

-۳۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{array}{c} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16 \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ \text{هر دو فرد} \qquad \text{هر دو زوج} \end{array}$$

-۳۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\binom{10}{2} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 2^{10} - 1 - 10 - 45 = 2^{10} - 56 = 968$$

-۳۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{array}{ccccccccc} \binom{3}{1} & \binom{3}{1} & \binom{4}{1} & + & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & \times & \overset{\text{بزرگس}}{\uparrow} \\ x_1-x_2 & x_8-x_{10} & \xrightarrow{\text{باقیماند}} & x_1-x_2 & x_8-x_9 & & & = 36+18=54 \\ \text{هر سه جاییه از بین این دو گروه باشد} \end{array}$$

-۳۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{array}{c} (\mathbf{A} * \mathbf{B}) \Delta \circ \square \\ \binom{4}{1} \times 4! \times 2! = 192 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \end{array}$$

-۳۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$|\overline{EF} \cap \overline{CD}| = \frac{10!}{6!4!} - \frac{3!}{2!} \times \frac{6!}{3!3!} - \frac{6!}{4!2!} \times \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \times \frac{2!}{1!} \times \frac{3!}{2!} = 210 - 60 - 45 + 18 = 123$$

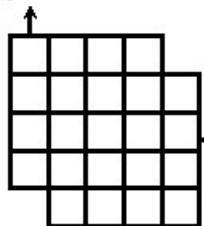
-۳۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cccc} 3 & 7 & 6 & 5 \\ 6 & & & \\ 7 & & & \\ 9 & & & \end{array} \right. \quad 3 \times 7 \times 6 \times 5 \\ + = 6 \times 5 (21+4) = 750 \\ \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 6 & 5 \\ 5 & & & \\ 6 & & & \\ 7 & & & \\ 9 & & & \end{array} \right. \quad 4 \times 6 \times 5 \end{array}$$

-۳۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$|\overline{1} \cap \overline{+}| = \underbrace{\frac{3 \times 4^3}{6}}_{\text{کل}} - \underbrace{\frac{2 \times 3^3}{4}}_{\text{فاقد صفر}} - \underbrace{\frac{3^3}{1}}_{\text{فاقد ۱}} + \underbrace{\frac{2^3}{0}}_{\text{فاقد ۰}} = 192 - 54 - 81 + 16 = 73$$

مریع‌های بالا



مریع‌های پایین

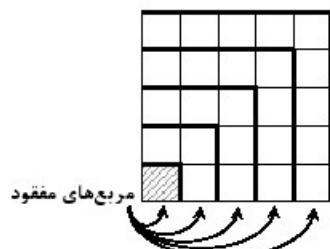
از اصل شمول استفاده می‌کنیم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A| = \sum_{i=1}^5 i^2 = \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30$$

$$|A \cap B| = \sum_{i=1}^3 i^2 = \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14$$

$$|A \cup B| = 30 + 30 - 14 = 46$$

راه حل دوم: شبکه را به صورت کامل 5×5 در نظر بگیریم و مریع‌های تخریب شده را کم کنیم:

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$$

از بالا هم ۵ مریع مفقود است که یکی مشترک است و آن مریع 5×5 است، لذا تعداد مریع‌های مفقود عبارت است از:

$$2 \times 5 - 1 = 9$$

$$\text{مریع‌های موجود: } 55 - 9 = 46$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا عدد ۱ را به یکی از وجوده نسبت می‌دهیم. وجه مقابل به این عدد ۵ انتخاب خواهد داشت. حال جایگشت ۴ رقم باقی مانده نسبت به این دو وجه دایرہ ایست لذا $3!$ حالت خواهند داشت. لذا در مجموع $= 3! = 30$ حالت امکان پذیر است.

۴۲- گزینه ۱ پاسخ است.

دیگر حق جایه جا کردن F را نداریم.

$$\underbrace{\binom{9}{3} \times 3!}_{\text{F نیاشد}} + \underbrace{\binom{9}{2} \times 2!}_{\text{F نیاشد}} = 9 \times 8 \times 7 + 9 \times 8 = 9 \times 8 \times 8 = 576$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر عددی بخواهد مضرب ۴ باشد، باید ۲ رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد: جون در عدد امکان تکرار ارقام وجود دارد، لذا: (البته جواب حالت بدون تکرار در گزینه‌ها موجود نیست).

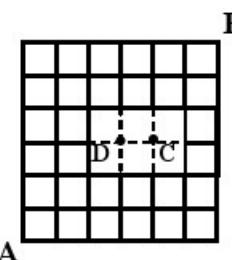
۴	۵	۸	
۲	.		
۴	.		
.	۴		
.	.		
۳	۲		
۵	۲		
۲	۴		
۴	۴		

$4 \times 5 \times 8 = 160$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ است.

وقتی دو نفر در میانه‌ی راه بهم برخورد می‌کنند، مانند آن است که یکی از آن‌ها سر جای خود بایستد و دیگری به سمت او حرکت کند (یعنی مثل مسائل قبلی).

مسیرهایی که از C یا از D می‌گذرند تخریب شده اند لذا به دنبال مسیرهایی هستیم که نه از C بگذرند نه از D



$$|\bar{C} \cap \bar{D}| = |S| - |C| - |D| + |C \cap D| = \frac{12!}{6!6!} - \frac{6!}{3!3!} \times \frac{6!}{3!3!} - \frac{7!}{2!4!} \times \frac{5!}{2!3!} + \frac{6!}{3!3!} \times \frac{5!}{2!3!} = 374$$

- گزینه ۳ پاسخ است.

حالات نامطلوب $x > 6$ یا $y > 6$ هستند:

$$x > 3 \Rightarrow x' = x - 3 \quad \text{و} \quad y > 6 \Rightarrow y' = y - 6$$

پس: $y + 6 = y'$ و $x = x' + 3$ (البته بهتر بود از همان ابتدا یک سره به همین صورت می‌نوشتیم.)

با جایگذاری این دو در معادله خواهیم داشت:

$$|A \cap B'| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = \binom{10}{2} - \left[\binom{7}{2} + \binom{4}{2} - \binom{0}{2} \right] = 45 - (21 + 6 - 0) = 18$$

جواب طبیعی ندارد

- گزینه ۲ پاسخ است.

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2; x_3 \geq 3 \Rightarrow (x'_1 + 1) + (x'_2 + 2) + (x'_3 + 3) = 10$$

$$\Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_3 = 4 \quad \text{نعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} = \binom{6}{2} = 15$$

- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3!} = 84$$

- گزینه ۴ پاسخ است.

ابتدا ۵ سیب را بین نفرهای اول و دوم توزیع می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 = 5 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{6}{1} = 6$$

اکنون $9 - 5 = 4$ سیب باقی‌مانده را بین نفرهای سوم و چهارم توزیع می‌کنیم:

$$x_3 + x_4 = 4 \xrightarrow{\text{روش‌های توزیع}} \binom{5}{1} = 5$$

لذا طبق اصل ضرب جواب سؤال برابر است با: $30 = 6 \times 5$.

- گزینه ۳ پاسخ است.

جواب سؤال برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ ، با این شرط که یکی از x_i ها برابر ۳

باشد. لذا ابتدا به $\binom{4}{1}$ طریق می‌توان متغیری را که برابر ۳ است بینداز. فرض کنید $x_1 = 3$ ، در این صورت معادله به صورت

$$x_2 + x_3 + x_4 = 2 \quad \text{تبديل می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر} = \binom{4}{2} \quad \text{است. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های}$$

توزیع مطلوب سؤال برابر است با: $24 = 4 \times 6$

نذکر: دقت کنید که وقتی یکی از متغیرها برابر ۳ است، دیگر بقیه‌ی متغیرها نمی‌توانند برابر ۳ باشند و این روش شمارش، به اشتباه

حالی را تکراری نمی‌شمارد.

-۵۰- گزینه ۴ پاسخ است.

چون ضریب x غیر از یک است، باید برای x حالت‌بندی کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow y + z + w = 7 \Rightarrow \binom{6}{2} = 15 \quad \text{تعداد جوابها}$$

$$x = 2 \Rightarrow y + z + w = 5 \Rightarrow \binom{4}{2} = 6 \quad \text{تعداد جوابها}$$

$$x = 3 \Rightarrow y + z + w = 3 \Rightarrow \binom{2}{2} = 1 \quad \text{تعداد جوابها}$$

واضح است که به ازای $4 \geq x$ برای معادله جواب طبیعی به دست نمی‌آید، لذا تعداد جوابها برابر است با: $15+6+1=22$

-۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.

روش‌های توزیع ۵ خودکار یکسان بین ۳ نفر، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3=5$ که برابر

است با $\binom{7}{2}$. همچنین روش‌های توزیع ۴ مداد بین ۳ نفر نیز، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$x_1+x_2+x_3=4$ ، که برابر است با $\binom{6}{2}=15$. لذا طبق اصل ضرب تعداد روش‌های توزیع ۵ خودکار و ۴ مداد برابر است با:

$$15 \times 21 = 315$$

-۵۲- گزینه ۱ پاسخ است.

تذکر: تعداد جملات حاصل از بسط $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$ ، یعنی همان جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی

$$\cdot \binom{9+3-1}{3-1} = 55 \quad \text{x}_1+\cdots+x_k=n$$