۱۷ باقیمانده تمام جملات بر ۱۰۰ برابر صفر خواهد بود بنابراین داریم :

$$A \overset{100}{\equiv} 24+20+20+40+20+80+0+\dots+0 \overset{100}{\equiv} 204 \overset{100}{\equiv} 4$$

$$\xrightarrow[\text{همنهشتی}]{\text{طبق ویژگیهای}} A^2 \overset{100}{\equiv} 16$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$(a^2+2\ ,\ a^4+4) = x \Rightarrow \begin{cases} x \mid a^2+2 \\ x \mid a^4+4 \end{cases} \Rightarrow x \mid (a^2+2)^2 \Rightarrow x \mid a^4+2a^2+4 \overset{\text{تفریق}}{\Rightarrow} x \mid 2a^2 \Rightarrow x \mid a^2 \overset{\text{ضرب}}{\Rightarrow} x \mid a^2(a^2+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \mid a^4+2a^2 \\ x \mid a^4+4 \end{cases} \Rightarrow x \mid 2a^2-4$$

$$x \mid a^2+2 \Rightarrow x \mid 2a^2+4$$

$$\begin{cases} x \mid 2a^2+4 \\ x \mid 2a^2-4 \end{cases} \longrightarrow x \mid 8 \Rightarrow x = 1,2,4,8$$

اما جوابهای ۴ و ۸ قابل قبول نیست زیرا اگر a فرد باشد x نمی‌تواند زوج باشد و اگر a زوج باشد داریم :

$$\left.\begin{aligned} a^2+2 &= 4k+2 = 2\overbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}} \\ a^4+4 &= 16q+4 = 4\underbrace{(4q+1)}_{\text{فرد}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 2,\ \ k,q \geq 0$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\overline{xyxyxy} \overset{33}{\equiv} \overline{xy}+\overline{xy}+\overline{xy} \overset{33}{\equiv} 0 \to 3\overline{xy} \overset{33}{\equiv} 0$$

$$\xrightarrow[(3\ ,\ 33)=3]{\text{تقسیم بر ۳}} \overline{xy} \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{xy} = 11 \text{ یا } 22 \dots 33 \text{ یا } \dots 99 \text{ یا}$$

بنابراین ۹ جواب برای مسئله وجود دارد.

نکته : قاعده بخش پذیری بر ۳۳ یا ۹۹ به صورت زیر است :

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \overset{33 \text{ یا } 99}{\equiv} \overline{a_1\, a_0} + \overline{a_3\, a_2} + \overline{a_5\, a_4} + \dots$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

عبارت a^n+b^n فقط با شرط فرد بودن n بر $a+b$ بخش پذیر است و عبارت a^n-b^n فقط با شرط زوج بودن n بر $a+b$ بخش پذیر است .

پس داریم : $x^{20}-y^{20} = (x^5)^4-(x^5)^4 = (x^5+y^5)q \Rightarrow x^5+y^5 \mid x^{20}-y^{20}$

در سایر گزینه‌ها شرایط فوق ایجاد نمی‌شود.

تشریح گزینه‌های نادرست:

گزینه (۱) چون توان زوج و دو جمله با هم جمع شده‌اند، به $x^۲+y^۲$ تقسیم نمی‌شوند.

$$x^{۲۴}+y^{۲۴}=(x^۲)^{۱۲}+(x^۲)^{۱۲}$$

گزینه (۲) چون توان فرد است و دو جمله از هم کم شده‌اند به $x^۲+y^۲$ تقسیم نمی‌شوند. $x^{۱۰}-y^{۱۰}=(x^۲)^۵+(x^۲)^۵$

گزینه (۳) مانند گزینه‌ی ۱

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر مقسوم علیه تقسیم را b بنامیم در اینصورت خواهیم داشت :

$$۰\le r<b \qquad ۸۱۷=۱۸b+r \Rightarrow ۰\le ۸۱۷-۱۸b<b \qquad \Rightarrow r=۸۱۷-۱۸b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۸۱۷-۱۸b\ge ۰ & \Rightarrow b\le \dfrac{۸۱۷}{۱۸} \Rightarrow b\le ۴۵/... \\ ۸۱۷-۱۸b<b & \Rightarrow b>\dfrac{۸۱۷}{۱۹} \Rightarrow b>۴۳ \end{cases} \Rightarrow b=۴۴\ ,\ ۴۵$$

پس b فقط دو مقدار می‌تواند داشته باشد.

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a=۶۹q+r \qquad ۰\le r<۶۹ \\ r=q^۳+۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۰\le q^۳+۲<۶۹ \quad \Rightarrow -۲\le q^۳<۶۷$$

$\Rightarrow -۱\le q\le ۴ \Rightarrow$ بیشترین مقدار q = ۴ $\Rightarrow$ بیشترین تعداد a = $۶۹\times ۴+۴^۳+۲$

$\Rightarrow$ حداکثر a = $۳۴۲=۲\times ۹\times ۱۹ \Rightarrow ۱۸|۳۴۲ \Rightarrow$ گزینه‌ی (۱) درست است.

۲۳- گزینه ۱ پاسخ است.

برای آنکه عددی بر ۹۹ بخشپذیر باشد باید آن عدد بر ۹ و ۱۱ بخشپذیر باشد. بنابراین باقیمانده‌ی عدد شش رقمی داده شده بر ۹ و ۱۱ را برابر صفر قرار می‌دهیم :

باقیمانده‌ی عدد $\overline{۲۳ab۵۶}$ بر ۹ = باقیمانده‌ی $(۲+۳+a+b+۵+۶)$ بر ۹ = باقیمانده‌ی $(a+b+۱۶)$ بر ۹ = ۰

پس $a+b$ باید برابر ۲ یا ۱۱ باشد تا $a+b+۱۶$ بر ۹ بخشپذیر باشد. (توجه کنید a و b رقم هستند و لذا بین صفر و ۹ می‌باشند.)

باقیمانده‌ی عدد $\overline{۲۳ab۵۶}$ بر ۱۱ = باقیمانده‌ی $(۶-۵+b-a+۳-۲)$ بر ۱۱ = باقیمانده‌ی $(b-a+۲)$ بر ۱۱ = ۰

بنابراین $b-a$ باید برابر ۲- یا ۹ باشد تا $b-a+۲$ بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

با توجه به آنکه $a+b$ از $b-a$ بزرگتر است داریم:

گزینه‌ی (۱) $\begin{cases} a+b=۲ \\ b-a=-۲ \end{cases} \Rightarrow a=۲\ ,\ b=۰$

بقیه حالات جواب قابل قبول ندارند . مثلاً $\begin{cases} a+b=۱۱ \\ b-a=۹ \end{cases}$، جواب غیر قابل قبول $a=۱$ و $b=۱۰$ می‌رسد.

راه حل دیگر:

باقیمانده‌ی عدد $a_n\ldots a_۰$ بر ۹۹ با باقیمانده‌ی $(a_۱a_۰+a_۳a_۲+\ldots)$ بر ۹۹ یکسان است.

باقیمانده‌ی $\overline{۲۳ab۵۶}$ بر ۹۹ = باقیمانده‌ی $(۲۳+ab+۵۶)$ بر ۹۹ = باقیمانده‌ی $(ab+۷۹)$ بر ۹۹ = ۰

بنابراین ab باید برابر ۲۰ باشد تا $ab+۷۹=۹۹$ بر ۹۹ بخشپذیر گردد . اکنون نتیجه می‌شود : $a=۲ \quad b=۰$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$(b\ a\ 5)_6=(a\ b\ 1)_8 \Rightarrow 36b+6a+5=64a+8b+1 \Rightarrow 28b+4=58a \Rightarrow 14b=29a-2$

سمت چپ تساوی آخر بر ۱۴ بخشپذیر است پس سمت راست نیز باید بر ۱۴ بخشپذیر باشد اکنون با توجه به اینکه a یک رقم در مبنای ۶ است نتیجه می‌شود $0\le a\le 5$، با احتمال به سادگی مشخص می‌شود که اگر $a=2$ باشد آنگاه $29a-2=56$ و ۵۶ بر ۱۴ بخشپذیر است و $b=4$ می‌شود.

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{array}{r|l} n^2+8n-10 & n+2 \\ \underline{-\ n^2\pm 2n} & n+6 \\ 6n-10 & \\ \underline{-\ 6n\pm 12} & \\ -22 & \end{array} \Rightarrow (n^2+8n-10\ ,\ n+2)=(n+2\ ,\ -22)$$

اکنون چون $11\nmid n+2$ پس $(n+2\ ,\ -22)\neq 11,22$ بنابراین فقط اعداد ۱ یا ۲ باقی می‌ماند که مقسوم علیه‌های دیگر ۲۲ هستند و ممکن است $(n+2\ ,\ -22)$ برابر آنها گردد.

راه حل دیگر:

$n+2=0 \Rightarrow n=-2 \Rightarrow (n^2+8n-10\ ,\ n+2)=((-2)^2+8(-2)-10\ ,\ n+2)=(-22\ ,\ n+2)=1$ یا ۲ یا ۱۱ یا ۲۲

ولی چون $11\nmid n+2$ پس ۱۱ و ۲۲ قابل قبول نیستند داریم $(n^2+8n-10)=$ ۱ یا ۲

۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$(a\ ,\ 40)=1\ ,\ 40=2^3\times 5 \Rightarrow 2\nmid a \quad 5\nmid a$

$2\nmid a \Rightarrow a=$ فرد $\Rightarrow a^2=8k+1 \Rightarrow a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)=(8k+1-1)(8k+1+1)$

$\Rightarrow a^4-1=(8k)(8k+2)=16k(4k+1) \Rightarrow 16 \mid a^4-1$

$5\nmid a \Rightarrow a\overset{5}{\equiv}\pm 1$ یا $\pm 2 \Rightarrow a^4\overset{5}{\equiv}(\pm 1)^4$ یا $(\pm 2)^4 \Rightarrow a^4\overset{5}{\equiv} 1$ یا $16 \Rightarrow a^4\overset{5}{\equiv}1 \Rightarrow 5\mid a^4-1$

$$\begin{cases} 16\mid a^4-1 \\ 5\mid a^4-1 \end{cases} \Rightarrow [16\ ,5] \mid a^4-1 \Rightarrow 80\mid a^4-1$$

ولی اگر $a=3$ قرار دهیم داریم : $3^4-1=80$ بنابراین عددی بزرگتر از ۸۰ آن را نمی‌شمارد . اکنون مشخص می‌شود بزرگترین عددی که همواره a^4-1 را در این شرایط می‌شمارد همان ۸۰ است.

۲۷- گزینه ۱ پاسخ است.

رقم یکان a^p=۷ $\qquad a^p \overset{10}{=} 10k-3 \Rightarrow a^p \overset{10}{\equiv} -3+10\equiv 7 \Rightarrow$

قاعدهٔ تقلیل توان :

$$\left.\begin{array}{l} a^{p+4}\overset{10}{\equiv}7 \\ a^p\overset{10}{\equiv}7 \end{array}\right\} \text{جمع} \Rightarrow a^{p+4}+a^p\overset{10}{\equiv}7+7\overset{10}{\equiv}14\overset{10}{\equiv}4$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$5^{212}\overset{31}{\equiv}\left(5^3\right)^{70}\times 5^2\overset{31}{\equiv}(125)^{70}\times 25\overset{31}{\equiv}\times 1^{70}\times 25\overset{31}{\equiv}25$

در اینجا از همنهشتی $125\overset{31}{\equiv}1$ استفاده شده است .

$5^{212}+a\overset{31}{\equiv}25+a\overset{31}{\equiv}0 \Rightarrow a$ کوچکترین عدد طبیعی $\Rightarrow a=6$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$25x-24y=2050 \Rightarrow x_{\circ}=\frac{2050}{25}=82 \ , \ y_{\circ}=\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=24k+82 \\ y=25k+\circ \end{cases} \ k\in z$$

اکنون واضح است که به ازای هر $k\in N$، x,yهایی که از فرمول فوق به دست می‌آیند طبیعی هستند پس بیشمار جواب طبیعی داریم.

راه حل دیگر: چون ضریب x و y مختلف العلامت هستند ، این معادله‌ی سیاله بیشمار جواب طبیعی دارد.

۳۰-گزینه ۱ پاسخ است.

روش a',b',dرا بکار می‌بریم ، در این روش تمام مفروضات مساله را بر حسب a',b',dبازنویسی می‌کنیم ، که در آن $(a,b)=d$ ، $a=a'd$ ، $(a',b')=1$ ، $[a,b]=a'b'd$ می‌باشد؛ داریم:

$$a+b=66 \to a'd+b'd=66 \to d(a'+b')=66$$
$$[a,b]=180 \to a'b'd=180$$

از تقسیم دو رابطهٔ فوق بر یکدیگر داریم:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{a'+b'}{a'\,b'}=\dfrac{66}{180} \to \dfrac{a'+b'}{a'\,b'}=\dfrac{11}{30} \\ (a',b')=1 \to (a'+b',a'b')=1 \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} a'+b'=11 \\ a'b'=30 \end{matrix} \to a'=6 \ , \ b'=5$$

با جایگذاری این مقادیر در معادلات اولیه داریم :

$$d(a'+b')=66 \to d(5+6)=66 \to d=6$$

بنابراین:

$$\begin{matrix} a=a'd=6\times 6=36 \\ b=b'd=5\times 6=30 \end{matrix} \to a-b=36-30=6$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ است.

بنابراین در این سوال داریم:

$$\begin{matrix} a\overset{5}{\equiv}3 \to a\overset{5}{\equiv}-2 \to 5\,|\,a+2 \\ a\overset{7}{\equiv}5 \to a\overset{7}{\equiv}-2 \to 7\,|\,a+2 \end{matrix} \to 35\,|\,a+2 \to a=35k-2$$

کوچکترین مقدار سه رقمی برای a به ازای $k=3$ رخ می‌دهد و برابر است با :

$a=35\times 3-2=105-2=103 \to$ مجموع ارقام $=4$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left.\begin{matrix} 5^{2}\overset{13}{\equiv}-1 \\ 5^{4k}\overset{13}{\equiv}1 \end{matrix}\right\} \to 5^{4k+2}\overset{13}{\equiv}-1 \to 13\,|\,5^{4k+2}+1$$

بنابراین n باید به صورت $4k+2$ باشد:

$$n=4\times 2+2$$
$$n=4\times 3+2$$
$$\vdots$$
$$n=4\times 24+2$$

تعداد nها $=24-2+1=23$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ است.

فرض کنید $d=(3a,b)$ می‌خواهیم مقدار d را محاسبه کنیم :

از آنجا که $(a,3b)=2$ بنابراین ۲ حالت پیش می‌آید:

حالت اول : b مضرب ۳ نباشد $\Leftarrow 2=(3a,b)$ یعنی $d=2$

حالت دوم : b مضرب ۳ باشد $\Leftarrow 6=(3a,b)$ یعنی $d=6$

واضح است که مجموعه S، مجموعهٔ مضارب مثبت و کوچکتر از ۱۰۰ عدد d است.

(توجه کنید که d، ب .م .م $b,3a$ در نظر گرفته شده است)

بنابراین در حالت اول S دارای $\left[\frac{99}{2}\right]$ یعنی ۴۹ عضو خواهد بود. و در حالت دوم S دارای $\left[\frac{99}{6}\right]$ یعنی ۱۶ عضو است، لذا حداقل ۱۶ عضو خواهد داشت.

نکته: مجموعهٔ $S=\{am+bn : m,n\in z, am+bn>0\}$ بصورت اعضا برابر است با :

$$S=\{d,2d,3d,4d,\dots\}$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ است.

روش اول : عدد یک را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم:

$$x+y+xy+1=n+1$$
$$\Rightarrow (x+1)(y+1)=n+1$$

پس اگر $n+1$، یک عدد اول باشد y,x طبیعی برای معادله یافت نخواهد شد.

چون در این حالت یکی از $x+1$ یا $y+1$ الزاماً باید برابر یک باشد و لذا یکی از x یا y برابر صفر می‌شودکه طبیعی نیست.

بنابراین گزینه ۲ صحیح است چون $30+1$ یک عدد اول است.

روش دوم:

$$x+y+xy=n \to y(x+1)=n-x \to y=\frac{n-x}{x+1}$$

$$\to y=\frac{n+1}{x+1}-1 \to x+1 \mid n+1 \to n+1 \text{ نباید اول باشد}$$

چون x طبیعی است و $x+1$ بزرگتر یک می‌باشد.

واضح است که به ازای $n=30$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} x+1 \mid 30+1 \to x+1 \mid 31 \\ x+1>1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+1=31 \to x=30 \to y=0 \text{ غیر قابل قبول}$$

نکته درسی:در یافتن جوابهای صحیح (یا طبیعی) معادله سیاله به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با فرض $c \mid a$ اینگونه عمل کنید:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \to y=\frac{a}{c}-\frac{ad-bc}{c(cx+d)} \to c(cx+d) \mid ad-bc \text{ خ}$$

اکنون می‌توان با نوشتن مقسوم علیه‌های $ad-bc$ ، x ها را یافت

۳۵- گزینه ۲ پاسخ است .

$$72=2^3\times 3^2 \quad , \quad (a\,,\,72)=1 \Rightarrow 2\nmid a\,,\,3\nmid a$$

$$\left.\begin{matrix} 2\nmid a \Rightarrow a=4k\pm1 \Rightarrow a^2=16k^2\pm 8k+1 \Rightarrow a^2=8q+1 \Rightarrow 8 \mid a^2-1 \\ 3\nmid a \Rightarrow a=3k\pm1 \Rightarrow a^2=9k^2\pm 6k+1 \Rightarrow a^2=3q'+1 \Rightarrow 3 \mid a^2-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 24 \mid a^2-1$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$(a , ۴۵) | ۳ \Rightarrow (a , ۴۵) = ۱$ یا ۳ باید

حال باید دقت شود که در صورتی $(a , ۴۵)$ برابر ۱ یا ۳ نیست که یا a مضرب ۵ باشد یا مضرب ۹ باشد (زیرا $۵ \times ۳^۲ = ۴۵$) پس کافی است تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ را که مضرب ۵ یا ۹ هستند از تعداد کل اعداد کم کنیم یعنی داریم:

A : مضرب ۵

B : مضارب ۹

$$\text{تعداد مطلوب} = |S| - |A \cup B|$$
$$= |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$
$$= ۱۰۰ - \left[\frac{۱۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۹}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۴۵}\right]$$
$$= ۱۰۰ - ۲۰ - ۱۱ + ۲$$
$$= ۷۱$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ است .

$۴۰ | n \Rightarrow n = ۴۰k$

$n | ۱۱۲۰ \to ۴۰k | ۱۱۲۰ \Rightarrow k | ۲۸ \Rightarrow$ k باید شمارنده عدد ۲۸ باشد

$۲۸ = ۷ \times ۲^۲ \Rightarrow$ تعداد شمارنده‌ها $= (۱+۱)(۲+۱) = ۶$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

تعداد تمبرهای لازم ۳۰۰ ریالی را x و ۵۰۰ ریالی را y می‌گیریم. x و y باید در معادله‌ی زیر صدق کنند:

$$۳۰۰x + ۵۰۰y = ۸۸۰۰ \Rightarrow ۳x + ۵y = ۸۸$$

ابتدا یک جواب خاص برای معادله به دست می‌آوریم $x_۰ = ۱ , y_۰ = ۱۷$ و سپس جواب‌های کلی را می‌نویسیم:

$$(۳ , ۵) = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۱}k + ۱ \\ y = -\frac{۳}{۱}k + ۱۷ \end{cases} , k \in Z \Rightarrow \begin{cases} x = ۵k + ۱ \\ y = -۳k + ۱۷ \end{cases} , k \in Z$$

می‌دانیم تعداد تمبرها باید نامنفی باشند یعنی $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ در نتیجه:

$$\begin{cases} ۵k + ۱ \geq ۰ \\ -۳k + ۷ \geq ۰ \end{cases} , k \in Z \Rightarrow ۰ \leq k \leq ۲ , k \in Z$$

از طرفی مجموع تعداد تمبرهای لازم برابر $x + y$ است که بر حسب k به صورت زیر است:

$$x + y = (۵k + ۱) + (-۳k + ۱۷) = ۲k + ۱۸$$

برای آنکه کمترین مقدار $x + y$ را بدست آوریم با توجه به عبارت $x + y$ بر حسب k در اینجا باید کمترین مقدار k یعنی صفر را قرار دهیم که کمترین تعداد تمبر لازم ۱۸ به دست می‌آید.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

چون عدد $\overline{7a5b26}$ زوج است برای آنکه بر ۲۲ تقسیم باشد کافی است که عدد داده شده بر ۱۱ بخشپذیر باشد.

$$\overline{7a5b26} \overset{11}{\equiv} 6-2+b-5+a-7 \overset{11}{\equiv} a+b-8 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a+b=8$$

$$\overline{7a5b26} \overset{9}{\equiv} 7+a+5+b+2+6 \overset{9}{\equiv} a+b+20 \overset{9}{\equiv} 28 \overset{9}{\equiv} 1$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{array}{r|l} 8n-7 & n+2 \\ \cline{2-2} \underline{8n+16} & 8 \\ -23 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad (n+2\ ,\ 8n-7)=(n+2\ ,\ -23)=1 \text{ یا } 23$$

چون باید مقسوم علیه مشترک عددی غیر از یک باشد نتیجه می‌گیریم که این مقسوم مشترک برابر ۲۳ است و لذا $23 \mid n+2$ بنابراین $n+2=23k \Leftarrow$

تعداد اعداد دو رقمی n = ۴ $\Leftarrow$ $1\le k\le 4 \Leftarrow$ $10\le 23k-2<100 \Leftarrow$ $n=23k-2 \Leftarrow$

راه حل دیگر:

$$n+2=0 \Rightarrow n=-2 \Rightarrow (n+2\ ,\ 8n-7)=(n+2\ ,\ 8(-2)-7)=(n+2\ ,\ -23)=1 \text{ یا } 23$$

بقیه مشابه حل قبل است.

۴۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$184 \overset{m}{\equiv} 41 \Rightarrow m \mid 184-41 \Rightarrow m \mid 143\ ,\ 143=11\times 13 \Rightarrow m=1\ ,11,13,143$$

برای آنکه Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز گردد باید m را هرچه ممکن است کوچکتر انتخاب کنیم تعداد دسته‌های هم ارزی برابر m (پیمانه) است. اگر $m=1$ انتخاب گردد همه اعداد Z با هم همنشت می‌شوند بنابراین کوچکترین عـدد سـه رقمی a همان کوچکترین عدد سه رقمی یعنی ۱۰۰ خواهد بود که در گزینه‌ها وجود ندارد. پس از $m=1$ کوچکترین عدد m ، $m=11$ است . در این صورت :

$$a \overset{11}{\equiv} 41 \Rightarrow a=11k+41,\ a\ge 100 \Rightarrow 11k+41\ge 100 \Rightarrow k\ge 6 \Rightarrow$$

کوچکترین a = $11\times 6+41=107$

۴۲- گزینه ۱ پاسخ است.

۲۸ , ۱۰۵ در یک دسته همنهشت هستند. $\Rightarrow 105 \overset{m}{\equiv} 28 \Rightarrow m \mid 105-28 \Rightarrow m \mid 77 \Rightarrow m=1$ یا 7 یا 11 یا 77

چون $m\neq 1$ ، $(m,11)=1$ پس نتیجه می‌شود که $m=7$

$m=7 \Rightarrow (m+2)=9$ باقیمانده $=1$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ است.

روش اول:

$$5^{21} \overset{23}{\equiv} -a \xrightarrow{\text{دوطرف را در ۵ ضرب می‌کنیم}} 5^{22} \overset{23}{\equiv} -5a \xrightarrow{\text{طبق قضیه فرما}} 1 \overset{23}{\equiv} -5a$$

$$\xrightarrow{\text{دوطرف را در ۵ ضرب می‌کنیم}} 5 \overset{23}{\equiv} -25a \rightarrow 5 \overset{23}{\equiv} -2a \xrightarrow{\text{دوطرف را در ۱۲ ضرب می‌کنیم}} a \overset{23}{\equiv} -60$$

$$\Rightarrow a \overset{23}{\equiv} 9 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد طبیعی } a} a=9$$

روش دوم:

$$5^{21} \overset{23}{\equiv} (5^2)^{10}\times 5 \overset{23}{\equiv} 2^{10}\times 5 \overset{23}{\equiv} (32)^2\times 5$$

$$9^2\times 5 \overset{23}{\equiv} 405 \overset{23}{\equiv} 14 \quad\Rightarrow\quad a+14 \overset{23}{\equiv} 0 \rightarrow a=9$$

۴۴- گزینه ۴ پاسخ است.

تعداد تمبرهای ۴۵۰ ریالی را x و تعداد تمبرهای ۲۵۰ ریالی را y می‌گیریم :

$۲۵۰x + ۴۵۰y = ۱۱۵۰۰ \Rightarrow ۵x + ۹y = ۲۳۰ \quad , \quad x_\circ = ۴۶ , y_\circ = \circ \quad , (۵,۹) = ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۱}k + ۴۶ \\ y = -\frac{۵}{۱}k \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \circ \le x \\ \circ \le y \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} ۹k + ۴۶ \ge \circ \\ -۵k \ge \circ \end{cases} \Rightarrow -۵ \le k \le \circ$$

$x + y = ۴k + ۴۶ =$ تعداد تمبر لازم. $\Rightarrow$ حداقل تعداد تمبر لازم $= ۴(-۵) + ۴۶ = ۲۶$

۴۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$۱۰^{۳n} = ۱\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{۳n \text{ تا}} \quad , ۲\times ۱۰^{n} = ۲\underbrace{\circ\circ\ldots\circ}_{n \text{ تا}} \quad \Rightarrow ۱۰^{۳n} - ۲\times۱۰^{n} = ۱\overbrace{\circ\ldots\ldots\circ}^{۲n \text{ تا}}\ \overbrace{\circ\ldots\ldots\circ}^{n \text{ تا}}$$

$$\Rightarrow ۱۰^{۳n} - ۲\times۱۰^{n} = \underbrace{۹\ldots\ldots۹}_{۲n-۱ \text{ تا}}\ ۸\underbrace{\circ\ldots\ldots\circ}_{n \text{ تا}} \Rightarrow \text{مجموع ارقام } ۱۰^{۳n} - ۲\times۱۰^{n} = ۹(۲n-۱) + ۸ = ۱۸n - ۱$$

$\Rightarrow ۱۸n - ۱ = ۱۷۹ \Rightarrow ۱۸n = ۱۸۰ \Rightarrow n = ۱۰$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{array}{l|l} n^۲ + n + ۱۴ & n + ۸ \\ \cline{2-2} -(n^۲ \pm ۸n) & n - ۷ \\ \hline -۷n + ۵۶ & \\ -(-۷n - ۵۶) & \\ \hline ۷۰ & \end{array}$$

$\Rightarrow (n^۲ + n + ۱۴, n + ۸) = (n + ۸, ۷۰) = d \Rightarrow d | ۷۰ \Rightarrow$ در گزینه‌ها فقط گزینه ۳ ، عاملی از ۷۰ است

۴۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$a^۳ + ۳a^۲ - ۳ \equiv a^۲ + ۲a + ۱ \ ($ پیمانه‌ی $m) \Rightarrow m | (a^۳ + ۳a^۲ - ۳) - (a^۲ + ۲a + ۱)$

$\Rightarrow m | (a^۳ + ۲a^۲ - ۲a - ۴) \Rightarrow m | (a^۲(۲ + a) - ۲(a + ۲)) \Rightarrow m | (a + ۲)(a^۲ - ۲)$

$, (m , a^۲ - ۲) = ۱ \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} m | a + ۲$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ است.

چون عدد شش رقمی داده شده به ۵ ختم می‌شود بر ۵ بخش پذیر است. بنابراین برای آنکه عدد شش رقمی داده شده بر ۵۵ بخش پذیر باشد چون $۵۵ = ۵ \times ۱۱$ کافی است این عدد بر ۱۱ بخش پذیر باشد. یعنی باقیمانده‌ی آن بر ۱۱ برابر صفر باشد :

باقیمانده‌ی $۷a۵b۳۵$ بر ۱۱ = باقیمانده‌ی $(۵ + b + a) - (۷ + ۵ + ۳)$ بر ۱۱ = باقیمانده‌ی $(a + b - ۱۰)$ بر ۱۱ $= \circ \Rightarrow$

$a + b - ۱۰ = ۱۱k \Rightarrow$ در اینجا چون a و b رقم هستند فقط به ازای $k = \circ$ جواب داریم: $a + b = ۱۰$

باقیمانده‌ی $۷a۵b۳۵$ بر ۹ = باقیمانده‌ی $(۷ + a + ۵ + b + ۳ + ۵)$ بر ۹ = باقیمانده‌ی $(a + b + ۲۰)$ بر ۹ = باقیمانده ۳۰ بر ۹ = ۳

۴۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$۹n + ۵ = ۹(n + ۲) - ۱۳ \Rightarrow (n + ۲, ۹n + ۵) = (n + ۲, -۱۳) = \begin{cases} \text{غیر قابل قبول} \Rightarrow (n + ۲, -۱۳) = ۱ \\ \text{قابل قبول} \Rightarrow (n + ۲, -۱۳) = ۱۳ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ۱۳ | n + ۲ \Leftrightarrow n + ۲ = ۱۳k \Leftrightarrow n = ۱۳k - ۲$

$۱۰ \le ۱۳k - ۲ < ۱۰۰ \Rightarrow ۱ \le k \le ۷ \Rightarrow$ تعداد $= ۷$

بخش‌پذیری

۱- منحنی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{۳x^۲ - ۲}$ از چند نقطه با مختصات صحیح عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- به ازای چند عدد طبیعی n، $n^۲ + ۱ | ۵n - ۳$ ؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳- از رابطه‌ی $n + ۴n^۲ - ۳n^۳ | ۰$ چند مقدار طبیعی برای n به‌دست می‌آید؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴- چند عدد طبیعی مانند a وجود دارد که $a^۲ - ۴ | ۲۵$ ؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۵- به‌ازای چند عدد صحیح n، $۲n + ۳ | ۹n + ۱۷$ ؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- با فرض طبیعی بودن n، از روابط $۲n^۲ + ۱ | a$ و $a | ۴n^۲ + ۶$ چند مقدار طبیعی برای a وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- $x^{۲۴} + ۱$ بر کدام یک بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{۱۲} + ۱$ ۲) $x^۸ + ۱$ ۳) $x^۶ + ۱$ ۴) $x^۴ + ۱$

الگوریتم تقسیم

۸- باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۱ برابر ۹ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم a- بر ۱۱ چند است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۹- کوچک‌ترین عضو مثبت $\{-۱۷k + ۶۳ : k \in \mathbb{Z}\}$ چند است؟

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۲۹

۱۰- چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم هر کدام از آن‌ها بر ۷۰، مساوی مجذور خارج قسمت این تقسیم باشد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۱- در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، خارج قسمت و باقی‌مانده برابر qاند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. کدام یک می‌تواند مقدارهای q باشد؟

۱) ۸ و ۵ ۲) ۹ و ۴ ۳) ۱۰ و ۵ ۴) ۱۰ و ۸

۱۲- اگر در یک تقسیم، ۱۳۶ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند اما به باقی‌مانده یک واحد اضافه می‌شود. در این تقسیم خارج قسمت چند است؟

۱) ۵۴ ۲) ۴۵ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

۱۳- در یک تقسیم مقسوم‌علیه برابر ۳۱ و باقی‌مانده برابر ۱۱ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که خارج قسمت و مقسوم‌علیه تغییر نکند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۰

۱۴- در یک تقسیم، مقسوم ۵۰۰ واحد بیشتر از مقسوم‌علیه و باقی‌مانده برابر ۵۰ است. برای خارج قسمت چند جواب طبیعی وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۵- باقی‌مانده‌ی تقسیم a و 2a بر b به ترتیب ۵ و ۴ است. چند عدد طبیعی برای b وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶- در یک تقسیم مقسوم ۱۸۷ و باقی‌مانده ۱۷ است. مقسوم‌علیه این تقسیم چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۷- کدام معادله در اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $a^۲ = ۵b + ۶$ ۲) $a^۲ = ۵b + ۱۲$ ۳) $a^۲ = ۵b + ۹$ ۴) $a^۲ = ۵b - ۹$

۱۸- به ازای چند عدد متعلق به مجموعه‌ی $\{1,2,...,50\}$ مانند a، باقی‌مانده‌ی a^2 بر ۷ برابر ۲ است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۱۹- باقی‌مانده‌ی تقسیم $5a+14b$ بر ۴۷ برابر ۷ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $3a-b$ بر ۴۷ چند است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۳ ۴) ۴۰

۲۰- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۴ و ۶ برابر ۳ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۱۲ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۹

۲۱- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد فرد a بر ۲، ۴ و ۸ یکسان باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a^2+6 بر ۲، ۴ و ۸ به ترتیب کدام است؟

۱) ۱، ۱ و ۱ ۲) ۱، ۳ و ۷ ۳) ۵، ۳ و ۱ ۴) صفر، صفر و صفر

۲۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی‌مانده‌ی آن توان دوم خارج قسمت است، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

۲۳- اگر نمایش A در مبنای ۳ به صورت ۲۱ باشد، 81A در مبنای ۳ چند صفر دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۴- بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ۴، کدام است؟

۱) ۲۴۲ ۲) ۲۵۵ ۳) ۵۱۱ ۴) ۱۰۲۳

۲۵- نمایش عدد ۱۴۶ در مبنای a به صورت ۲۲۲ است. a چند است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲۶- اگر $A=(5103)_6$ ، نمایش $\frac{A}{3}$ در مبنای ۶ کدام است؟

۱) ۱۴۲۱ ۲) ۱۵۰۱ ۳) ۲۱۳۱ ۴) ۱۴۵۱

۲۷- هرگاه $(3a1)_4=(2021)_3$ در این صورت a چند است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸- عددی در مبنای ۵ به صورت $\overline{xy4}$ و در مبنای ۸ به صورت $\overline{1z5}$ نوشته می‌شود. بزرگ‌ترین مقدار z چند است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۹- حاصل $(110110)_2+(1010)_2$ برابر است با:

۱) $(100010)_2$ ۲) $(1101110)_2$ ۳) $(100000)_2$ ۴) $(1000000)_2$

۳۰- چند عدد چهاررقمی به صورت $A=\overline{abcd}$ وجود دارد که $A=105\overline{ab}$ ؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۲۰

۳۱- عددی در مبنای x به صورت $\overline{3a}$ و در مبنای $x-2$ به صورت $\overline{a3}$ نوشته می‌شود. $a+x$ چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۳۲- نمایش عدد $a=2^{19}\times3^7$ در مبنای ۴، در سمت راست خود چند رقم صفر دارد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۳- اگر $A=(2122)_3$ ، باقی‌مانده‌ی تقسیم 82A بر ۱۰ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۴

اعداد اول

34- چند عدد اول مانند p وجود دارد که $p \mid 21^p+5p$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵- اگر p و q دو عدد اول باشند ه طوری که $p-q=71$ ، آن‌گاه pq کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۱۴۶ ۳) ۱۴۲ ۴) ۱۳۲

۳۶- به ازای چند عدد اول p، عدد p^2+13 عددی اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۳۷- به ازای چند عدد اول p، اعداد $2p+1$ و $4p+1$ نیز اول‌اند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۸- اگر عدد $(2^a)^n+1$ به ازای همه‌ی اعداد طبیعی n مرکب باشد، آن‌گاه a کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۳۹- به ازای چند مقدار طبیعی n، n^4-3n^2+1 اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۰- به ازای چند عدد اول p، $2p+1$ مکعب کامل است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱- چند عدد اول مانند p وجود دارد که $17p+1$ مربع کامل باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۴۲- به ازای چند عدد اول p، $5p^2-2$ نیز عددی اول است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳- بزرگ‌ترین عدد k که $12^k \mid 44!$ ، چند است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰

۴۴- عدد $30^{30}\times 25^{25}\times 20^{20}$ به چند رقم صفر ختم می‌شود؟

۱) ۵۰ ۲) ۷۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۱۵

۴۵- به ازای چند عدد اول p، رابطه‌ی $p^2 \mid 120!$ برقرار است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴۶- عدد $\frac{100!}{50!}+\frac{100!}{55!}$ در مبنای ۱۰ به چند رقم صفر ختم می‌شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۴۷- کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن $12^7 \mid a^3$ ، چند است؟

۱) 2×12^2 ۲) 3×12^2 ۳) 6×12^2 ۴) 12^3

۴۸- عدد $40!$ در مبنای ۱۳، به چند صفر ختم می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۴۹- کوچک‌ترین عددی که باید در $12^3\times 11^{12}\times 10^{10}$ ضرب شود تا حاصل مربع کامل شود، چند است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳

۵۰- به ازای چند عدد طبیعی n، $n \mid 5040$ و $60 \mid n$ ؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۵۱- به ازای چند عدد طبیعی n، $n \mid 2700$ و $60 \nmid n$ ؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۵۲- عدد طبیعی n دارای ۱۸ مقسوم‌علیه مثبت است. تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n^2 کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۷۵

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

۵۳- فرض کنید a عددی صحیح باشد. $(5a+2, 10a-6)$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۴- مجموعه‌ی $\{93x+155y \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ چند عضو طبیعی ۲ رقمی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵- چند عدد طبیعی مانند n وجود دارد که $(n^4, n^4+2n^3+n^2)=16$ ؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۵۶- $(6a+3, 6a-3)$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بستگی به مقدار a دارد.

۵۷- فرض کنید $(18a, 30b)=24$ ، در این صورت (a,b) چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۸- کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{48x+36y-14 \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

۵۹- $(2a^2+4, a+1)$ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۰- فرض کنید a عددی فرد باشد، $(a,b)=1$ و $d=(3a+4b, 5a-2b)$. دقیق‌ترین گزینه کدام است؟

۱) $d|7$ ۲) $d|11$ ۳) $d|13$ ۴) $d|14$

۶۱- فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند به طوری که $(a^3,b^3)+(6a^2,6b^2)-1600=0$. (a,b) چند است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۲- فرض کنید $(a^2,b^3)=1$. در این صورت $(a^2+2ab, a+b)$ چند است؟

۱) ۱ ۲) $|b|$ ۳) $|a|$ ۴) $|a+b|$

۶۳- حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی ۲۱۶۰ و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان ۱۲ است. عدد کوچک‌تر چند است؟ (اعداد مضرب یکدیگر نیستند).

۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۶۴- اگر $(2a,3b)=6$ ، کدام گزینه ممکن است درست نباشد؟

۱) $3|a$ ۲) $2|b$ ۳) $(a,b)|6$ ۴) $(a,b)=1$

۶۵- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی ۶ و عدد بزرگ‌تر ۷۲ است. عدد کوچک‌تر چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

۶۶- اگر کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{ax+by \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$ برابر ۱۲ باشد، $7a+14b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۴۲ ۳) ۱۲۶ ۴) ۲۵۲

۶۷- به ازای چند عدد دو رقمی a، $(3a+1, 7a-2)=1$ ؟

۱) ۸۱ ۲) ۸۲ ۳) ۸۳ ۴) ۸۴

۶۸- $(50!+2, 48!+1)$ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴۹

۶۹- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $A=16a+8$ و $B=16a+32$ به ازای مقادیر مختلف a با شرط $A,B>0$ چند عدد مختلف می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مشترک

۷۰- اعداد ۵۴ و ۳۶ چند مضرب مشترک طبیعی ۳ رقمی دارند؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۷۱- اگر $(a,6)=3$ و a عددی طبیعی باشد، $[a^3,9]$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۵۴ ۴) $|a^3|$

۷۲- چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۴۰۰۰ وجود دارد که مضرب هر سه عدد ۱۸، ۲۴ و ۱۵ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۷۳- فرض کنید $(a,300)=6$. در این صورت $[a,120]$ چند است؟ $(a\in\mathbb{N})$

۱) a ۲) 15a ۳) 20a ۴) 30a

۷۴- اگر $a=6(a,b)$ و $[a,b]=ac$ ، c برابر کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۷۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $(a,b)=10$ و $a+b=180$ ، در این صورت بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای $[a,b]$ چند است؟

۱) ۸۱۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۷۷۰ ۴) ۶۵۰

۷۶- چند عدد دو رقمی مانند a وجود دارد که $[a,10]|20$ ؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۱ ۳) ۳۹ ۴) ۴۰

۷۷- a و b اعدادی طبیعی‌اند و کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی $\{ma+nb \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ برابر ۸ است. هرگاه $\frac{[a,b]}{a-b}=\frac{63}{2}$ ، b چند است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۵۶

۷۸- اگر a و b دو عدد متمایز باشند و $2ab-7(a,b)=3[a,b]$ ، $|a-b|$ چند است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

۷۹- اگر $5M=9d+11$ و $d\neq 1$ (d بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و M کوچک‌ترین مضرب مشترک) آن‌گاه مجموعه دو عدد کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۶۵ ۳) ۳۳ ۴) ۶۶

۸۰- چند زوج عدد طبیعی وجود دارد که بین کوچک‌ترین مضرب مشترک و خود دو عدد رابطه‌ی $M=a+b$ برقرار باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

هم‌نهشتی‌های عددی

۸۱- اگر $2a+7b=3$ ، باقی‌مانده‌ی تقسیم $4a^2+1$ بر ۷ چند است؟

) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۲- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۱۱ برابر ۹ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $2a^2+a+1$ بر ۱۱ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۸۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم 19^{52} بر ۸ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۴- باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^{107} بر ۱۵ چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۸۵- باقی‌مانده‌ی تقسیم $2^{17}\times 3+3^{15}\times 8$ بر ۱۳ چند است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۶- ۱۵ خرداد سالی یکشنبه است. در این سال ۱۵ دی چه روزی است؟

۱) شنبه ۲) یکشنبه ۳) سه‌شنبه ۴) پنجشنبه

۸۷- تعدادی لیوان (بیش از ۳ لیوان) را در جعبه‌های ۱۶تایی بسته‌بندی کرده‌ایم. ۳ لیوان باقی مانده است. همان تعداد لیوان را در جعبه‌های ۲۸تایی بسته‌بندی کرده‌ایم، همان سه لیوان باقی مانده است. حداقل تعداد لیوان‌ها کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۲۰

۸۸- باقی‌مانده‌ی تقسیم 5^{121} بر ۴۵ چند است؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۸۹- باقی‌مانده‌ی تقسیم 9^{184} بر ۱۵ چند است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۹۰- باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^{132} بر ۱۳ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۹۱- باقی‌مانده‌ی تقسیم $13^{19}+12^{19}$ بر ۱۹ چند است؟

۱) ۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۹۲- باقی‌مانده‌ی تقسیم $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots+10^{10}$ بر ۱۱ چند است؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۷

۹۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم $17^{18}+19^{16}$ بر 17×19 چند است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳۶

۹۴- به ازای چند عدد دو رقمی مانند n ، $n^{۲} \overset{۱۵}{\equiv} ۲n$ ؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۹۵- به ازای چند عدد دورقمی مانند n، $۱۶ \mid ۳^{n} + ۱۷$ ؟

۱) ۶۵ ۲) ۴۸ ۳) ۲۵ ۴) ۲۳

۹۶- اگر $a \overset{۲۰}{\equiv} ۱۷$ و $b \overset{۸}{\equiv} ۵$ ، باقی‌مانده‌ی a^{b} بر ۲۰ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۱۷

۹۷- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۳^{۵۷} + ۴^{۵۷} + ۵^{۵۷} + ۶^{۵۷}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱

۹۸- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۶^{۱۳۸۲} + ۷^{۱۳۸۲}$ بر ۴۲ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱

۹۹- اگر $a = ۸n + ۳$ و $n \in \mathbb{N}$ ، باقی‌مانده‌ی $a + a^{۲} + a^{۳} + a^{۴}$ بر شانزده کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۰۰- اگر عدد a مضرب ۱۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $(۱۷a+۱)^{۴} + (۱۷a+۲)^{۴} + (۱۷a+۳)^{۴} + (۱۷a+۴)^{۴} + (۱۷a+۵)^{۴}$ بر چهار کدام است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۱۰۱- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۷!$ بر ۱۹ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱۸

۱۰۲- باقی‌مانده‌ی تقسیم $۵^{۱۰۰}$ بر ۳۵ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۰۳- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۱۲ برابر ۸ و بر ۱۱ برابر ۳ می‌باشد. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۳ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۹ ۳) ۱۹ ۴) ۱۴

۱۰۴- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه رقمی a که $A = (۱۳۸۹)^{۱۰۰} + a$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

معادله‌ی همنهشتی

۱۰۵- شرط لازم و کافی برای این‌که معادله‌ی همنهشتی $۲۷x \overset{۱۵}{\equiv} ۲a + ۱$ ، جواب داشته باشد ، کدام است؟

۱) $a \overset{۳}{\equiv} ۱$ ۲) $a \overset{۳}{\equiv} ۲$ ۳) $a \overset{۵}{\equiv} ۲$ ۴) $a \overset{۵}{\equiv} ۳$

۱۰۶- جواب معادله‌ی همنهشتی $۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۳$ به کدام صورت است؟

۱) $۱۳k - ۲$ ۲) $۱۳k - ۳$ ۳) $۱۳k - ۵$ ۴) $۱۳k - ۶$

۱۰۷- معادله‌ی $۲۶! \overset{۳^{x}}{\equiv} ۰$ دارای چند جواب طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۴

۱۰۸- معادله‌ی همنهشتی $۶x \overset{۹}{\equiv} ۲a + ۵$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای جواب است. صورت نمایش a ، بر حسب $k \in \mathbb{Z}$ کدام است؟

۱) $۱ + ۲k$ ۲) $۱ + ۳k$ ۳) $۲ + ۳k$ ۴) $۳ + ۲k$

۱۰۹- اگر $x + x^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۲$ ، کدام گزینه یکی از جواب‌های معادله است؟

۱) $۴k - ۱$ ۲) $۴k + ۳$ ۳) $۴k - ۲$ ۴) $۴k$

۱۱۰- معادله‌ی همنهشتی $x^{۳} \overset{۶}{\equiv} x$ چند جواب طبیعی دو رقمی دارد؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۰ ۳) ۴۱ ۴) ۹۰

۱۱۱- رقم دهگان کوچک‌ترین عدد سه رقمی a که در رابطه‌ی همنهشتی $a^7 + 34 \overset{7}{\equiv} 1$ صدق کند، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ه جواب معادله‌ی همنشهتی $7x \overset{19}{\equiv} 34$ باشد، چند است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

۱۱۳- معادله‌ی همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 2$ ، با کدام معادله جواب‌های یکسان دارد؟

۱) $2x \overset{3}{\equiv} 1$ ۲) $2x \overset{6}{\equiv} 1$ ۳) $(4x)^2 \overset{36}{\equiv} 4$ ۴) $(4x)\times 6 \overset{6}{\equiv} (2\times 6)$

آزمون‌های بخش‌پذیری

۱۱۴- اگر رقم یکان اعداد طبیعی $2x+5$ و $x+1$ یکسان باشند، رقم یکان $3x^{35}+1$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۷

۱۱۵- رقم یکان $23^{23^{23}}$ چند است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴) ۹

۱۱۶- دو رقم سمت راست 7^{151} چند است؟

۱) ۴۳ ۲) ۴۹ ۳) ۵۱ ۴) ۵۷

۱۱۷- عدد $\overline{42a65}$ بر ۹ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۱۱ چند است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۹

۱۱۸- اگر عدد پنج رقمی $\overline{2xy35}$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم این عدد بر ۹ چند است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۱۹- به ازای کدام مقدار a، عدد پنج رقمی $\overline{bab4b}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۲۰- عدد $\overline{3a524}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۱۱ چند است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۲۱- عدد $\overline{a3b21}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. بیش‌ترین مقدار $a+b$ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

۱۲۲- عدد $\overline{ab3432}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است، $a+2b$ چند است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۸

۱۲۳- عدد شش رقمی $\overline{5a7b3c}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است، بیش‌ترین مقدار $a+b$ چند است؟

۱) ۹ ۲) ۱۳ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۲۴- یک رابطه‌ی همنهشتی، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را به ۱۱ کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند و عدد سه رقمی $\overline{4\times 6}$ در کلاس هم‌ارزی $[9]$ قرار دارد. باقی‌مانده‌ی $\overline{4\times 6}$ بر ۹ چند است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۵- رقم یکان $(1383)^{1!} + (1383)^{3!} + \dots + (1383)^{1383}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۵

۱۲۶- چند عدد پنج رقمی به صورت $\overline{82y6x}$ وجود دارد که بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۲۷- مجموع دو عدد $\overline{4b56}$ و $\overline{233a}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۱۲۸- چند عدد به صورت $\overline{51xy32}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

معادله‌ی سیاله‌ی خطی

۱۲۹- به ازای کدام مقدار n، معادله‌ی سیاله‌ی $۶۰x + ۸۴y = ۵n - ۱$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۹ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۱۳۰- فرض کنید معادله‌ی سیاله‌ی $ax + ۱۲y = ۳۰$ جواب نداشته باشد، کدام معادله قطعاً جواب ندارد؟

۱) $ax + ۶y = ۱۰$ ۲) $ax + ۸y = ۱۰$ ۳) $ax + ۱۰y = ۶$ ۴) $ax + ۱۴y = ۱۰$

۱۳۱- فرض کنید به تعداد کافی وزنه‌های ۳ کیلویی و ۵ کیلویی در اختیار داشته باشیم. معین کنید به چند طریق می‌توان جسمی به وزن ۳۲ کیلو را با این وزنه‌ها توزین کرد، به نحوی که این نوع وزنه‌ها فقط در یک کفه‌ی ترازو قرار گیرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۲- اگر $۳x + y \overset{۴}{\equiv} ۲$ و $۲x - ۵y \overset{۴}{\equiv} ۱$، y به کدام صورت است؟

۱) $۴k$ ۲) $۴k + ۱$ ۳) $۴k + ۲$ ۴) $۴k + ۳$

پاسخ تشریحی:

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

برای این‌که $y \in \mathbb{Z}$ ، داریم:

$$۳x^۲ - ۲ | ۱ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲ = \pm ۱$$

که فقط معادله‌ی $۳x^۲ - ۲ = ۱$ دارای جواب‌های صحیح $x = ۱, -۱$ است.

۲- گزینه ۲ پاسخ است.

از رابطه‌های $n^۲ + ۱ | ۵n - ۳$ (فرض) و $n^۲ + ۱ | n^۲ + ۱$ (بازتابی) ضریب n را حذف می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} n^۲ + ۱ | ۵n - ۳ \\ n^۲ + ۱ | n^۲ + ۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^۲ + ۱ | ۲۵(n^۲ + ۱) - (۵n - ۳)(۵n + ۳) \Rightarrow n^۲ + ۱ | ۳۴$$

پس $n^۲ + ۱$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۳۴ است، لذا $n^۲ + ۱ = ۱, ۲, ۱۷, ۳۴$ که در مجموعه‌ی اعداد طبیعی فقط به ازای $n = ۱$ و $n = ۴$ رابطه‌ی موردنظر برقرار است.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

تنها عددی که بر صفر بخش‌پذیر است، خود صفر است ($\circ | a \Rightarrow a = \circ$) ، پس از $\circ | ۳n^۳ - ۴n^۲ + n$ نتیجه می‌گیریم:

$$۳n^۳ - ۴n^۲ + n = \circ \Rightarrow n(۳n^۲ - ۴n + ۱) = \circ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱$$

۴- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a^۲ - ۴ | ۲۵ \Rightarrow (a - ۲)(a + ۲) | ۲۵ \xrightarrow{a - ۲ = m} m(m + ۴) | ۲۵$$

با توجه به مقسوم‌علیه‌های (شمارنده‌های) طبیعی ۲۵ (۲۵ و ۵ و ۱) ، مشخص می‌شود مقسوم‌علیه‌هایی که تفاضلشان ۴ است اعداد ۵ و ۱ هستند، پس $m + ۴ = ۵$ ، در نتیجه $a = ۳$ ، لذا فقط یک مقدار طبیعی برای a وجود دارد.

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

با استفاده از رابطه‌ی $۲n + ۳ | ۲n + ۳$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} ۲n + ۳ | ۹n + ۱۷ \\ ۲n + ۳ | ۲n + ۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲n + ۳ | ۲(۹n + ۱۷) - ۹(۲n + ۳) \Rightarrow ۲n + ۳ | ۷$$

لذا $۲n + ۳ = \pm ۱ , \pm ۷$ که برای n مقادیر صحیح $-۱, -۲, ۲$ و -۵ به دست می‌آید.

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{matrix} a | ۲n^۲ + ۱ \\ a | ۴n^۲ + ۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a | ۴n^۲ + ۶ - ۲(۲n^۲ + ۱) \Rightarrow a | ۴$$

پس a یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۴ یعنی یکی از اعداد ۱، ۲ و ۴ است. اما اگر به فرض سؤال دقت کنید، چون $۲n^۲ + ۱$ یک عدد فرد است و هیچ عدد فردی مقسوم‌علیه زوج ندارد، لذا فقط $a = ۱$ قابل قبول است.

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر ۲۴ مضرب فرد m باشد، آن‌گاه $x^m + ۱ | x^{۲۴} + ۱$ ، لذا $x^۸ + ۱ | x^{۲۴} + ۱$.

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

با فرض صحیح بودن q داریم:

$$a = ۱۱q + ۹ \Rightarrow -a = -(۱۱q + ۹) = ۱۱(-q) - ۹ = ۱۱(-q) - ۱۱ + ۲ = ۱۱\overbrace{(-q - ۱)}^{q_۱} + ۲ = ۱۱q_۱ + ۲$$

به‌طور کلی اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b برابر r باشد و $r \neq \circ$ ، باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ برابر است با $b - r$.

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$-۱۷k + ۶۳ = -۱۷k + ۳ \times ۱۷ + ۱۲ = -۱۷(k - ۳) + ۱۲$$

با فرض $-k + ۳ = k'$ داریم: $-۱۷(k - ۳) + ۱۲ = ۱۷k' + ۱۲$ ، لذا کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی موردنظر برابر است با ۱۲.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a = 70q + q^2 \xrightarrow{0\le r<b} q^2 < 70 \xrightarrow{q\in\mathbb{N}} 1 \le q \le 8$$

پس ۸ مقدار برای q و در نتیجه ۸ مقدار برای a وجود دارد.

دقت کنید که اگر $q \le 0$ ، در این صورت a، عددی غیرطبیعی خواهد بود.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.

فرض کنید $a = bq + q$ ، رابطه‌ی تقسیم موردنظر باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = (b-3)(q+5) + 0 \xrightarrow{a=bq+q} bq + q = (b-3)(q+5) \Rightarrow 4a = 5(b-3)$$

سمت راست رابطه‌ی فوق مضرب ۵ است، لذا $4q$ نیز باید مضرب ۵ باشد، در نتیجه $q = 5k$.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

فرض کنید $a = bq + r$ ، رابطه‌ی تقسیم موردنظر باشد. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$136 + a = (b+3)q + r + 1 \xrightarrow{a=bq+r} 136 + (bq + r) = (b+3)q + r + 1 \Rightarrow q = 45$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال $a = 31q + 11$. اگر k واحد به مقسوم اضافه کنیم، داریم $a + k = 31q + 11 + k$. اما برای این که مقسوم‌علیه و خارج قسمت تغییر نکند باید شرط باقی‌مانده را لحاظ کنیم:

$$0 \le r < b \Rightarrow 0 \le 11 + k < 31 \Rightarrow -11 \le k < 20 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k_{max} = 19$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

با فرض $a = bq + r$، داریم:

$$500 + b = bq + 50 \Rightarrow b = \frac{450}{q-1} \xrightarrow{b>r} \frac{450}{q-1} > 50 \Rightarrow q < 10 \xrightarrow{q\in\mathbb{N}} q \in \{1,2,\dots,9\}$$

به ازای مقادیر ۵، ۸ و ۹ برای b عدد غیرصحیح به دست می‌آید و به ازای $q = 1$ نیز b تعریف نمی‌شود. پس q یکی از مقادیر ۲، ۳، ۴، ۶ و ۷ است.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.

مطابق فرض داریم:

$$\left.\begin{aligned} a &= bq_1 + 5 \\ 2a &= bq_2 + 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2(bq_1 + 5) = bq_2 + 4 \Rightarrow b(q_2 - 2q_1) = 6 \Rightarrow b \mid 6$$

لذا $b = 1,2,3,6$. اما چون باقی‌مانده‌ها ۵ و ۴ هستند، پس باید $b \ge 6$. در نتیجه فقط $b = 6$ قابل قبول است.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$187 = bq + 17, b > 17 \Rightarrow bq = 187 - 17 \Rightarrow bq = 170 \Rightarrow b \in \{1,2,5,10,17,34,85,170\}$$

اما چون $b > 17$ ، فقط $b = 34,85,170$ قابل قبول است.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر a عدد صحیح باشد، a^2 به یکی از صورت‌های $5k$، $5k+1$ و $5k+4$ است. لذا معادله‌ی $a^2 = 5b + 12$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد، زیرا:

$$a^2 = 5b + 12 = 5b + 10 + 2 = 5(b+2) + 2 \xrightarrow{b+2=k} a^2 = 5k + 2$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

در صورتی $a^2 = 7k + 2$ که $a = 7k \pm 3$. لذا داریم:

$$1 \le a \le 50 \Rightarrow 1 \le 7k \pm 3 \le 50$$

$$1 \le 7k + 3 \le 50 \Rightarrow \frac{-2}{7} \le k \le \frac{47}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 0 \le k \le 6$$

$$1 \le 7k - 3 \le 50 \Rightarrow \frac{4}{7} \le k \le \frac{53}{7} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} 1 \le k \le 7$$

لذا در مجموعه‌ی $\{1,2,\dots,50\}$، $6 - 0 + 1 = 7$ عدد به صورت $7k + 3$ و $7 - 1 + 1 = 7$ عدد دیگر نیز به صورت $7k - 3$ وجود دارد. در نتیجه جواب سؤال ۱۴ است.

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

داریم $5a+14b=47q+7$. در نتیجه:

$$50a+140b=470q+70 \Rightarrow 47a+3a+141b-b=47(10q)+47+23$$
$$\Rightarrow 3a-b=47(10q-a-3b+1)+23 \Rightarrow 3a-b=47q_1+23$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=4q+3 \Rightarrow 3a=12q+9 \\ a=6q'+3 \Rightarrow 2a=12q'+6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-2a=12\underbrace{(q-q')}_{q''}+3 \Rightarrow a=12q''+3$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $8k+1$ نوشت. پس داریم:

$$a^2+6=8k+1+6=8k+7=4(2k+1)+3=2(4k+3)+1$$

پس باقی‌مانده‌ی a^2+6 بر اعداد ۲، ۴ و ۸ به ترتیب برابر ۱، ۳ و ۷ است.

راه‌حل دوم: به جای a، عدد ۱ را قرار دهید!

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a=47q+r\,, r=q^2 \Rightarrow 0 \le q^2 < 47 \Rightarrow q \in \{0,1,\dots,6\}$$

چون بزرگ‌ترین مقدار a را می‌خواهیم، باید $q=6$، در این صورت: $a=47\times6+6^2=318$ که مجموع ارقام آن ۱۲ است.

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر عدد A نمایش عددی در مبنای b باشد، آن‌گاه نمایش b^nA در مبنای b به صورت $A\underbrace{00\dots0}_{n \text{ تا}}$ خواهد بود. لذا:

$$81A=3^4\times A=3^4\times(21)_3=(210000)_3$$

پس 81A در مبنای ۳، ۴ صفر دارد.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ است.

راه‌حل اول:

ارقام یک عدد در مبنای ۴، حداکثر ۳ هستند. پس بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ۴، عدد $(33333)_4$ است، که باید آن را به مبنای ۱۰ تبدیل کنیم:

$$A=(33333)_4=3+3\times4^1+3\times4^2+3\times4^3+3\times4^4=3(1+4^2+4^3+4^4)$$

طبق اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(4^4+4^3+4^2+4+1)(4-1)=4^5-1 \Rightarrow A=4^5-1=1024-1=1023$$

راه‌حل دوم:

کوچک‌ترین عدد شش رقمی در مبنتای ۴، عدد $b=(100000)_4$ است، که واضح است از عدد a، یعنی بزرگ‌ترین عدد ۵ رقمی در مبنای ۴، یک واحد بیش‌تر است. پس:

$$a=b-1\,, b=1\times4^5 \Rightarrow a=4^5-1=1023$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(222)_a=146 \Rightarrow 2a^2+2a+2=146 \Rightarrow 2a^2+2a-144=0 \Rightarrow (a-8)(a+9)=0 \Rightarrow a=8$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$A=(5103)_6=5\times6^3+1\times6^2+0\times6+3\times6^0 \Rightarrow \frac{A}{3}=5\times2\times6^2+2\times6+1=(6+4)\times6^2+2\times6+1=$$
$$6^3+4\times6^2+2\times6+1=(1421)_6$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$(2021)_3=(3a1)_4 \Rightarrow 2\times3^3+0\times3^2+2\times3+1=3\times4^2+a\times4+1 \Rightarrow a=3$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(xy۴)_۵ = (۱z۵)_۸ \Rightarrow ۴+۵y+۲۵x = ۵+۸z+۶۴ \Rightarrow ۵(۵x+y-۱۳) = ۸z \Rightarrow ۵|z$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است.

در مبنای عددنویسی ۲، $۱+۱=(۱۰)_۲$ ، لذا:

$$\begin{array}{r} ۱۱۰۱۱۰ \\ ۱۰۱۰ \\ \hline ۱۰۰۰۰۰۰ \end{array}$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\overline{abcd} = ۱۰۵\overline{ab} \Rightarrow ۱۰۰\overline{ab} + \overline{cd} = ۱۰۵\overline{ab} \Rightarrow ۵\overline{ab} = \overline{cd}$$

$$۵\overline{ab} < ۱۰۰ \Rightarrow \overline{ab} < ۲۰ \Rightarrow ۱۰ \le \overline{ab} \le ۱۹$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(\overline{۳a})_x = (\overline{a۳})_{x-۲} \Rightarrow ۳x+a = a(x-۲)+۳ \Rightarrow x = \frac{۳a-۳}{a-۳} = ۳+\frac{۶}{a-۳}$$

اما چون x عددی صحیح است، لذا باید $a-۳|۶$ ، در نتیجه $a-۳$ یکی از مقسوم‌علیه‌های ۶ است:

$$a-۳=۱ \Rightarrow a=۴, x=۹$$

$$\left.\begin{array}{l} a-۳=۲ \Rightarrow a=۵, x=۶ \\ a-۳=۳ \Rightarrow a=۶, x=۵ \\ a-۳=۶ \Rightarrow a=۹, x=۴ \end{array}\right\} a < x-۲ \text{ قابل قبول نیستند زیرا باید }$$

در نتیجه $a+x=۱۳$.

۳۲- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌توانیم بنویسیم: $b \times ۴^۹ = ۲^{۱۸} \times ۳^{۱۷} \times ۲ = a$ ، که در آن $b = ۲\times ۳^۷$ و b عددی است که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. چون b مضرب ۴ نیست، وقتی در مبنای ۴ نوشته می‌شود، در سمت راست آن رقم صفر وجود ندارد (زیرا عددی که رقم راست آن صفر باشد، باقی‌مانده‌ی آن بر ۴، همان صفر می‌شود).

۳۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A = ۲+۲\times۳+۱\times۳^۲+۲\times۳^۳ = ۷۱ \Rightarrow ۸۲A = ۸۲\times۷۱ = ۱۰k+۲$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} p|۲۱^p+۵p \\ p|۵p \end{array}\right\} \Rightarrow p|۲۱^p$$

از طرفی اگر p عدد اول باشد و $p|a^n$ ، آن‌گاه $p|a$ ، لذا داریم:

$$p|۲۱^p \Rightarrow p|۲۱ \xrightarrow{\text{عدد اول } p} p=۳ \text{ یا } p=۷$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ است.

تفاضل دو عدد اول مورد نظر، عددی فرد شده است، پس یکی از آن‌ها زوج است. لذا $q=۲$ و در نتیجه $p=۷۳$ و $pq = ۲\times۷۳ = ۱۴۶$.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر p فرد باشد، $p^۲$ نیز فرد و لذا $p^۲+۳$ زوج می‌شود (تنها عدد اول زوج ۲ است) ، پس p زوج است. به ازای $p=۲$ ، $p^۲+۱۳=۱۷$. پس تنها جواب سؤال $p=۲$ است.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ است.

سه حالت $p=۳$ ، $p=۳k+۱$ و $p=۳k+۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$p=۳ \Rightarrow ۲p+۱=۷, ۴p+۱=۱۳ \text{ قابل‌قبول}$$

$$p=۳k+۱ \Rightarrow ۲p+۱=۶k+۳=۳(۲k+۱) \text{ غیرقابل‌قبول}$$

$$p=۳k+۲ \Rightarrow ۴p+۱=۱۲k+۹=۳(۴k+۳) \text{ غیرقابل‌قبول}$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر $2^k + 1$ عددی اول باشد، k توانی از ۲ است. لذا اگر a توانی از ۲ باشد ممکن است به ازای برخی مقادیر n، عدد $(2^a)^n + 1$ اول باشد. برای مثال به ازای $a = 4$ و $n = 1$ عدد مورد نظر برابر ۱۷ است که اول است.

۳۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$n^4 - 3n^2 + 1 = n^4 - 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 - 1)^2 - n^2 = (n^2 - 1 - n)(n^2 - 1 + n)$$

چون $n^4 - 3n^2 + 1$ اول است، پس حتماً یکی از ۲ عامل تجزیه‌ی آن ۱ (در واقع عامل کوچک‌تر) است:

$$n^2 - 1 - n = 1 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 2$$

$n^4 - 3n^2 + 1$ به ازای $n = 2$ اول است.

۴۰- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر $2p + 1$ مکعب کامل باشد، داریم:

$$2p + 1 = x^3 \Rightarrow 2p = x^3 - 1 \Rightarrow 2p = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

از طرفی چون $x^3 = 2p + 1$ ، پس x عددی فرد است (x به فرم $2k + 1$ است) و لذا $x^2 + x + 1$ نیز عددی فرد است. در نتیجه $x - 1 = 2$ یا $x = 3$ و لذا $p = 13$ تنها جواب قابل‌قبول برای p است.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$7p + 1 = k^2 \Rightarrow 17p = k^2 - 1 \Rightarrow 17p = (k - 1)(k + 1)$$

چون p اول است و 17p به صورت ضرب دو عدد $k - 1$ و $k + 1$ تجزیه شده است، داریم:

$$\begin{cases} k - 1 = 17 \Rightarrow k = 18 \\ k + 1 = p \xrightarrow{k=18} p = 19 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} k + 1 = 17 \Rightarrow k = 16 \\ k - 1 = p \xrightarrow{k=16} p = 15 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $p = 19$ ، $17p + 1$ مربع کامل است.

۴۲- گزینه ۲ پاسخ است.

حالت‌های $p = 3$ و $p = 3k \pm 1$ را برای $5p^2 - 2$ بررسی می‌کنیم:

$$p = 3 \Rightarrow 5p^2 - 2 = 43 \ \text{عدد اول}$$

$$p = 3k \pm 1 \Rightarrow 5p^2 - 2 = 5(3k \pm 1)^2 - 2 = 5(3k' + 1) - 2 = 15k' + 3 = 3(5k' + 1) = 3k''$$

پس اگر $p = 3k \pm 1$ ع آن‌گاه $5p^2 - 2$ بر ۳ بخش‌پذیر است و از ۳ نیز بزرگ‌تر است و لذا مرکب خواهد بود. پس فقط $p = 3$ (یک جواب) قابل‌قبول است.

۴۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{array}{r|l} 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 2 \\ 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 2^{41} \,\|\, 44! \Rightarrow 2 \times 4^{20} \,\|\, 44!$$

$$\begin{array}{r|l} 44 & 3 \\ 14 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 3^{19} \,\|\, 44!$$

چون تعداد عوامل ۳ کمتر است، پس بزرگ‌ترین مقدار برای k عدد ۱۹ است.

۴۴- گزینه ۲ پاسخ است.

باید بزرگ‌ترین توان ۲ و ۵ را در عدد مورد نظر پیدا کنیم:

$$20^{20} \times 25^{25} \times 30^{30} = 2^{40} \times 5^{20} \times 5^{50} \times 3^{30} \times 5^{30} \times 2^{30} = 3^{30} \times 2^{70} \times 5^{100}$$

لذا عدد فوق به ۷۰ رقم صفر ختم می‌شود.

۴۵- گزینه ۲ پاسخ است.

برای عدد !۴۰ داریم:

$$۴۰! = ۱\times ۲\times ۳\times \ldots\times \underline{۱۹}\times \ldots\times \underline{۳۸}\times ۳۹\times ۴۰$$

چون $۲\times ۱۹ = ۳۸$ ، لذا ۲ عامل ۱۹ در !۴۰ وجود دارد. پس بزرگ‌ترین مقدار p ، عدد ۱۹ است، و برای ۸ عدد اول کوچک‌تر یا مساوی ۱۹ این فرض برقرار است. برای درک بهتر سؤال فرض کنید $p = ۲۳$ ، در این صورت فقط یک عامل ۲۳ در !۴۰ وجود دارد. مگر این‌که به جای !۴۰ از !۴۶ در رابطه‌ی مورد نظر استفاده کردیم.

۴۶- گزینه ۱ پاسخ است.

واضح است که تعداد عوامل ۵ در $\frac{۱۰۰!}{۵۵!}$ از تعداد عوامل ۵ در $\frac{۱۰۰!}{۵۰!}$ کم‌تر است. لذا پاسخ برابر تعداد عوامل ۵ در $\frac{۱۰۰!}{۵۵!}$ است. داریم:

$$\begin{array}{l|l} ۵۵ & ۵ \\ \hline & ۱۱ \;\big|\; ۵ \\ & \quad\;\; ۲ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|l} ۱۰۰ & ۵ \\ \hline & ۲۰ \;\big|\; ۵ \\ & \quad\;\; ۴ \end{array}$$

پس در !۱۰۰، ۲۴ عامل ۵ وجود دارد که ۱۳ تای آن در !۵۵ است، در نتیجه $۲۴ - ۱۳ = ۱۱$ عامل ۵ در $\frac{۱۰۰!}{۵۵!}$ وجود دارد.

۴۷- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به این که $۱۲ = ۲^۲\times ۳$ از $(۲^۲\times ۳)^۷ \,\big|\, a^۳$ نتیجه می‌گیریم:

$$۱۲^۷ \,\big|\, a^۳ \Rightarrow (۲^۲\times ۳)^۷ \,\big|\, a^۳ \Rightarrow ۲^{۱۴}\times ۳^۷ \,\big|\, a^۳$$

از رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم $۳^۳ \,|\, a$ و $۲^۵ \,|\, a$. لذا کوچک‌ترین مقدار a برابر است با $۲^۵\times ۳^۳ = ۶\times ۱۲^۲$.

۴۸- گزینه ۲ پاسخ است.

باید توان عدد ۱۳ را در !۴۰ پیدا کنیم. برای این کار از تقسیم متوالی ۴۰ بر ۱۳ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} ۴۰ & ۱۳ \\ \cline{2-2} \underline{۳۹} & ۳ \\ ۱ & \end{array} \Rightarrow ۱۳^۳ \,\|\, ۴۰!$$

لذا !۴۰ در مبنای ۱۳ به ۳ صفر ختم می‌شود.

۴۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$n = ۲^{۱۰}\times ۵^{۱۰}\times ۱۱^{۱۲}\times ۳^۳\times ۲^۶ = ۲^{۱۶}\times ۳^۳\times ۱۱^{۱۲}\times ۵^{۱۰}$$

عدد $n = p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\ldots p_m^{\alpha_m}$ در صورتی مربع کامل است که تمامی α_i ها زوج باشند. بنابراین جهت زوج شدن توان‌ها باید حداقل عدد ۳ را در آن ضرب کنیم.

۵۰- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $۶۰ \,|\, n$ لذا $n = ۶۰q$ ، پس داریم:

$$n \,|\, ۵۰۴۰ \Rightarrow ۶۰q \,|\, ۵۰۴۰ \Rightarrow q \,\Big|\, \frac{۵۰۴۰}{۶۰} \Rightarrow q \,|\, ۸۴$$

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت ۸۴ جواب سؤال است (چون $n = ۶۰q$ به‌ازای هر $q > ۰$ یک عدد طبیعی برای n وجود دارد):

$$۸۴ = ۲^۲\times ۳\times ۷ = \tau(۸۴) = (۲+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۲$$

۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.

باید تعداد مقسوم‌علیه‌های ۲۷۰۰ را پیدا کنیم و تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک با ۶۰ را از آن کم کنیم:

$$۲۷۰۰ = ۳^۳\times ۲^۲\times ۵^۲ = \tau(۲۷۰۰) = (۳+۱)(۲+۱)(۲+۱) = ۳۶$$

$$۶۰ = ۲^۲\times ۳\times ۵ \Rightarrow \tau(۶۰) = (۲+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۱۲$$

لذا ۲۷۰۰، ۳۶ مقسوم‌علیه مثبت دارد که ۱۲تای آن‌ها مقسوم‌علیه ۶۰ نیز می‌باشند. پس جواب $۳۶ - ۱۲ = ۲۴$ می‌باشد.

۵۲- گزینه ۲ پاسخ است.

چون $۱۸ = ۲\times ۹ = ۳\times ۶ = ۲\times ۳\times ۲$ ، لذا n یکی از صورت‌های $p^{۱۷}, pq^۸, p^۲q^۵, pq^۲r^۲$ است (p ، q و r اعداد اول هستند). پس $n^۲$ به یکی از صورت‌های $p^{۳۴}, p^۲q^{۱۶}, p^۴q^{۱۰}, p^۲q^۴r^۴$ و در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت $n^۲$ برابر ۳۵، ۵۱، ۵۵ یا ۷۵ است.

۵۳- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته۱ : فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند، در این صورت به ازای هر عدد صحیح k داریم: $(a,b)=(a\pm bk,b)$

با توجه به نکته ۱، داریم:

$$(10a-6,5a+2)=(10a-6-(10a+4),5a+2)=(-10,5a+2)=(10,5a+2)$$

اگر فرض کنیم $d=(2+5a,10)$ ، با توجه به تعریف ب.م.م : $d|10$ ، لذا d می‌تواند یکی از اعداد ۱، ۲، ۵ و ۱۰ باشد. ولی $5a+2$ نمی‌تواند مضرب ۵ و ۱۰ باشد، لذا فقط $d=1$ و $d=2$ قابل‌قبول است.

۵۴- گزینه ۳ پاسخ است.

نکته ۲: برای هر دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آن‌ها صفر نیست، دو مجموعه‌ی زیر برابرند:

$$\{ar+sb|r,s\in\mathbb{Z}\}=\{k(a,b)|k\in\mathbb{Z}\}$$

هر ترکیب خطی a و b مضربی از ب.م.م آن دو است و برعکس هر ضریبی از ب.م.م a و b را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی a و b نوشت.

با توجه به این‌که $(93,155)=31$ ، لذا با توجه به نکته ۲ داریم:

$$\{93x+155y|x,y\in\mathbb{Z}\}=\{31k|k\in\mathbb{Z}\}$$

لذا ۳۱، ۶۲ و ۹۳ اعداد دورقمی این مجموعه هستند.

۵۵- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته ۳: فرض کنید $k\in\mathbb{N}$ ، در این صورت : $(ka,kb)=k(a,b)$. با استفاده از نکته ۳ داریم:

$$(n^4,n^4+2n^3+n^2)=n^2(n^2,n^2+2n+1)=n^2(n^2,(n+1)^2)$$

نکته ۴ : اگر n عددی طبیعی باشد، در این صورت $(a^n,b^n)=(a,b)^n$

اما هر دو عدد متوالی نسبت به هم اول‌اند. پس طبق نکته ۴، $(n^2,(n+1)^2)=1$. لذا نتیجه می‌گیریم:

$$n^2(n^2,(n+1)^2)=n^2\Rightarrow n^2=16\Rightarrow n=4$$

۵۶- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به نکته ۳ ، $(6a+3,6a-3)=3(2a+1,2a-1)$. اما هر دو عدد فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند، پس $(6a+3,6a-3)=3$ و در نتیجه فقط یک جواب با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۵۷- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا دقت کنید که با توجه به نکته ۳ داریم:

$$(18a,30b)=6(3a,5b)=24\Rightarrow(3a,5b)=4$$

اما هم $(3,4)=1$ و هم $(5,4)=1$ ، بنابراین عدد ۴ از عامل‌های اول a و b حاصل‌شده، لذا $(a,b)=4$.

۵۸- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به نکته ۲ در مجموعه‌ی مورد نظر می‌توان $48x+36y$ را با $(48,36)k=12k$ جایگزین کرد.

$$\{48x+36y-14|x,y\in\mathbb{Z}\}=\{12k-14|k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-14,-2,10,\dots\}$$

لذا پاسخ سؤال ۱۰ است.

۵۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$(2a^2+4,a+1)=(2a^2+4-2(a-1)(a+1),a+1)=(6,a+1)$$

چون ضریب a در $a+1$ ، یک است، پس $a+1$ هر عدد صحیح می‌تواند باشد، لذا هر مقسوم‌علیه طبیعی ۶ می‌تواند ب.م.م ۲ عدد باشد.چون ۶، چهار مقسوم‌علیه مثبت دارد، پس جواب ۴ است.

۶۰- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به تعریف ب.م.م داریم:

$$\left.\begin{array}{l}d|3a+4b\\ d|5a-2b\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}d|3a+4b+2(5a-2b)\Rightarrow d|13a\\ d|5(3a+4b)-3(5a-2b)\Rightarrow d|26b\end{array}\right.$$

اگر عددی دو عدد را عاد کند، ب.م.م آن‌ها را نیز عاد می‌کند، پس:

$$d|(13a,26b)=13(a,2b)$$

از طرفی A فرد است، لذا با توجه به مساله‌ی (۳۲) ، داریم:

$$(a,2b)=(a,b)\xrightarrow{(a,b)=1}(a,2b)=1\Rightarrow d|13$$

۶۱- گزینه ۳ پاسخ است.

نکته ۴: اگر n عددی طبیعی باشد، در این صورت $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

با فرض $(a, b) = d$ و با توجه به نکات ۳ و ۴ داریم:

$$(a^3, b^3) = d^3, (6a^2, 6b^2) = 6d^2$$
$$d^3 + 6d^2 - 1600 = 0 \Rightarrow d^2(d+6) = 1600 = 10^2(10+6) \Rightarrow d = 10$$

۶۲- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته ۵: اگر $(a, b) = 1$ ، آن‌گاه: $(a^n, b^m) = 1$.

نکته ۶: فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند. در این صورت به ازای هر عدد صحیح k داریم: $(a, b) = (a \pm bk, b)$

چون $(a^2, b^2) = 1$ ، لذا با توجه نکته ۵: $(a, b) = 1$. از طرفی با توجه به نکته ۶ داریم:

$$(a^2 + 2ab, a+b) = (a^2 + 2ab - (a^2 + ab), a+b) = (ab, a+b)$$

اما اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، جمع و ضرب آن‌ها نسبت به هم اول است، پس $(ab, a+b) = 1$.

۶۳- گزینه ۳ پاسخ است.

فرض کنید a و b دو عدد مورد نظر باشند، با فرض $a = a'd$ و $b = b'd$ ، به طوری که $(a', b') = 1$ ، داریم:

$$ab = 2160 \Rightarrow a'b'd^2 = 2160 \xrightarrow{d=12} a'b' = 15 \Rightarrow \begin{cases} a' = 3, b' = 5 \\ a' = 15, b' = 1 \end{cases}$$

در حالت $a' = 15$ و $b' = 1$ ، a مضرب b می‌شود، پس $a' = 3$ و $b' = 5$. لذا کوچک‌تر برابر است با $a = a'd = 36$

۶۴- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر $(a, b) = d$ ، آن‌گاه $d|a$ و $d|b$ ، لذا داریم:

$$(2a, 3b) = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6|2a \Rightarrow 3|a \\ 6|3b \Rightarrow 2|b \end{cases}$$

پس گزینه‌های (۱) و (۲) همواره درست می‌باشند. برای درستی گزینه‌ی (۳) هم با فرض $(a, b) = d$ ، $a = a'd$ و $b = b'd$ داریم:

$$(2a, 3b) = 6 \Rightarrow (2a'd, 3b'd) = 6 \Rightarrow d(2a', 3b') = 6 \Rightarrow d|6$$

۶۵- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر a عدد کوچک‌تر باشد، با فرض $a = 6a'$ و $b = 72 = 6 \times 12$ ، به طوری که $(a', 12) = 1$ داریم:

$$a < 72 \Rightarrow 6a' < 72 \Rightarrow a' < 12$$
$$a' < 12, (a', 12) = 1 \Rightarrow a' \in \{1, 5, 7, 11\}$$

۶۶- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به قضیه‌ی بزو، از فرض مسأله نتیجه می‌گیریم $(a, b) = 12$. اکنون با فرض $a = a'd = 12a'$ و $b = b'd = 12b'$ ، به طوری که $(a', b') = 1$ داریم:

$$7a + 14b = 7 \times 12a' + 14 \times 12b' = 84(\overbrace{a' + 2b'}^{q}) = 84q$$

۶۷- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به فرض داریم:

$$(3a+1, 7a-2) = (7a-2-6a-2, 3a+1) = (3a+1, a-4) = (3a+1-3a+12, a-4) = (13, a-4)$$

اما شرط لازم و کافی برای این‌که $(13, a-4) = 1$ این است که $a \neq 13q + 4$ پس اعداد دورقمی که به صورت $13q + 4$ باشند مورد نظر نمی‌باشد:

$$10 \leq 13a + 4 \leq 99 \Rightarrow 1 \leq a \leq 7$$

لذا جواب برابر است با $90 - 7 = 83$.

۶۸- گزینه ۱ پاسخ است.

با فرض $(50!+2, 48!+1)$ داریم:

$$d|50!+2-50 \times 49(48!+1) \Rightarrow d|50 \times 49 - 2$$

از طرفی داریم:

$$50 \times 49 - 2 = (49+1)49 - 2 = 49^2 + 49 - 2 = (49+2)(49-1) = 51 \times 48 = 17 \times 3 \times 48$$

اما $48!|17 \times 3 \times 48$ در نتیجه $d|48!$ و چون با توجه به فرض $d|48!+1$ لذا $d|1$.

۶۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$d = (A, B) = (۸(۲a+۱), ۸(۲a+۴)) = ۸(۲a+۱, ۲a+۴) = ۸(۲a+۱, ۲a+۴-۲a-۱) = ۸(۲a+۱, ۳) \Rightarrow d = ۸\times۱ \text{ یا } ۸\times۳$$

۷۰- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم هر مضرب مشترک دو عدد صحیح، مضرب ک.م.م آن دو عدد است. لذا باید تعداد اعداد ۳رقمی طبیعی را پیدا کنیم که مضرب $[۵۴,۳۶] = ۱۰۸$ باشند. برای این منظور داریم $۱۰۰ \le ۱۰۸k \le ۹۹۹$ و در نتیجه $۱ \le k \le ۹$. لذا $۹ = ۱ + ۱ - ۹$ مضرب مشترک ۳ رقمی طبیعی برای اعداد ۵۴ و ۳۶ وجود دارد.

۷۱- گزینه ۴پاسخ است.

چون $(a,۶) = ۳$ داریم:

$$۳ | a \Rightarrow ۳^۲ | a^۳ \Rightarrow [a^۳, ۳^۲] = |a^۳|$$

۷۲- گزینه ۱ پاسخ است.

هر عدد که مضرب مشترک هر ۳عدد ۱۸، ۲۴ و۱۵ باشد ضریبی از $[۱۸,۱۵,۲۴] = ۳۶۰$ است. لذا برای پیدا کردن تعداد آن‌ها داریم:

$$۱ \le ۳۶۰k < ۴۰۰۰ \Rightarrow ۱ \le k \in \{۱, ۲, \cdots, ۱۱\}$$

۷۳- گزینه۳ پاسخ است.

با فرض $a = a'd = ۶a'$ ، داریم:

$$(a, ۳۰۰) = ۶ \Rightarrow (۶a', ۳۰۰) = ۶ \Rightarrow (a', ۵۰) = ۱$$

$$[a, ۱۲۰] = [۶a', ۱۲۰] = ۶[a', ۲۰]$$

اما چون a' نسبت به ۲ و ۵ اول است، نسبت به۲۰ نیز اول است، پس $[a', ۲۰] = ۲۰a'$ و لذا خواهیم داشت:

$$[a, ۱۲۰] = ۶ \times ۲۰a' \xrightarrow{a=۶a'} [a, ۱۲۰] = ۲۰a$$

۷۴- گزینه ۳پاسخ است.

با فرض $(a,b) = d$ ، $a = a'd$ و $b = b'd$ که $(a',b') =$ ، داریم:

$$a = ۶(a,b) \Rightarrow a'd = ۶d \Rightarrow a' = ۶$$

از طرفی با توجه به قضیه (۱۷) داریم:

$$[a,b] = \frac{ab}{d} \xrightarrow{[a.b]=ac} ac = \frac{ab}{d} \Rightarrow a'dc = \frac{a'db'd}{d} \Rightarrow c = b'$$

لذا چون $(a',b') = ۱$ ، با توجه به این که $a' = ۶$ و $b' = c$ ، باید c طوری انتخاب شود که $(c,۶) = ۱$.

۷۵- گزینه ۳ پاسخ است.

فرض کنید $a = a'd = ۱۰a'$ و $b = b'd = ۱۰b'$ که $(a',b') = ۱$ با توجه به فرض داریم:

$$a + b = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۰a' + ۱۰b' = ۱۸۰ \Rightarrow a' + b' = ۱۸$$

از طرفی می‌دانیم $[a.b] = \frac{ab}{(a,b)}$ ، لذا هر چه اختلاف a' و b' کم‌تر باشد $۱۰a'b'$ و در نتیجه $[a,b]$ بزرگ‌تر خواهد بود.با توجه به این که $a' + b' = ۱۸$ و $(a',b') = ۱$ ، کم‌ترین اختلاف بین a' و b' در حالت $a' = ۷$ و $b' = ۱۱$ رخ می‌دهد که در این صورت $[a,b] = ۱۰ \times ۷۷$

۷۶- گزینه ۱ پاسخ است.

چون $۲ \times ۵ = ۱۰$ و $۵ \times ۲^۲ = ۲۰$ پس شرط لازم و کافی برای این‌که $۲۰ | [a, ۱۰]$ این است که $۴ | a$ لذا برای پیدا کردن جواب سؤال داریم:

$$۱۰ \le ۴k \le ۹۹ \Rightarrow ۳ \le k \le ۲۴$$

در نتیجه پاسخ برابراست با $۳۲ = ۱ + ۳ - ۳۴$.

۷۷- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به قضیه بزو: $(a,b) = ۸$.اکنون با فرض $a = ۸a'$ و $b = ۸b'$ به طوری $(a',b') = ۱$ ،داریم:

$$\frac{[a,b]}{a-b} = \frac{۶۳}{۲} \Rightarrow \frac{a'b'}{a'-b'} = \frac{۶۳}{۲} \Rightarrow \frac{a'b'}{a'-b'} = \frac{۶۳}{۲}$$

از طرفی چون $(a',b') = ۱$ ، لذا $(a'b', a'-b') = ۱$،پس با دو کسر تحویل ناپذیر مواجه‌ایم و داریم:

$$a'b' = ۶۳, a' - b' = ۲ \Rightarrow a' = ۹, b' = ۷ \Rightarrow b = b'd = ۵۶$$

۷۸- گزینه ۱ پاسخ است.

با فرض $a=a'd$ و $b=b'd$ به طوری که $(a',b')=1$، داریم:

$$2ab-7(a,b)=3[a,b]\xrightarrow{[a,b]=a'b'd}2a'b'd^2-7d=3a'b'd\Rightarrow a'b'(2d-3)=7$$

چون ۷عدد اول است،نتیجه می‌گیریم یا $a'b'=1$ و $2d-3=7$ ، که در این صورت $a'=b'=1$ و با متمایز بودن a و b در تناقض است و یا $a'b'=7$ و $2d-3=1$ ،که در این صورت داریم:

$$d=2,a'=1,b'=7\Rightarrow |a-b|=|a'd-b'd|=12$$

۷۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$(a,b)=d\Rightarrow a=da',b=db',(a',b')=1,d\neq 1$$
$$5M=9d+11\Rightarrow 5a'b'd=9d+11\Rightarrow d(5a'b'-9)=11$$
$$\Rightarrow d|11\xrightarrow{d\neq 1}d=11\xrightarrow{d(5a'b'-9)=11}5a'b'-9=1\Rightarrow a'b'=2\Rightarrow \{a',b'\}=\{1,2\}$$

بنابراین : $a+b=d(a'+b')=11(2+1)=33$

۸۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(a,b)=d\Rightarrow a=da' \quad , \quad b=db' \quad , \quad (a',b')=1$$
$$M=a+b\Rightarrow a'b'd=a'd+b'd\Rightarrow a'b'=a'+b'\Rightarrow a'b'-a'-b'=0$$
$$\Rightarrow (a'-1)(b'-1)=1\Rightarrow a'-1=b'-1=1\Rightarrow a'=b'=2$$

ولی چون $(a',b')=1$ ، جواب بالا غیرقابل‌قبول است. پس اعدادی با این شرایط وجود ندارد.

۸۱- گزینه ۱ پاسخ است.

از رابطه‌ی $2a+7b=3$ نتیجه می‌گیریم $2a-3=7(-b)$، لذا با توجه به تعریف همنهشتی می‌توان نوشت:

$$2a\overset{7}{\equiv}3\Rightarrow 4a^2+1\overset{7}{\equiv}3^2+1\Rightarrow 4a^2+1\overset{7}{\equiv}10\overset{7}{\equiv}3$$

۸۲- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به فرض سؤال $a\overset{11}{\equiv}9$ که برای راحتی در محاسبات داریم:

$$a\overset{11}{\equiv}-2\Rightarrow 2a^2+a+1\overset{11}{\equiv}2(-2)^2+(-2)+1\Rightarrow 2a^2+a+1\overset{11}{\equiv}7$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $2a^2+a+1$ بر ۱۱ برابر ۷ است.

۸۳- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا دقت کنید که $19\overset{8}{\equiv}3$ ، لذا $19^{52}\overset{8}{\equiv}3^{52}$. داریم:

$$3^2\overset{8}{\equiv}1\xrightarrow{52=2\times 26}(3^2)^{26}\overset{8}{\equiv}1\Rightarrow 3^{52}\overset{8}{\equiv}1$$

۸۴- گزینه ۴ پاسخ است.

محاسبه را از توان‌های کوچک ۷ شروع می‌کنیم:

$$7^2\overset{15}{\equiv}1\Rightarrow (7^4)^{26}\overset{15}{\equiv}1\Rightarrow (7^4)^{26}\times 7^3\overset{15}{\equiv}7^3\Rightarrow 7^{107}\overset{15}{\equiv}7^3$$

در محاسبات اولیه دیدیم که $7^3\overset{15}{\equiv}-2$ ، لذا داریم : $7^{107}\overset{15}{\equiv}-2\overset{15}{\equiv}13$

۸۵- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا باقی‌مانده‌ی 3^{15} و 2^{17} را بر ۱۳ پیدا می‌کنیم:

$$3^3\overset{13}{\equiv}1\xrightarrow{15=3\times 5}3^{15}\overset{13}{\equiv}1$$
$$2^4\overset{13}{\equiv}3\Rightarrow 2^5\overset{13}{\equiv}6\Rightarrow 2^6\overset{13}{\equiv}12\overset{13}{\equiv}-1\xrightarrow{17=2\times 6+5}(2^6)^2\times 2^5\overset{13}{\equiv}(-1)^2\times 2^5\Rightarrow 2^{17}\overset{13}{\equiv}32\overset{13}{\equiv}6$$

لذا برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی $8\times 13^{15}+3\times 2^{17}$ داریم:

$$8\times 13^{15}+3\times 2^{17}\overset{13}{\equiv}8\times(1)+3(6)\overset{13}{\equiv}0$$

۸۶- گزینه ۴ پاسخ است.

۱۵خرداد، $2\times 31+15$ امین روز سال است (۲ ماه فروردین و اردیبهشت و ۱۵ روز از خرداد). چون هفته ۷ روز است داریم:

$2\times 31+15\overset{7}{\equiv}0 \Rightarrow$ صفرمین روز سال یکشنبه است.

حال ۱۵ دی، $6\times 31+3\times 30+15$ امین روز سال است. داریم:

$$6\times 31+3\times 30+15\overset{7}{\equiv}(-1)(3)+3(2)+1\overset{7}{\equiv}4$$

چون چهارمین روز سال پنج‌شنبه است، لذا ۱۵ دی نیز پنجشنبه است.

۸۷- گزینه ۳ پاسخ است.

نکته ۱: فرض کنید $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$، در این صورت : $a\overset{[m,n]}{\equiv}b$

اگر x تعداد لیوان‌ها باشد، فرض سؤال با روابط $x\overset{16}{\equiv}3$ و $x\overset{28}{\equiv}3$ هم‌ارز است. اکنون داریم:

$$\left.\begin{matrix} x\overset{16}{\equiv}3 \\ x\overset{28}{\equiv}3 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{نکته}]{[16,28]=112} x\overset{112}{\equiv}3 \Rightarrow x=112k+3$$

که حداقل تعداد لیوان‌ها به ازای $k=1$ برابر است با $112+3=115$.

۸۸- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به این که $5\times 9=45$ ، با استفاده از نکته ۱ داریم:

$$\left.\begin{matrix} 5^3\overset{9}{\equiv}-1 \Rightarrow 5^6\overset{9}{\equiv}1 \Rightarrow 5^{121}\overset{9}{\equiv}5 \\ 5\overset{5}{\equiv}0 \Rightarrow 5^{121}\overset{5}{\equiv}5 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{[9,5]=45} 5^{121}\overset{45}{\equiv}5$$

۸۹- گزینه ۳ پاسخ است.

راه‌حل اول:

$(9,15)\neq 1$، لذا باید از تناوب باقی‌مانده‌ها استفاده کنیم:

$$9\overset{15}{\equiv}9 \Rightarrow 9^2\overset{15}{\equiv}81\overset{15}{\equiv}6 \Rightarrow 9^3\overset{15}{\equiv}54\overset{15}{\equiv}9 \Rightarrow 9^4\overset{15}{\equiv}81\overset{15}{\equiv}6,\ldots$$

همان طور که مشاهده می‌شود اعداد ۹ و ۶ به تناوب در بین باقی‌مانده‌های تقسیم توان‌های ۹ بر ۱۵ تکرار می‌شوند (توان‌های فرد باقی‌مانده‌ی ۹ و توان‌های زوج باقی‌مانده‌ی ۶ دارند)، لذا $9^{184}\overset{15}{\equiv}6$.

راه‌حل دوم:

با توجه به این‌که $3\times 5=15$ با استفاده از نکته ۱ داریم:

$$\left.\begin{matrix} \text{فرما}:\ 9^4\overset{5}{\equiv}1 \Rightarrow 9^{182}\overset{5}{\equiv}1\overset{5}{\equiv}21 \\ 9\overset{3}{\equiv}0 \Rightarrow 9^{184}\overset{3}{\equiv}0\overset{3}{\equiv}21 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{[5,3]=15} 9^{184}\overset{15}{\equiv}21\overset{15}{\equiv}6$$

۹۰- گزینه ۴ پاسخ است.

چون ۱۳ عددی اول و $(7,13)=1$ ، با توجه به قضیه‌ی فرما داریم:

$$7^{12}\overset{13}{\equiv}1 \Rightarrow 7^{120}\overset{13}{\equiv}1 \Rightarrow 7^{122}\overset{13}{\equiv}7^2\overset{13}{\equiv}49\overset{13}{\equiv}10$$

۹۱- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به نتیجه‌ی قضیه‌ی فرما داریم:

$$12^{19}\overset{19}{\equiv}12,\ 13^{19}\overset{19}{\equiv}13 \Rightarrow 12^{19}+13^{19}\overset{19}{\equiv}12+13\overset{19}{\equiv}25\overset{19}{\equiv}6$$

۹۲- گزینه ۱ پاسخ است.

۱۱ عدد اول اعداد ۱ تا ۱۰ همگی نسبت به ۱۱ اول‌اند، لذا بنا بر قضیه‌ی فرما داریم:

$$1^{10}\overset{11}{\equiv}1,2^{10}\overset{11}{\equiv}1,\ldots,10^{10}\overset{11}{\equiv}1 \Rightarrow 1^{10}+2^{10}+\ldots+10^{10}\overset{11}{\equiv}\overbrace{1+1+\ldots+1}^{10}\overset{11}{\equiv}10$$

۹۳- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به قضیه‌ی فرما داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 19^{16} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 19^{16}+17^{18} \overset{17}{\equiv} 1+0 \\ 17^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \Rightarrow 19^{16}+7^{18} \overset{19}{\equiv} 0+1 \end{array}\right\} \xrightarrow{[17,19]=17\times 19} 19^{16}+17^{18} \overset{17\times 19}{\equiv} 1$$

۹۴- گزینه ۳ پاسخ است.

به راحتی می‌توان دریافت که اگر n به پیمانه‌ی ۱۵ با یکی از ۰،۲،۵ و ۱۲ همنهشت باشد، آن‌گاه $n^2 \overset{15}{\equiv} 2n$. پس از هر ۱۵ عدد متوالی دقیقاً ۴ عدد در این همنهشتی صدق می‌کنند و لذا در مجموعه‌ی $\{10,\dots,11\}$ که شامل ۹۰ عدد متوالی است. ۲۴ عدد در این همنهشتی صدق می‌کنند (دقت کنید که ۱۰۰ جواب نیست).

۹۵- گزینه ۴ پاسخ است.

از $16 | 3^n + 17$ نتیجه می‌گیریم $3^n \overset{16}{\equiv} 9$. از طرفی داریم:

$$3 \overset{16}{\equiv} 3 \ , \ 3^2 \overset{16}{\equiv} 9 \ , 3^3 \overset{16}{\equiv} 11 , 3^4 \overset{16}{\equiv} 1$$

پس $3^n \overset{16}{\equiv} 9$ اگر و تنها اگر $n = 4k+2$ ، برای محاسبه‌ی تعداد اعداد دو رقمی که به صورت $4k+2$ هستند داریم:

$$10 \le 4k+2 \le 99 \Rightarrow 2 \le k \le 24$$

لذا جواب برابر است با $24-2+1=23$

۹۶- گزینه ۴ پاسخ است.

از $b \overset{8}{\equiv} 5$ نتیجه می‌گیریم $b = 8k+5$ پس داریم:

$$a^b \overset{20}{\equiv} a^{8k+5} \overset{20}{\equiv} (a^4)^{2k+1} \times a$$

از طرفی $a \overset{20}{\equiv} 17 \overset{20}{\equiv} -3$ و لذا $a^4 \overset{20}{\equiv} 81 \overset{20}{\equiv} 1$ بنابراین:

$$a^b \overset{20}{\equiv} (1)^{2k+1} \times (-3) \overset{20}{\equiv} -3 \overset{20}{\equiv} 17$$

۹۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$3^{57}+4^{57}+5^{57}+6^{57} \overset{3}{\equiv} 0+1^{57}+(-1)^{57}+0 \overset{16}{\equiv} 0$$

پس عدد مورد نظر بر ۳ بخش‌پذیر است. به همین ترتیب ثابت می‌شود بر ۴ بخش‌پذیر است (دقت کنید که $6^{57} \overset{4}{\equiv} 0$) ، بنابراین بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۹۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} a = 6^{1382}+7^{1382} \overset{6}{\equiv} 0+1 \overset{6}{\equiv} 1 \Rightarrow 6|a-1 \\ a = 6^{1382}+7^{1382} \overset{7}{\equiv} (-1)^{1382}+0 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 7|a-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(6,7)=1} 42|a-1 \Rightarrow a \overset{42}{\equiv} 1$$

۹۹- گزینه ۴ پاسخ است.

چون $a = 8n+3$ ، بنا بر زوج یا فرد بودن n خواهیم داشت:

$$1)\, n = 2k \Rightarrow a = 16k+3 \Rightarrow a \overset{16}{\equiv} 3 \Rightarrow a+a^2+a^3+a^4 \overset{16}{\equiv} 3+3^2+3^3+3^4 \overset{16}{\equiv} 3+9-5-15 \overset{16}{\equiv} -8 \overset{16}{\equiv} 8$$

$$2)\, n = 2k+1 \Rightarrow a = 6k+11 \Rightarrow a \overset{16}{\equiv} -5 \Rightarrow a+a^2+a^3+a^4 \overset{16}{\equiv} -5+25-5^3+5^4 \overset{16}{\equiv} -5+9-45+81 \overset{16}{\equiv} 40 \overset{16}{\equiv} 8$$

پس همواره باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد بر ۱۶، برابر ۸ است.

۱۰۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a = 16k \Rightarrow a \overset{4}{\equiv} 0 \Rightarrow (17a+1)^4+\dots+(17a+5)^4 \overset{4}{\equiv} 1^4+2^4+3^4+4^4+5^4 \overset{4}{\equiv} 1+0+(-1)^4+0+1^4 \overset{4}{\equiv} 3$$

۱۰۱- گزینه ۳ پاسخ است.

فرض می‌کنیم $۱۷! \overset{۱۹}{\equiv} a$ ، در این صورت داریم:

$$\text{قضیه‌ی ویلسون: } (p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۸! \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۷!\times ۱۸ \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۸a \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \xrightarrow{۱۸\overset{۱۹}{\equiv}-۱} -a \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow a \overset{۱۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۷! \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

۱۰۲- گزینه ۴ پاسخ است.

عدد $n=۵^{۱۰۰}$ بر ۵ بخش‌پذیر است و باید باقی‌مانده‌ی تقسیم آن را بر ۷ بیابیم. داریم:

$$\text{قضیه‌ی فرما: } ۵^۶ \overset{۷}{\equiv} ۱ \xrightarrow{۱۰۰=۶\times۱۶+۴} (۵^۶)^{۱۶}\times ۵^۴ \overset{۷}{\equiv} ۱^{۱۶}\times ۲۵\times۲۵ \Rightarrow ۵^{۱۰۰}\overset{۷}{\equiv} ۱\times۴\times۴ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow n=۷k+۲$$

پس $n=۷k+۲$ و می‌دانیم $n\overset{۵}{\equiv}۰$ ، داریم:

$$۷k+۲\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow ۲k+۲\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow k+۱\overset{۵}{\equiv}۰ \Rightarrow k\overset{۵}{\equiv}۴ \Rightarrow k=۵t+۴ \Rightarrow n=۷(۵t+۴)+۲=۳۵t+۳۰ \Rightarrow n\overset{۳۵}{\equiv}۳۰$$

۱۰۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a\overset{۱۲}{\equiv}۸ \xrightarrow{۳|۱۲} a\overset{۳}{\equiv}۸\overset{۳}{\equiv}۲$$

پس $a\overset{۳}{\equiv}۲$ و $a\overset{۱۱}{\equiv}۳$ و می‌خواهیم باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۳ را بیابیم. داریم:

$$a\overset{۱۱}{\equiv}۳ \Rightarrow a=۱۱k+۳ \Rightarrow ۱۱k+۳\overset{۳}{\equiv}۲ \xrightarrow{۱۱\overset{۳}{\equiv}-۱} -k+۰\overset{۳}{\equiv}۲ \Rightarrow k\overset{۳}{\equiv}-۲\overset{۳}{\equiv}۱$$

$$\Rightarrow k=۳t+۱ \Rightarrow a=۱۱(۳t+۱)+۳=۳۳t+۱۴ \Rightarrow a\overset{۳۳}{\equiv}۱۴$$

۱۰۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$۱۳۸۹\overset{۱۱}{\equiv}۹-۸+۳\overset{۱۱}{\equiv}۳ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۳^{۱۰۰}+a$$

$$\text{قضیه‌ی فرما: } ۳^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱ \Rightarrow ۳^{۱۰۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۱+a \Rightarrow ۱+a\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow a=۱۱k-۱$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی a که در شرط فوق صدق می‌کند، ۹۸۹ است.

۱۰۵- گزینه ۱ پاسخ است.

شرط لازم و کافی برای این‌که معادله‌ی $۲۷x\overset{۱۵}{\equiv}۲a+۱$ جواب داشته باشد آن است که $(۲۷,۱۵)|۲a+۱$. لذا داریم:

$$۳|۲a+۱ \Rightarrow ۲a+۱\overset{۳}{\equiv}۰ \Rightarrow ۲a\overset{۳}{\equiv}-۱\overset{۳}{\equiv}۲ \xrightarrow{(۲,۳)=۱} a\overset{۳}{\equiv}۱$$

۱۰۶- گزینه ۱ پاسخ است.

باید با استفاده از خواص همنهشتی، سمت راست رابطه را نیز بر ۵ بخش‌پذیر کنیم تا با استفاده از قضیه‌ی تقسیم طرفین همنهشتی، ضریب x ، ۱ شود:

$$۵x\overset{۱۳}{\equiv}۳ \xrightarrow{۲\overset{۱۳}{\equiv}-۱۰} ۵x\overset{۱۳}{\equiv}-۱۰ \xrightarrow{(۵,۱۳)=۱} x\overset{۱۳}{\equiv}-۲ \Rightarrow x=۱۳k-۲$$

۱۰۷- گزینه ۲ پاسخ است.

باید $۳^x|۲۶!$ ، لذا باید توان عدد ۳ را در !۲۶ پیدا کنیم که برابر است با : $\left[\frac{۲۶}{۳}\right]+\left[\frac{۲۶}{۹}\right]=۸+۲=۱۰$

۱۰۸- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $(۶,۹)=۳$ ، لذا باید $۳|۲a+۵$. در نتیجه:

$$۲a+۵\overset{۳}{\equiv}۰ \Rightarrow ۲a\overset{۳}{\equiv}-۵ \xrightarrow{-۵\overset{۳}{\equiv}۴} ۲a\overset{۳}{\equiv}۴ \xrightarrow{(۲,۳)=۱} a\overset{۳}{\equiv}۲ \Rightarrow a=۳k+۲$$

۱۰۹- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به پیمانه، $x=۴k$ ، $x=۴k\pm۱$ و $x=۴k+۲$ را در معادله امتحان می‌کنیم (البته برای راحتی می‌توانید اعداد ۰ ، ±۱ و ۲ را امتحان کنید) که به راحتی جواب‌های معادله، به صورت $x=۴k+۱$ و $x=۴k+۲$ به دست می‌آیند.

۱۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به خواص همنهشتی داریم:

$$x^3 - x \overset{6}{\equiv} 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \overset{6}{\equiv} 0$$

اما $(x-1)x(x+1)$ حاصل‌ضرب ۳ عدد صحیح متوالی است، و همواره بر ۶ بخش‌پذیر است. پس معادله‌ی مورد نظر به ازای تمام مقادیر صحیح برقرار است و تمام اعداد صحیح دو رقمی (۹۰ تا) جواب معادله‌اند.

۱۱۱- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به نتیجه‌ی قضیه‌ی فرما $a^7 \overset{7}{\equiv} a$. پس داریم:

$$a^7 + 3a \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{a^7 \overset{7}{\equiv} a} 4a \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{1 \overset{7}{\equiv} 8} 4a \overset{7}{\equiv} 8 \xrightarrow{(4,7)=1} a \overset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow a = 7k + 2$$

برای پیدا کردن رقم دهگان کوچک‌ترین عدد ۳ رقمی a داریم:

$$a \geq 100 \Rightarrow 7k + 2 \geq 100 \Rightarrow 7k \geq 98 \Rightarrow k \geq 14 \Rightarrow a_{min} = 100$$

۱۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

ابتدا دقت کنید که $34 \overset{19}{\equiv} -4$ لذا داریم:

$$7x \overset{19}{\equiv} 34 \Rightarrow 7x \overset{19}{\equiv} -4 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 3} 21x \overset{19}{\equiv} -12 \xrightarrow{21 \overset{19}{\equiv} 2} 2x \overset{19}{\equiv} -12 \xrightarrow{(2,19)=1} x \overset{19}{\equiv} -6 \Rightarrow x = 19k - 6$$

$$19k - 6 \leq 999 \Rightarrow k \leq 52 \xrightarrow{k_{max}=52} a = 19 \times 52 + 6 = 994$$

لذا جواب سؤال، $22 = 4 + 9 + 9$ است.

۱۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$4x \overset{6}{\equiv} 2 \xrightarrow{(2,6)=2} 2x \overset{\frac{6}{2}}{\equiv} 1 \Rightarrow 2x \overset{3}{\equiv} 1$$

برای گزینه‌های دیگر به راحتی می‌توان مثال نقض آورد.

۱۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

چون رقم یکان دو عدد یکسان هستند، لذا هر دو به پیمانه‌ی ۱۰ همنهشت‌اند. پس داریم:

$$2x + 5 \overset{10}{\equiv} x + 1 \Rightarrow x \overset{10}{\equiv} -4 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow x^{35} \overset{10}{\equiv} x^3 \overset{10}{\equiv} 6^3 \overset{10}{\equiv} 6 \Rightarrow 3x^{35} + 1 \overset{10}{\equiv} 9$$

۱۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $23 \overset{4}{\equiv} -1$ ، داریم:

$$23 \overset{4}{\equiv} -1 \Rightarrow 23^{23} \overset{4}{\equiv} -1 \overset{4}{\equiv} 3 \xrightarrow{\text{نکته } 2} 23^{23^{23}} \overset{10}{\equiv} 23^3 \overset{10}{\equiv} 3^3 \overset{10}{\equiv} 7$$

۱۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \overset{100}{\equiv} \overline{a_1 a_0}$ ، لذا برای محاسبه‌ی دو رقم سمت راست از همنهشتی به پیمانه‌ی ۱۰۰ استفاده می‌کنیم:

$$7^2 \overset{100}{\equiv} 49 \Rightarrow 7^3 \overset{100}{\equiv} 43 \Rightarrow 7^4 \overset{100}{\equiv} 1 \xrightarrow{151 = 37 \times 4 + 3} (7^4)^{37} \overset{100}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{151} \overset{100}{\equiv} 7^3 \xrightarrow{7^3 \overset{100}{\equiv} 43} 7^{151} \overset{100}{\equiv} 43$$

لذا دو رقم راست 7^{151} ، ۴۳ است.

۱۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۹ داریم:

$$\overline{42a65} \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow 4 + 2 + a + 6 + 5 \overset{9}{\equiv} a + 8 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} 1 \xrightarrow{0 \leq a \leq 9} a = 1 \rightarrow 42165 \overset{11}{\equiv} 5 - 6 + 1 - 2 + 4 \overset{11}{\equiv} 2$$

۱۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.

در بررسی بخش‌پذیری عددی مانند N بر ۱۰۱، ارقام N را از سمت راست، ۲ رقم، ۲ رقم جدا کرده و یکی در میان اضافه و کم می‌کنیم:

$$\overline{2xy35} \overset{101}{\equiv} 0 \Rightarrow 35 - \overline{xy} + 2 \overset{101}{\equiv} 0 \Rightarrow \overline{xy} \overset{101}{\equiv} 37$$

لذا $\overline{xy} = 37$. حال با توجه به قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۹ داریم:

$$23735 \overset{9}{\equiv} 2 + 3 + 7 + 3 + 5 \overset{9}{\equiv} 2$$

۱۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

با توجه به قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۱۳ داریم:

$$\overline{bab۴b} \overset{۱۳}{\equiv} \overline{b۴b} - \overline{ba} \overset{۱۳}{\equiv} (۱۰۰b+۴۰+b)-(۱۰b+a) = ۹۱b+۴۰-a \overset{۱۳}{\equiv} ۱-a$$

لذا برای این که عدد مورد نظر بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد، باید $۱-a \overset{۱۳}{\equiv} ۰$ یا $a \overset{۱۳}{\equiv} ۱$.

۱۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۱۳ داریم:

$$\overline{۳a۵۲۴} \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵۲۴ - \overline{۳a} \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۵۲۴-۳۰-a \overset{۱۳}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۱۳|۴۹۴} a \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

پس $a=۰$ ، برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی عدد مورد نظر بر ۱۱ داریم:

$$۳۰۵۲۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۴-۲+۵-۰+۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$$

۱۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

با توجه به قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۱۱ داریم:

$$\overline{a۳b۲۱} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱-۲+b-۳+a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \Rightarrow a+b=۱۱k+۴$$

دقت کنید که a و b رقم هستند، لذا بیش‌ترین مقداری که می‌توان برای $a+b$ در نظر گرفت به ازای $k=۱$ ، برابر است با $۱۱\times۱+۴=۱۵$.

۱۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به این که $۱۰^{۲} \overset{۹۹}{\equiv} ۱$ ، داریم:

$$\overline{ab۳۴۳۲} \overset{۹۹}{\equiv} ۰ \Rightarrow \overline{ab}\times۱۰^{۴} + ۳۴\times۱۰^{۲}+۳۲ \overset{۹۹}{\equiv} ۰ \xrightarrow{۱۰^{۲}\overset{۹۹}{\equiv}۱,\ ۱۰^{۴}\overset{۹۹}{\equiv}۱} \overline{ab}+۳۴+۳۲ \overset{۹۹}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow \overline{ab} \overset{۹۹}{\equiv} -۶۶ \Rightarrow \overline{ab} \overset{۹۹}{\equiv} ۳۳ \Rightarrow a=۳, b=۳ \Rightarrow a+۲b=۹$$

۱۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

عددی بر ۴۴ بخش‌پذیر است که بر ۴ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد. لذا داریم:

$$\overline{۵a۷b۳c} \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۰+c \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲+c \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow c\in\{۲,۶\}$$

$$c=۲ \Rightarrow \overline{۵a۷b۳۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲-۳+b-۷+a-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۳$$

$$c=۶ \Rightarrow \overline{۵a۷b۳۶} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۶-۳+b-۷+a-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۹$$

پس بیش‌ترین مقدار $a+b$ برابر ۱۳ خواهد بود.

۱۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

از فرض سؤال مشخص است که پیمانه‌ی همنهشتی ۱۱ است و چون $\overline{۶x۴}$ در کلاس هم‌ارزی $[۹]$ قرار دارد، پس داریم:

$$\overline{۶x۴} \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۴-x+۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

اما چون x رقم است، فقط $x=۱$ قابل‌قبول است. در نتیجه با توجه به این که $۶۱۴ \overset{۹}{\equiv} ۲$ ، پس جواب ۲ است.

۱۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم عدد $n!$ برای $n \ge ۴$ بر ۴ بخش‌پذیر است، پس رقم یکان دو عدد $a^{n!}$ و $a^{۴}$ یکسان است. بنابراین:

$$n=(۱۳۸۳)^{۱!}+(۱۳۸۳)^{۳!}+(۱۳۸۳)^{۵!}+\dots+(۱۳۸۳)^{۱۳۸۳!} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۱}+۳^{۶}+\underbrace{۳^{۴}+۳^{۴}+\dots+۳^{۴}}$$

که تعداد $۳^{۴}$ ها برابر است با تعداد اعداد فرد بین ۵ و ۱۳۸۳ (همراه با خود این دو عدد)، یعنی: $\frac{۱۳۸۴}{۲}-۲=۶۹۰$ عدد. بنابراین:

$$n \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۱}+۳^{۶}+\underbrace{۱+۱+\dots+۱}_{۶۹۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۳+۳^{۲}+۶۹۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۳+۹+۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

۱۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر $n=\overline{۸۲y۶x}$ ، باید $n\overset{۹}{\equiv}۰$ و $n\overset{۱۱}{\equiv}۰$. بنابراین:

$$n\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow ۸+۲+y+۶+x\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow x+y\overset{۹}{\equiv}-۷\overset{۹}{\equiv}۲\Rightarrow x+y=۹k+۲\xrightarrow{۰\le x,y\le ۹}x+y=۲ \text{ یا } ۱۱$$

$$n\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow x-۶+y-۲+۸\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow x+y\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

بنابراین باید $x+y=۱۱$ ، چون ۸ زوج $(۲,۹),(۳,۸),...$ و $(۹,۲)$ در این شرایط صدق می‌کنند، ۸ عدد متفاوت با شرایط n وجود دارد.

۱۲۷- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر مجموع دو عدد را n بنامیم، باید $n\overset{۴}{\equiv}۰$ و $n\overset{۱۱}{\equiv}۰$. داریم:

$$n\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow \overline{۳a}+۵۶\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow \overline{۳a}+۰\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow \overline{۳a}\overset{۴}{\equiv}۰\Rightarrow a=۲ \text{ یا } ۶$$

$$n\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow (a-۳+۳-۲)+(۶-۵+b-۴)\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow a+b-۵\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow a+b=۱۱k+۵\xrightarrow{۰\le a,b\le ۹}a+b=۵ \text{ یا } ۱۶$$

حالت $a+b=۱۶$ غیرقابل‌قبول است، زیرا با توجه به این که $a\in\{۲,۶\}$ ، عدد قابل قبولی برای b به دست نمی‌آید.

۱۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

باید برای $n=\overline{۵۱xy۳۲}$ داشته باشیم: $n\overset{۹}{\equiv}۰$ و $n\overset{۴}{\equiv}۰$. شرط دوم به وضوح برقرار است، و برای شرط اول داریم:

$$n\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow ۵+۱+x+y+۳+۲\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow x+y\overset{۹}{\equiv}-۲\overset{۹}{\equiv}۷\Rightarrow xy=۹k+۷\xrightarrow{۰\le x,y\le ۹}x+y=۷ \text{ یا } ۱۶$$

برای ۸ زوج (x,y) داریم: $(x,y)=۷$ (زوج‌های $\{(۰,۷),(۱,۶),...,(۷,۰)\}$) و برای سه زوج (x,y) داریم: $x+y=۱۶$ (زوج‌های $\{(۷,۹),(۸,۸),(۹,۷)\}$)پس روی هم $۸+۳=۱۱$ عدد با شرایط تست داریم.

۱۲۹- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به این که $(۶۰,۸۴)=۱۲$ ، لذا داریم:

$$۱۲|۵n-۱\Rightarrow ۵n-۱\overset{۱۲}{\equiv}۰\Rightarrow ۵n\overset{۱۲}{\equiv}۱\xrightarrow{۱\overset{۱۲}{\equiv}۲۵}۵n\overset{۱۲}{\equiv}۲۵\xrightarrow{(۵,۱۲)=۱}n\overset{۱۲}{\equiv}۵$$

لذا n عددی به صورت $۱۲k+۵$ است و چون $۵+۱۲\times۲=۲۹$ ، پس ۲۹ قابل‌قبول است.

توجه: از همان ابتدا با جای‌گذاری گزینه‌ها در رابطه‌ی $۱۲|۵n-۱$ ، گزینه‌ی صحیح به راحتی به دست می‌آید.

۱۳۰- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم $(a,۱۲)\in\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$. اما با توجه به شرط $(a,۱۲)\nmid ۳۰$ نتیجه می‌گیریم $(a,۱۲)$ برابر است با ۴ یا ۱۲، در نتیجه $a=۴k$.

بنابراین معادله‌ی $ax+۸y=۱۰$ جواب ندارد.

۱۳۱- گزینه ۲ پاسخ است.

تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی و ۵ کیلویی را به ترتیب x و y فرض می‌کنیم. لذا باید تعداد جواب‌های نامنفی معادله‌ی $۳x+۵y=۳۲$ را پیدا کنیم. با توجه به این که $x_{۰}=۴$ و $y_{۰}=۴$ یکی از جواب‌های این معادله‌اند، داریم:

$$\begin{cases}x=۴+۵k\\ y=۴-۳k\end{cases}\xrightarrow{\text{جواب‌های نامنفی}}\begin{cases}۴+۵k\ge ۰\\ ۴-۳k\ge ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\ge ۰\\ k\le ۱\end{cases}\Rightarrow ۰\le k\le ۱$$

در نتیجه دو جواب صحیح و نامنفی برای معادله وجود دارد.

۱۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.

چون پیمانه‌ها یکسان‌اند، مانند دستگاه دو مجهولی، x را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases}۳x+y\overset{۴}{\equiv}۲\\ ۲x-۵y\overset{۴}{\equiv}۱\end{cases}\xrightarrow{\text{حذف } x}\begin{cases}۶x+۲y\overset{۴}{\equiv}۴\\ ۶x-۱۵y\overset{۴}{\equiv}۳\end{cases}\Rightarrow ۱۷y\overset{۴}{\equiv}۱\xrightarrow{۱۷\overset{۴}{\equiv}۱}y\overset{۴}{\equiv}۱$$