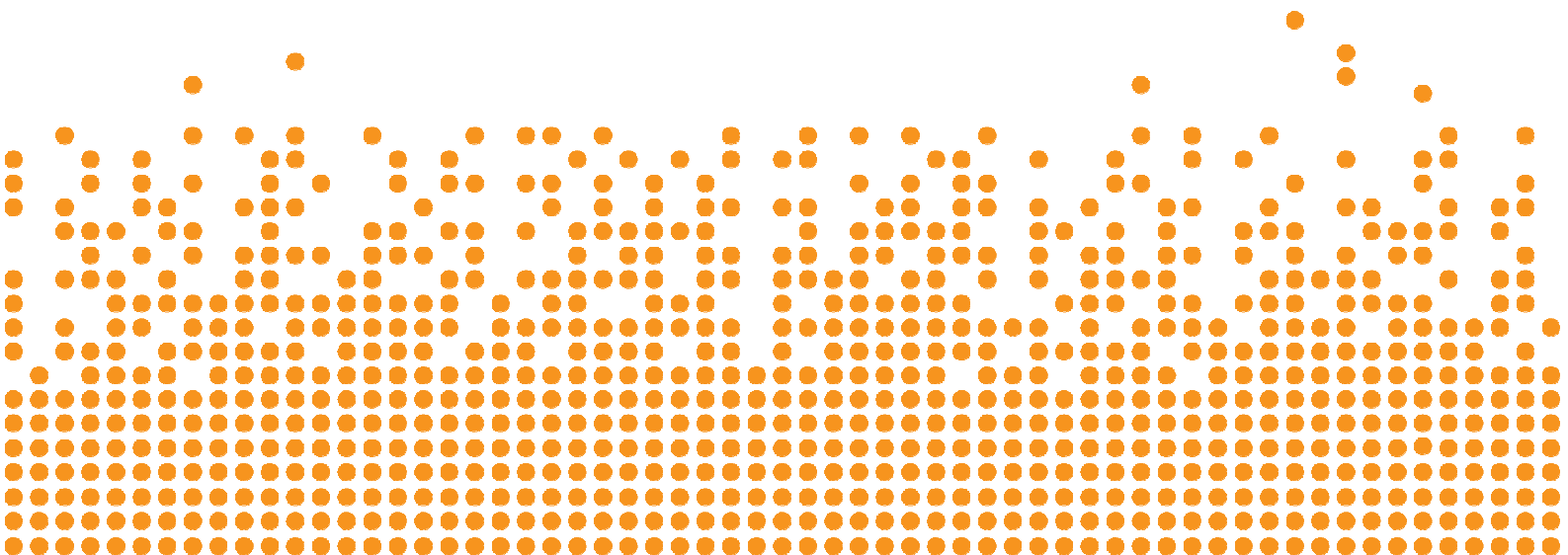


ریاضی ۳

● فصل ۲

تابع



۱- ساده شده‌ی عبارت $([-2, +\infty) \cap (-\infty, 3)) \cap ((-\infty, 0) \cup [1, +\infty))$ کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱) $[-2, 0] \cup [1, 3]$ (۲) $(-2, 0] \cup (1, 3)$ (۳) $[-2, 3) \cup (0, 1]$ (۴) $[-2, 3) - [0, 1)$

۲- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{5}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴) صفر

۳- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{2x-1}{x} < 1$ کدام است؟

- (۱) $(1, \infty)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(-\infty, 0)$ (۴) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

۴- اگر غلظت دارو در عضله دست چپ t ساعت بعد از تزریق آن در عضله‌ی دست راست از رابطه‌ی $C = \frac{0.12t}{t^2 + 3}$ (برحسب میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر) به دست بیاید و مقدار مطلوب دارو حداقل $0.3/0$ میلی‌گرم در میلی‌لیتر باشد، این مقدار مطلوب چند ساعت در عضله‌ی دست چپ دوام دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵- اگر عبارت $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ با معنی باشد، حدود x کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

۶- اگر $P = \frac{2x}{1-x}$ احتمال رخ دادن یک پیشامد تصادفی باشد، محدوده‌ی x کدام است؟

- (۱) $0 \leq x < 1$ (۲) $x > 1$ یا $x \leq \frac{1}{3}$ (۳) $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (۴) $x > 1$

۷- مقدار یا مقادیر m برای تابع بودن رابطه‌ی $f = \{(2, m^2 - m), (m + 1, -1), (-1, 0), (2, 2m - 3m^2 + 1)\}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{-1}{4}$ یا ۱ (۴) هیچ کدام

۸- در تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $f(\frac{-1}{x})$ برابر کدام گزینه است؟ ($x \neq 0, \pm 1$)

- (۱) $-f(\frac{1}{x})$ (۲) $-\frac{1}{f(x)}$ (۳) $-f(x)$ (۴) $\frac{1}{f(x)}$

۹- اگر $f(1 + \sqrt{x}) = x + 2\sqrt{x}$ باشد، $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) $3 - 2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2} - 2$ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰- واحدی برای اندازه‌گیری دمای اجسام ابداع کرده‌ایم که $10-$ درجه‌ی آن معادل 8 درجه‌ی سانتی‌گراد و 74 درجه‌ی آن معادل 20 درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد. چهار درجه‌ی سانتی‌گراد معادل چه درجه‌ای در این سیستم می‌باشد؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) -۶۶ (۴) -۳۸

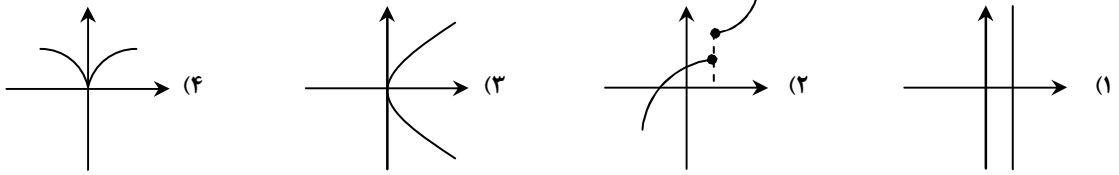
۱۱- اگر نمودارهای دو تابع $y = 2ax^2 + bx + 2$ و $y = -ax + 2b + 1$ یکدیگر را روی محور x ها در نقطه‌ای به طول $1-$ قطع کنند، $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲

۱۲- اگر $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+4}-1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ باشد، $f(2x-1-x^2)$ کدام است؟

- (۱) $f(2x-1-x^2) = 2x-x^2$ (۲) $f(2x-1-x^2) = 2\sqrt{2x+2-x^2}-1$ (۳) $f(2x-1-x^2) = \begin{cases} 3 & x=1 \\ 2x-x^2 & x \neq 1 \end{cases}$ (۴) $f(2x-1-x^2) = \begin{cases} 3 & x=-1 \\ 2x-x^2+2 & x \neq -1 \end{cases}$

۱۳- کدام یک از نمودارهای زیر، معرف یک تابع است؟



۱۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 5-x & |x| \leq 2 \\ x^2 + bx - a & |x| \geq 2 \end{cases}$ یک تابع باشد، $a + b$ کدام است؟

- (۱) -۲۰ (۲) -۷ (۳) ۷ (۴) ۱۹

۱۵- اگر سهمی $f(x) = ax^2 + 3x + b$ از دو نقطه‌ی $A \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ و $B \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2} \right)$ بگذرد، محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع خواهد کرد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۶- اگر $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & n = 2k \\ -\frac{n-1}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$ حاصل $f(f(f(-1)))$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) تعریف نشده

۱۷- دامنه‌ی تعریف تابع $g(x) = \frac{\log(x-1)}{x^2 - 7x + 10}$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۸- در بازه‌ی $0 \leq x < 2\pi$ دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ چند مقدار را شامل نمی‌شود؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۹- اگر $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، $f(f(x))$ کدام گزینه است؟

(۱) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$ (۲) $f(x) = -1$ (۳) $f(x) = -\sqrt{x}$ (۴) $f(x) = -\sqrt[4]{x}$

۲۰- محدوده‌ی a کدام باشد تا دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2 - 2ax + 2a - 1}}$ برابر \mathbb{R} شود؟

- (۱) $a > 1$ یا $a < 0$ (۲) $a < 0$ (۳) $a > 1$ (۴) $0 < a < 1$

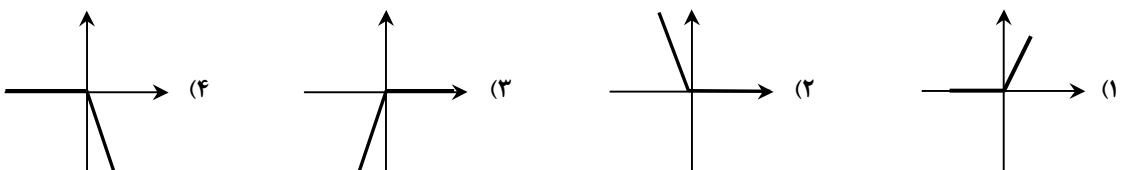
۲۱- اگر $f = \left\{ (-1, 2), (0, -3), (2, 5), (-4, \frac{1}{2}) \right\}$ و $g = \left\{ (0, 2), (1, 0), (2, \frac{-1}{2}), (-1, 0) \right\}$ کدام زوج مرتب زیر در تابع $f \cdot g$ وجود دارد؟

- (۱) $(4, \frac{-5}{2})$ (۲) $(0, 6)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(-1, 0)$

۲۲- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ و $f(x+2) + f(x) = 2x^2 + 2x - 4$ باشد، $f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۵ (۴) -۵

۲۳- نمودار تابع $g(x) = x - |x|$ کدام است؟



۲۴- دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

۲۵- کدام رابطه‌ی زیر، تابع نیست؟

- (۱) $y^2 = \sqrt{-x^2}$ (۲) $|x-1| + |y| = 0$ (۳) $y = \begin{cases} 2x-1 & x \leq 1 \\ 2-x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ (۴) $x + \sin y = 0$

۲۶- اگر $\sin \alpha = \frac{x+1}{2x}$ باشد، محدوده‌ی x کدام است؟

- (۱) $[\frac{-1}{3}, 1]$ (۲) $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{-1}{3}] \cup (0, +\infty)$ (۴) $(-\infty, \frac{-1}{3}] \cup [1, +\infty)$

۲۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x < 2 \\ 2x+5 & x > 2 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(2 - \cos^2 \alpha) + f(2 + \sin^2 \alpha)$ کدام است؟ $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) -۸

۲۸- اگر $f(x) = 2x - 2a$ و $g(x) = 3x^2 + bx - c$ و $(f \circ g)(x) = 6x^2 - x - 3$ باشد، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

۲۹- اگر $f(x) = 2x^2 - 2$ و $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\sqrt{2x+1}$ (۲) $-\sqrt{2x-1}$ (۳) $\sqrt{1-2x}$ (۴) $2x-1$

۳۰- اگر $f(x) = \frac{-1}{x}$ باشد، حاصل $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ مرتبه}}(\frac{-1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} x & \text{فرد باشد} \\ -1/x & \text{زوج باشد} \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x & \text{زوج باشد} \\ -1/x & \text{فرد باشد} \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} -x & \text{فرد باشد} \\ 1/x & \text{زوج باشد} \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} -x & \text{زوج باشد} \\ 1/x & \text{فرد باشد} \end{cases}$

۳۱- اگر دامنه‌ی تعریف تابع $f(x) = \frac{x+1}{ax^2 - 2x + b}$ برابر $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ باشد، حاصل $a.b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۳۲- با توجه به ماشین $x \rightarrow \square \rightarrow \square \rightarrow 4x+3$ مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ یا -۱ (۳) -۳ (۴) ۳ یا -۳

۳۳- اگر $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ و $g(x) = 2-x$ باشد، ریشه‌ی معادله‌ی $f \circ g(x) - g \circ f(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ریشه ندارد.

۳۴- اگر $f(x) = x+3$ و $g(x) = 1-x^2$ ، معادله‌ی $(f \circ g)(x) = (\frac{g}{f})(x)$ چند ریشه دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۳۵- اگر $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ و $g(x) = \sin x$ ، تابع $f \circ g$ در کدام نقطه تعریف شده است؟

- (۱) π (۲) -2π (۳) $\frac{2\pi}{3}$ (۴) $\frac{-2\pi}{2}$

۳۶- اگر $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ و $\tan \beta = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی α در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی واقع باشد، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{84}{13}$ (۲) $\frac{-84}{13}$ (۳) $\frac{36}{77}$ (۴) $\frac{-36}{77}$

۳۷- اگر $\cos 11^\circ = x$ ، مقدار $\sin 68^\circ$ کدام است؟

- (۱) $2x$ (۲) $2x-1$ (۳) $2x^2-1$ (۴) $1-2x^2$

۳۸- اگر $\sin 2x = \frac{2}{5}$ حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

$\frac{4}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{23}{25}$ (۲)

$\frac{21}{25}$ (۱)

۳۹- اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

۴۰- حاصل عبارت $\sin^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۴۱- مقدار عددی عبارت $A = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin^2 x \cdot \cos x$ به ازای $x = \frac{\pi}{9}$ کدام است؟

$\cos \frac{\pi}{9}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

۴۲- حاصل عبارت $A = \frac{\sin 4x - \sin x \cdot \cos 3x}{\sin x \cdot \sin 3x - \cos 2x}$ کدام است؟

$-\cot 3x$ (۴)

$-\tan 3x$ (۳)

$-\cot x$ (۲)

$-\tan x$ (۱)

۴۳- اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ حاصل $f(\cos \frac{\pi}{8})$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

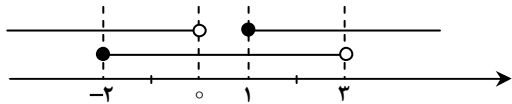
-۱ (۲)

۱ (۱)

پاسخ‌های تشریحی فصل ۲

۱- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۱۸ تا ۲۰ کتاب

$$([-2, +\infty) \cap (-\infty, 3)) \cap ((-\infty, 0) \cup [1, +\infty)) = [-2, 3) \cap ((-\infty, 0) \cup [1, +\infty)) = [-2, 0) \cup [1, 3) = [-2, 3) - [0, 1)$$



به کمک نمودار هندسی نیز می‌توان به پاسخ صحیح رسید:

$$[-2, 3) - [0, 1)$$

گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳: بی‌توجهی به تعلق یا عدم تعلق نقاط انتهایی بازه‌ها به بازه، ممکن است هر کدام از سه گزینه‌ی نادرست را نتیجه دهد.

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{(x+2)^2 + (x-2)^2}{x^2 - 4} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2x^2 + 8}{x^2 - 4} = \frac{5}{2} \rightarrow 4x^2 + 16 = 5x^2 - 20 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm 6 \rightarrow 6 + (-6) = 0$$

راه حل دیگر:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} = \frac{5}{2} \rightarrow 2a^2 + 2 = 5a \rightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0 \rightarrow (2a-1)(a-2) = 0 \rightarrow a = 2, \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} = 2 \rightarrow 2x-4 = x+2 \rightarrow x_1 = 6 \\ \frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x+4 = x-2 \rightarrow x_2 = -6 \end{cases}$$

لذا جمع ریشه‌ها برابر صفر است.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{2x-1}{x} - 1 < 0 \rightarrow \frac{2x-1-x}{x} < 0 \rightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \rightarrow 0 < x < 1$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۲۶ تا ۲۹ کتاب

$$\frac{0.12t}{t^2+3} \geq 0.03 \Rightarrow \frac{4t}{t^2+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{t^2-4t+3}{t^2+3} \leq 0$$

چون مخرج (t^2+3) همواره مثبت است، پس:

$$t^2 - 4t + 3 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq t \leq 3$$

t	1	3
$t^2 - 4t + 3$	+	-
	+	+

یعنی دارو از ۱ ساعت پس از تزریق تا ۳ ساعت پس از تزریق در حد مطلوب خود می‌باشد، یعنی به مدت $3-1=2$ ساعت.

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \Rightarrow \text{I} \cap \text{II} \Rightarrow x > 1, x < -1$$

صفحات ۴ و ۲۶ تا ۲۹ کتاب

۶- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم که احتمال هر پیشامد تصادفی مقابل نامساوی زیر صدق می‌کند: $0 \leq P \leq 1$.

پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \quad \text{(I)} \\ \frac{2x}{1-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x-1+x}{1-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-1}{1-x} \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \text{ یا } x > 1 \quad \text{(II)} \end{array} \right.$$

تعریف نشده

تعریف نشده

(I) \cap (II) : $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

نکته: احتمال رخ دادن هر پیشامد تصادفی مانند A در نامساوی زیر صدق می‌کند: $0 \leq P(A) \leq 1$.

گزینه ۱: اگر تنها منفی نبودن P را لحاظ کنیم، به این گزینه می‌رسیم.

گزینه ۲: اگر فقط بزرگ‌تر از واحد نبودن P را لحاظ کنیم، به این گزینه می‌رسیم.

صفحات ۳۰ الی ۳۲ کتاب

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم رابطه‌ای تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌ی اول برابر وجود نداشته باشد یا به عبارت دیگر اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب متساوی باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز باهم برابر باشند. پس:

$$2 = 2 \Rightarrow m^2 - m = 2m - 3m^2 + 1 \Rightarrow 4m^2 - 3m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow f = \{(2, 0), (2, -1), (-1, 0), (2, 0)\}$$

در این جا مشاهده می‌کنیم که $m = 1$ با وجود این که مشکل دو زوج اول را حل می‌کند، باعث می‌شود یک زوج مرتب دیگر با مؤلفه‌ی اول ۲ و مؤلفه‌ی دوم نامساوی با دو زوج اول ساخته شود. لذا $m = 1$ قابل قبول نیست.

$$m = -\frac{1}{4} \Rightarrow f = \left\{ \left(2, \frac{5}{16} \right), \left(\frac{3}{4}, -1 \right), (-1, 0), \left(2, \frac{5}{16} \right) \right\}$$

f تابع است پس فقط $m = -\frac{1}{4}$ قابل قبول می‌باشد.

نکته: رابطه‌ای تابع است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول برابر باهم نداشته باشند.

صفحات ۳۲، ۳۳ و ۴۲ کتاب

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{\frac{-1}{x} - 1}{\frac{-1}{x} + 1} = \frac{-1-x}{-1+x} = -\frac{x+1}{x-1} = \frac{-1}{f(x)}$$

صفحات ۲۲، ۳۳ و ۴۲ کتاب

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$1 + \sqrt{x} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} + 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$f(\sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$$

$$\begin{cases} x = 8^\circ \text{C} \\ y = -10^\circ \text{C} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20^\circ \text{C} \\ y = 74^\circ \text{C} \end{cases}$$

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} -10 = 8a + b \\ 74 = 20a + b \end{cases}$$

$$12a = 84$$

$$a = 7 \Rightarrow b = 74 - 140 \Rightarrow b = -66$$

$$y = 7x - 66$$

$$x = 4^\circ \text{C} \Rightarrow y = 7(4) - 66 \Rightarrow y = -38$$

راه حل دیگر:

$$\text{شیب خط } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{74 - (-10)}{20 - 8} = \frac{84}{12} = 7$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 10 = 7(x - 8)$$

$$y = 7x - 66$$

$$\begin{cases} x = 4^\circ \text{C} \\ y = 7 \times 4 - 66 = -38 \end{cases}$$

نکته: معادله‌ی خطی که دو نقطه‌ی $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ بگذرد، به صورت زیر است:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی ۱: این گزینه شیب تابع خطی مورد نظر است.

گزینه‌ی ۲: چهار درجه در این سیستم معادل ۱۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است. (برعکس صورت مسأله)

گزینه‌ی ۳: این گزینه عرض از مبدأ تابع خطی مورد نظر است.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۳۵ الی ۳۹ کتاب

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a + 2b + 1 \\ 0 = 2a - b + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = a + 2b + 1 \\ 0 = 4a - 2b + 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 5a + 5 = 0 &\Rightarrow a = -1 \\ -1 + 2b + 1 = 0 &\Rightarrow b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = -1$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۳۹ الی ۴۱ کتاب

$$-x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ -(x-1)^2 < 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow f(-(x-1)^2) = \begin{cases} 2\sqrt{1+4} - 1, & x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1, & x \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ 2x - x^2 & x \neq 1 \end{cases}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۳۰ الی ۳۲ کتاب

تنها نموداری که تمام خطوط قائم آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند، نمودار گزینه‌ی ۴ است.

نکته: نموداری می‌تواند معرف یک تابع باشد که هر خط قائم، آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند (یا قطع نکند یا فقط در یک نقطه قطع کند).

۱۴- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۳۰ الی ۳۲ کتاب

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - 2 = 3 \\ y_2 = \frac{4 + 2b - a}{2 - 1} = 4 + 2b - a \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow 4 + 2b - a = 3$$

$$2b - a = -1$$

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 - (-2) = 7 \\ y_2 = \frac{4 - 2b - a}{-2 - 1} = \frac{4 - 2b - a}{-3} \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow 4 - 2b - a = -21$$

$$-2b - a = -25$$

$$\begin{cases} 2b - a = -1 \\ -2b - a = -25 \end{cases}$$

$$-2a = -26 \Rightarrow a = 13, b = 6 \Rightarrow a + b = 19$$

نکته: یک رابطه‌ی چند ضابطه‌ای به شرطی تابع است که هر کدام از ضابطه‌ها به تنهایی تابع باشند و ضمناً دامنه‌های آن‌ها نیز با هم اشتراک نداشته باشند (یا اگر در چند نقطه اشتراک داشته باشند، به ازای x های مشترک، y های یکسانی حاصل شود).

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۳۲ الی ۳۹ کتاب

$$\begin{aligned} f(-1) = -1 \Rightarrow -1 = a - 2 + b &\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -4a - b = 4 \end{cases} \\ f(2) = 2 \Rightarrow 2 = 4a + 6 + b &\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = -4 \end{cases} \\ -3a = 6 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4 \end{aligned}$$

برای این که بدانیم سهمی محور عرض‌ها را در چه عرضی قطع می‌کند، باید به جای x عدد صفر را جایگزین کنیم:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 3x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 + 0 + 4 = 4$$

نکات:

(۱) برای تعیین عرض نقطه‌ی برخورد نمودار تابع با محور عرض‌ها، باید $x = 0$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین کنیم.

(۲) برای تعیین طول نقطه‌ی برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها، باید $y = 0$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین کنیم.

در گزینه‌ی ۱: اگر با مشاهده‌ی دو نقطه‌ی $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، رابطه‌ی نقاط روی سهمی را (به اشتباه) خطی فرض کنیم، نقطه‌ی O را هم

متعلق به سهمی خواهیم دانست و این گزینه را انتخاب خواهیم کرد!

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۳۹ الی ۴۱ کتاب

$$-1 \text{ فرد است} \Rightarrow f(-1) = -\frac{-1-1}{2} = 1$$

$$1 \text{ فرد است} \Rightarrow f(f(-1)) = f(1) = -\frac{1-1}{2} = 0$$

$$0 \text{ صفر زوج است} \Rightarrow f(f(f(-1))) = f(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی ۱: این گزینه برابر $f(f(-1))$ می‌باشد!

گزینه‌ی ۳: اگر منفی پشت کسر در ضابطه‌ی دوم را در نظر بگیریم، $f(-1) \dots f(-1)$ همواره برابر ۱- خواهد شد.

$$f(-1) = \frac{-1-1}{2} = -1 \Rightarrow f(f(-1)) = f(-1) = -1 \Rightarrow \dots$$

گزینه‌ی ۴: این گزینه برابر $f(f(f(f(-1))))$ می‌باشد! (اگر بیش‌تر از چهار f را هم ترکیب کنیم و ورودی اول ۱- باشد، حاصل تعریف نشده خواهد بود).

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۴۳ الی ۴۶ کتاب

$$\left. \begin{aligned} x - 1 > 0 &\Rightarrow x > 1 \\ 9 - x > 0 &\Rightarrow x < 9 \\ 9 - x \neq 1 &\Rightarrow x \neq 8 \\ x^2 - 7x + 10 \neq 0 &\Rightarrow (x - 2)(x - 5) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2, 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_g = (1, 9) - \{2, 5, 8\}$$

یعنی دامنه‌ی تابع g تنها شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ و ۶ و ۷ می‌باشد.

نکته:

$$۱) f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_p \cap D_q, q(x) \neq 0\}$$

$$۲) f(x) = \log_q^{p(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_p \cap D_q, P(x) > 0, q(x) > 0, q(x) \neq 1\}$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی ۱: اگر مخالف صفر بودن مخرج کسر و مخالف ۱ بودن مبنای لگاریتم را در نظر بگیریم و عبارات $(x-1)$ و $(9-x)$ را هم به جای مثبت بودن، نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) منظور کنیم، به این گزینه می‌رسیم!
گزینه‌ی ۲: اگر صفر نبودن مخرج کسر را لحاظ نکنیم، به این گزینه می‌رسیم!
گزینه‌ی ۳: اگر مخالف ۱ بودن مبنای لگاریتم را منظور نکنیم، به این گزینه می‌رسیم!
۱۸- گزینه ۱ پاسخ است. صفحه ۴۶ کتاب

$$f(x) = \cot\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Rightarrow 4x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$$\leq \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} < 2\pi \xrightarrow{\times 12} 0 \leq 3k\pi - \pi < 24\pi \xrightarrow{+\pi} 0 \leq 3k - 1 < 24$$

$$\xrightarrow{+1} 1 \leq 3k < 25 \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq k < \frac{25}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

یعنی هشت مقدار در بازه‌ی فوق جزء دامنه‌ی تعریف تابع نمی‌باشد.

نکته: دامنه‌ی تعریف توابع مثلثاتی پایه به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \sin x \text{ یا } \cos x \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f(x) = \cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۳۹ الی ۴۱ کتاب

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow f(f(x)) = -1 \\ x \leq 0 \Rightarrow f(x) = -1 < 0 \Rightarrow f(f(x)) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(f(x)) = -1$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۴۳ الی ۴۵ کتاب

باید به ازاء جميع مقادير x علامت عبارت $ax^2 - 2ax + 2a - 1$ مثبت شود. یعنی باید:

$$\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ \Delta' < 0 \Rightarrow a^2 - a(2a-1) < 0 \Rightarrow -a^2 + a < 0 \Rightarrow a < 0 \text{ یا } a > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a > 1$$

نکته: اگر علامت Δ (مبین) در عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ منفی باشد، علامت این عبارت درجه ۲ به ازای جميع مقادير x ، موافق با علامت a خواهد بود.

در گزینه‌ی ۱: اگر به مثبت بودن a توجه نکنیم و فقط منفی بودن Δ' را در نظر بگیریم، به این گزینه می‌رسیم!

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است. صفحه ۴۷ الی ۵۱ کتاب

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{-1, 0, 2, -4\} \cap \{0, 1, 2, -1\} = \{-1, 0, 2\}, (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\Rightarrow f.g = \left\{(-1, 2 \times 0), (0, -3 \times 2), \left(2, \frac{-1}{2} \times 5\right)\right\} = \left\{(-1, 0), (0, -6), \left(2, \frac{-5}{2}\right)\right\}$$

تنها گزینه‌ی صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد.

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

نکته: اگر f و g دو تابع حقیقی باشند:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

بررسی گزینه‌های نادرست:

در گزینه‌ی ۱: اگر در تابع $f.g$ ، به اشتباه هم ورودی‌ها (x) را در هم ضرب کنیم و هم خروجی‌ها (y) را، به این گزینه می‌رسیم!

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۳۲ الی ۳۹ کتاب

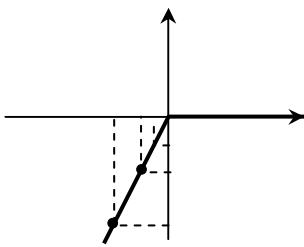
$$f(x+2) + f(x) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c + ax^2 + bx + c \equiv 2x^2 + 2x - 4$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2a+2b)x + (2a+2b+2c) \equiv 2x^2 + 2x - 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \Rightarrow a = 1 \\ 2a + 2b = 2 \Rightarrow b = -1 \\ 2a + 2b + 2c = -4 \Rightarrow c = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 3$$

$$f(1) = 1 - 1 - 3 \Rightarrow f(1) = -3$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۳۹ تا ۴۱ کتاب



$$g(x) = x - |x| = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ x + x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نکته: تعریف قدرمطلق:

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۴۴ و ۴۶ کتاب

$$f(x) = \frac{x}{\tan x} = \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi = (2k)\frac{\pi}{2} \\ \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۳۰ الی ۳۲ کتاب

گزینه‌ی ۱:

$$y^2 = \sqrt{-x^2} \quad -x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

یعنی تنها زوج مرتب (۰ و ۰) در این رابطه صدق می‌کند، پس این رابطه یک تابع است.

گزینه‌ی ۲:

$$|x-1| + |y| = 0 \xrightarrow{\text{جمع دو عدد غیرمنفی صفر شده است}} \begin{cases} x-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

یعنی تنها زوج مرتب (۰ و ۱) در این رابطه صدق می‌کند، پس این رابطه نیز تابع است.

گزینه‌ی ۳: هر کدام از ضابطه‌ها به تنهایی تابع است؛ اما دامنه‌های آن‌ها در $x=1$ مشترک هستند، لذا باید این عدد را امتحان کنیم:

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2-1=1 \\ y_2 = 2-1^2=1 \end{cases}$$

چون به ازای x مشترک، y های یکسانی حاصل شد، پس این رابطه نیز تابع است.

گزینه‌ی ۴: تابع نیست (مثلاً به ازاء $x=0$ ، بی‌نهایت y نظیر $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ داریم).

$$x = -\sin y$$

نکته: تابع دستور یا ضابطه‌ای است که در آن برای هر مقدار x ، حداکثر یک مقدار y متناظرش وجود داشته باشد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی ۱: اگر فقط به این که y توان ۲ دارد و به ازاء هر x ، دو y به دست می‌آید، توجه کنیم و به دامنه‌ی تعریف بی‌توجه باشیم، این گزینه را

تابع نخواهیم دانست!

گزینه‌ی ۲: اگر فقط به این‌که y داخل قدرمطلق است و به‌ازای هر x ، دو y به‌دست می‌آید، توجه کنیم و به دامنه‌ی تعریف بی‌توجه باشیم، این گزینه را نیز تابع نخواهیم دانست!
گزینه‌ی ۳: اگر به اشتراک داشتن دامنه‌های دو ضابطه توجه کنیم ولی به این‌که x مشترک y ‌های یکسانی می‌دهند، بی‌توجه باشیم، این گزینه را تابع نخواهیم دانست!

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است. صفحات ۲۶ الی ۲۹ کتاب

می‌دانیم محدوددهی $\text{Sin}\alpha$ به‌صورت زیر است:

$$-1 \leq \text{Sin}\alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x+1}{2x} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-1}{3} \\ \text{یا} \end{cases} \\ 0 < \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-1}{3}] \cup [1, +\infty)$$

روش دیگر:

$$-1 \leq \frac{x+1}{2x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x+1}{2x} \Rightarrow \frac{3x+1}{2x} \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{-1}{3} \text{ یا } x > 0 \\ \frac{x+1}{2x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1-x}{2x} \leq 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{-1}{3}] \cup [1, +\infty)$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ است. صفحات ۳۹ الی ۴۲ کتاب

$$\alpha \neq \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \text{Sin}^2\alpha \neq 0, 1 \quad \text{و} \quad \text{Cos}^2\alpha \neq 0, 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{Cos}^2\alpha < 1 \Rightarrow 1 < 2 - \text{Cos}^2\alpha < 2 \Rightarrow f(2 - \text{Cos}^2\alpha) = 2 - 2(2 - \text{Cos}^2\alpha) \\ 0 < \text{Sin}^2\alpha < 1 \Rightarrow 2 < 2 + \text{Sin}^2\alpha < 3 \Rightarrow f(2 + \text{Sin}^2\alpha) = 2(2 + \text{Sin}^2\alpha) + 5 \end{cases}$$

$$2 - 4 + 2\text{Cos}^2\alpha + 4 + 2\text{Sin}^2\alpha + 5 = 8 + 2(\underbrace{\text{Sin}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha}_{=1}) = 8 + 2 = 10$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ است. صفحات ۵۱ الی ۵۵ کتاب

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x^2 + bx - c) = 2(3x^2 + bx - c) - 2a = 6x^2 + 2bx + (-2c - 2a)$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 2bx + (-2c - 2a) \equiv 6x^2 - x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2} \\ -2c - 2a = -3 \Rightarrow a + c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a + b + c = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ است. صفحات ۵۱ الی ۵۷ کتاب

$$\left. \begin{aligned} f(g(x)) &= 4x - 5 \\ f(x) &= 2x^2 - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 2(g(x))^2 - 3 = 2g^2(x) - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2g^2(x) - 3 = 4x - 5$$

$$\Rightarrow g^2(x) = 2x - 1 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = \sqrt{2x-1} \\ \text{یا} \\ g(x) = -\sqrt{2x-1} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{\frac{-1}{x}} = x$$

$$f\left(f\left(\frac{-1}{x}\right)\right) = f(x) = \frac{-1}{x}$$

$$f\left(f\left(f\left(\frac{-1}{x}\right)\right)\right) = f\left(\frac{-1}{x}\right) = x$$

⋮

$$\underbrace{f f \dots f}_{n \text{ مرتبه}}\left(\frac{-1}{x}\right) = \begin{cases} x & n \text{ فرد باشد} \\ \frac{-1}{x} & n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

باید $x = \frac{1}{4}$ تنها ریشه‌ی مخرج باشد، یعنی مخرج باید دارای ریشه‌ی مضاعف $\frac{1}{4}$ باشد:

$$a\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = ax^2 - 2x + b$$

$$ax^2 - ax + \frac{a}{4} = ax^2 - 2x + b \Rightarrow \begin{cases} -a = -2 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{a}{4} = b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = 2 \times \frac{1}{2} = a \cdot b = 1$$

با توجه به ماشین، داریم: $(f \circ f)(x) = 4x + 3$. در این صورت f حتماً تابعی درجه‌ی ۱ است. چون ترکیب یک تابع غیرخطی با خودش غیرخطی است. یعنی:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b)$$

$$\Rightarrow a^2x + (ab + b) = 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ ab + b = 3 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow 2b = 3 \Rightarrow b = 1 \\ a = -2 \Rightarrow -2b = 3 \Rightarrow b = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 1 \text{ یا } f(x) = -2x - 3$$

$$f(-1) = -2 + 1 = -1 \text{ یا } f(-1) = 2 - 3 = -1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2-x) = \frac{(2-x)^2}{2-x-1} = \frac{4-4x+x^2}{1-x}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = 2 - \frac{x^2}{x-1} = \frac{2-2x+x^2}{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{4-4x+x^2}{1-x} = \frac{2-2x+x^2}{1-x} \stackrel{\boxed{x \neq 1}}{\Rightarrow} 4-4x+x^2 = 2-2x+x^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

غیرقابل قبول

پس معادله ریشه ندارد.

$$\frac{1-x^2}{x+3} = (1-x^2)(x+3) \Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{1}{x+3} - x - 3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \frac{1}{x+3} = x+3 \Rightarrow (x+3)^2 = 1 \Rightarrow x+3 = \pm 1 \end{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$g(x) = \sin x \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \leq -1 \text{ یا } \sin x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = \pm 1\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

لذا تنها گزینه‌ی صحیح گزینه‌ی چهارم $x = \frac{-3\pi}{2}$ می‌باشد.

$$\sin \alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{15}{17}$$

چون α در ناحیه‌ی دوم دایره‌ی مثلثاتی است، پس $\cos \alpha < 0$ و:

$$\cos \alpha = \frac{-15}{17} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{-15}{17}} = \frac{-8}{15}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{-8}{15} + \frac{4}{3}}{1 - \left(\frac{-8}{15} \times \frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{-24 + 60}{45}}{\frac{45 + 32}{45}} = \frac{36}{77}$$

$$\sin 68^\circ = \sin(90^\circ - 22^\circ) = \cos 22^\circ = \cos(2 \times 11^\circ) = 2\cos^2 11^\circ - 1 = 2x^2 - 1$$

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{25}\right) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow \cos x - \sin x &= \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin x - \cos x = \frac{-1}{2}} \end{aligned}$$

روش دیگر: می‌توانیم از اتحادهای زیر استفاده کنیم:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

لذا داریم:

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$15^\circ + 75^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \times 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

صفحات ۷۸ و ۷۹ کتاب

۴۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \sin x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$A = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x$$

$$A = \cos(2x + x) = \cos 3x$$

$$x = \frac{\pi}{9} \Rightarrow A = \cos \frac{2\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

صفحات ۷۸ و ۷۹ کتاب

۴۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A = \frac{\sin(2x + x) - \sin x \cdot \cos 2x}{\sin x \cdot \sin 2x - \cos(2x - x)} = \frac{\sin 3x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos 2x}{\sin x \cdot \sin 2x - \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x}$$

$$A = \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{-\cos 2x \cdot \cos x} = -\tan 2x$$

صفحات ۳۲ الی ۳۹ و ۷۹ کتاب

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$f\left(\cos \frac{\pi}{8}\right) = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} = -(2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1) = -\cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$