تاریخ :	وقت : دقیقه	سریال ۱۴۷۷۹
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	
موضوع		دبیرستان علامه حلی تهران

۳۳. گزینه ۲ مجموعه $A_۱$ را اعداد کوچگ تر از ۶۶۶ مضرب ۷ و $A_۲$ را مضرب ۱۳ می نامیم. دلخواه تعداد اعضای مجموعه $A_۱ \cup A_۲$ است:

$$\left.\begin{array}{l} |A_۱| = \left\lfloor \dfrac{۶۶۵}{۷} \right\rfloor = ۹۵ \\ |A_۲| = \left\lfloor \dfrac{۶۶۵}{۱۳} \right\rfloor = ۵۱ \\ |A_۱ \cap A_۲| = \left\lfloor \dfrac{۶۶۵}{۱۳ \times ۷} \right\rfloor = ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow |A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| = ۹۵ + ۵۱ - ۷ = ۱۳۹$$

۳۴. گزینه ۴ می توان این مسأله را با اصل شمول و عدم شمول به دست آورد ولی با توجه به محدود بودن x ترجیح می دهیم با حالت بندی x به جواب برسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y+z \leq ۵ \Rightarrow (y,z) : (۵,۰),(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲),\cdots,(۰,۵) \Rightarrow \text{۶ جواب} \\ \Rightarrow y+z \leq ۴ \Rightarrow (y,z) : (۴,۰),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲),\cdots,(۰,۴) \Rightarrow \text{۵ جواب} \\ \Rightarrow y+z \leq ۳ \Rightarrow (y,z) : (۳,۰),(۱,۲),(۲,۱),\cdots,(۰,۳) \Rightarrow \text{۴ جواب} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{جواب} \\ ۶+۵+۴=۱۵\end{array}$$

۳۵. گزینه ۳

دو خانه دارای محدودیت است ولی امکانات خانه اول زیر مجموعه خانه سوم نمی باشد پس باید مسأله را تفکیک کنیم.

$$\underset{\bigcirc}{\overset{\{۱,۲,۳,۴,۵\}}{\uparrow}} \quad \bigcirc \quad \underset{\bigcirc}{\overset{\{۰,۲,۴\}}{\uparrow}}$$

دو حالت را در نظر می گیریم: الف) ۰ رقم یکان باشد. $۵ \times ۴ \times ۱ = ۲۰$

ب) ۰ رقم یکان نباشد (یعنی رقم یکان ۲ یا ۴ باشد) چون یکی از ارقام ۲ یا ۴ به عنوان یکان انتخاب می شوند پس یکی از انتخاب های رقم صدگان کم می شود.

$۴ \times ۴ \times ۲ = ۳۲$

پس کل حالاتی که عدد ساخته شده زوج است برابر $۲۰ + ۳۲ = ۵۲$ می باشد.

۳۶. گزینه ۲

رقم صدگان می تواند یکی از ارقام ۲ یا ۳ یا ۴ باشد. برای هر کدام از ارقام یکان یا دهگان، ۵ حق انتخاب داریم.

$$\underset{\boxed{۳}}{\overset{\{۲,۳,۴\}}{\uparrow}} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} = ۷۵$$

باید دقت کرد که یکی از این ۷۵ عدد ساخته شده عدد ۲۰۰ می باشد که قابل قبول نیست پس:

$= ۷۵ - ۱ = ۷۴$ جواب

۳۷. گزینه ۴

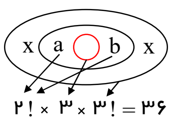
درایه های روی قطر اصلی می توانند همگی یک باشند یا همگی صفر باشند پس ۲ حالت داریم.

شش درایه باقی مانده هر کدام به ۲ حالت می توانند پر شوند یعنی $۲^۶$ حالت، پس داریم:

$$\begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

$$۲^۶ \times ۲ = ۱۲۸$$

۳۸. گزینه ۳



a, b به !۲ حالت جابجا می شوند، نفر وسط ۳ حالت دارد b, a و نفر وسط را یک حالت در نظر می گیریم با ۲ نفر باقی مانده گروهی ۳ نفره می شوند که !۳ حالت جابجا می شوند.

۳۹. گزینه ۴ کافی است رقم‌های ۳ را در کنار هم مانند یک رقم در نظر بگیریم با چهار رقم دیگر کلاً ۵ رقم داریم، مثلاً
$$۳۳۳\,,\,۴\,,\,۵\,,\,۶\,,\,۷$$
پس به $۵!$ حالت جابه‌جا می‌شوند. چون خود ارقام ۳ در جابه‌جایی حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند، پس در کل همان $۵!$ حالت می‌باشد.

۴۰. گزینه ۲ از کل جایگشت‌هایی که شامل BON می‌باشد جایگشت‌هایی که هم شامل BON و هم شامل CEM می باشد را کم می‌کنیم.

$$A = \text{جایگشت های شامل } BON \qquad B = \text{جایگشت های شامل } CEM$$
$$|A\cap B'| = |A-B| = |A| - |A\cap B| = ۷! - ۵! = ۴۹۲۰$$

۴۱. گزینه ۳ ابتدا حروف غیر از A را کنار هم چیده و در فضای بین آنها و ابتدا و انتهای چیدمان حروف A را قرار می دهیم.

$$\bigcirc B \bigcirc C \bigcirc D \bigcirc E \bigcirc F \bigcirc$$

$$\text{جابجایی سایر حروف} \leftarrow ۵! \times \underbrace{\binom{۶}{۳} \times ۱}_{\text{انتخاب سه مکان برای حروف } A} = ۱۲۰ \times ۲۰ = ۲۴۰۰$$

۴۲. گزینه ۴ ابتدا ۵ مرد را به $۴!$ طریق دور میز می نشانیم.سپس هر زن به ۲ صورت می تواند کنار همسرش بنشیند:سمت راست یا چپ او باشد.

$$\Rightarrow \text{جواب} = ۴! \times ۲^{۵} = ۲۴ \times ۳۲ = ۷۶۸$$

۴۳. گزینه ۴ هر کس می تواند به هر دو نفر رای دهد $\binom{۳}{۲}$ یا به یک نفر رای دهد $\binom{۳}{۱}$ یا به هیچ کس رای ندهد $\binom{۳}{۰}$. پس:

$$\text{حالات هر نفر} = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۰} = ۳ + ۳ + ۱ = ۷ \Rightarrow \text{جواب} = ۷^{۱۳}$$

۴۴. گزینه ۳ مجموعه‌ی A را می‌توان به سه زیر مجموعه‌ی $A_۱$, $A_۲$ و $A_۳$ چنان افراز کرد که باقیمانده‌ی تقسیم اعداد هر کدام از این مجموعه‌ها بر ۳، به ترتیب برابر ۱،۰ و ۲ باشد.

$$A_۱ = \{۱,۴,۷\} \;\;,\;\; A_۲ = \{۲,۵,۸\} \;\;,\;\; A_۳ = \{۳,۶,۹\}$$

برای این که مجموع سه عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ۲ حالت وجود دارد. در حالت اول، ۳ عدد را از یکی از زیر مجموعه‌ها انتخاب می‌کنیم و در حالت دوم، از هر زیرمجموعه، یک عدد انتخاب می‌کنیم.

$$\text{حالت اول}: \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۳} = ۳$$
$$\text{حالت دوم}: \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} \times \binom{۳}{۱} = ۲۷$$

تعداد کل جواب‌ها برابر است با:
$$۲۷ + ۳ = ۳۰$$

۴۵. گزینه ۱ می‌دانیم $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n} = ۲^{n}$ پس $a = ۲^{۱۲} - ۱$ و $b = ۲^{۶} - ۱$

داریم: $$\frac{a}{b} = \frac{۲^{۱۲} - ۱}{۲^{۶} - ۱} = \frac{(۲^{۶} - ۱)(۲^{۶} + ۱)}{۲^{۶} - ۱} = ۲^{۶} + ۱ = ۶۵$$

۴۶. گزینه ۲ می‌دانیم تعداد حالاتی که در n بار پرتاب سکه، k بار رو (پشت) بیاید برابر است با $\binom{n}{k}$. بنابراین تعداد حالاتی که در ۹ بار پرتاب سکه، ۴ یا ۵ بار سکه پشت بیاید برابر است با: $\binom{۹}{۵}+\binom{۹}{۴}$. از طرفی می‌دانیم $\binom{n}{k}=\binom{n-۱}{k}+\binom{n-۱}{k-۱}$. بنابراین مجموع تعداد حالات برابر است با $\binom{۱۰}{۵}$، یعنی ۵ بار رو آمدن سکه در ۱۰ بار پرتاب آن.

۴۷. گزینه ۲

کافی است از کل توابع یک به یک آنهایی که $f(۱)=۱$ یا $f(۲)=۲$ را کم کنیم.

پس طبق شمول و اصل عدم شمول داریم:

$$\text{جواب}=(\text{کل توابع یک به یک})-(f(۱)=۱)+(f(۲)=۲)-f(۱)=۱\ ,\ f(۲)=۲)$$
$$=۴\times۳\times۲\times۱-۳\times۲\times۱-۳\times۲\times۱+۲\times۱=۲۴-۶-۶+۲=۱۴$$

۴۸. گزینه ۲ در چنین گراف‌هایی که به گراف‌های مشاغل (دو بخشی) معروف‌اند. ابتدا سراغ شغل‌هایی می‌رویم که متقاضی کم‌تری دارد. یعنی ابتدا شغل $a_۱$ را به شخص $b_۱$ داده و هر شغل دیگری را که شخص $b_۱$ انجام می‌دهد از او می‌گیریم. سپس شغل $a_۲$ متقاضی کم‌تری دارد و ... بنابراین شغل $a_۱$ به شخص $b_۱$ و شغل $a_۲$ به شخص $b_۳$ و بعد از آن شغل $a_۴$ به شخص $b_۲$ و سپس شغل $a_۳$ را به $b_۴$ یا $b_۵$ می‌دهیم. پس به ۲ طریق می‌توان افراد را استخدام کرد.

$$۱)\ a_۱\Rightarrow b_۱\qquad ۲)\ a_۲\Rightarrow b_۳\qquad ۳)\ a_۴\Rightarrow b_۲\qquad ۴)\ a_۳\Rightarrow\begin{cases}b_۴\\ b_۵\end{cases}$$

تذکر: در سؤالات گراف مشاغل ابتدا به مشاغلی که فقط یک داوطلب دارند. نسبت می‌دهیم سپس امکان انجام سایر مشاغلی که آن داوطلب توانایی انجام آن‌ها را دارد از او می‌گیریم. در اولویت بعدی به داوطلبینی که فقط توانایی انجام یک کار را دارند. شغل نسبت می‌دهیم. سپس در مورد سایر شغل‌ها حالت‌بندی را انجام می‌دهیم. (دقت کنید که سرانجام ممکن است برخی از داوطلب‌ها بدون شغل بمانند.)

۴۹. گزینه ۳

واضح است درجات رئوس این گراف ۳ یا ۴ می‌باشد.

$$\begin{cases}x:\ \text{تعداد رئوس درجه‌ی ۳}\\ y:\ \text{تعداد رئوس درجه‌ی ۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۱۰\\ \sum degV=۲q=۳x+۴y=۲\times۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\ y=۴\end{cases}$$

۵۰. گزینه ۳ این گراف باید حداقل یک رأس از درجه‌ی می‌نیمم $\delta=۲$ و یک رأس از درجه‌ی ماکزیمم $\Delta=۴$ داشته باشد. حداکثر تعداد یال‌های این گراف موقعی به دست می‌آید که شش رأس از درجه‌ی ۴ و یک رأس از درجه‌ی ۲ داشته باشیم، یعنی دنباله‌ی درجات این گراف به صورت ۴,۴,۴,۴,۴,۴,۲ باشد. در این صورت داریم:

حداکثر تعداد یال‌های این گراف :

$$۲q_{max}=\sum_{i=۱}^{۷}\deg v_i\Rightarrow ۲q_{max}=۶\times۴+۲=۲۶\Rightarrow q_{max}=۱۳$$

۵۱. گزینه ۴ گزینه‌ی ۱: تعداد رئوس درجه‌ی فرد باید زوج باشد، لذا این گزینه رد می‌شود.

نکته: اگر در گرافی غیر کامل از مرتبه‌ی p، k رأس از درجه‌ی $p-۱$ داشته باشیم، حداقل درجه‌ی رئوس k خواهد بود. $(\delta\geq k)$

گزینه‌ی ۲: در این گراف ۲ رأس از درجه‌ی $p-۱$ داریم، لذا حداقل درجه باید ۲ باشد.

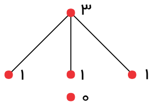
گزینه‌ی ۳: در این گراف هم یک رأس از درجه‌ی $p-۱$ داریم، لذا حداقل درجه باید یک باشد.

حال قابل رسم بودن دنباله‌ي گزینه‌ي (۴) را با كمك الگوریتم هاول – حكیمي بررسي مي‌كنیم:

$$\begin{array}{c|ccccc}۵&۴&۲&۲&۲&۱\\ ۰&۳&۱&۱&۱&۰\end{array}$$

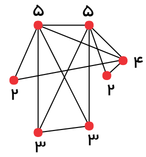
بزرگ‌ترین درجه‌ی (۵) را حذف کرده و از هریک از ۵ رأس بعدی یک واحد کم می‌کنیم:

چون این دنباله قابل رسم است، پس دنباله‌ی اول هم قابل رسم است.



۵۲. گزینه ۲ در دنباله درجات رئوس یک گراف ساده درجات به صورت نزولی مرتب می‌شوند و تعداد رئوس فرد عددی زوج می‌باشد.

پس: ۱) a,b یکی فرد یکی زوج است ۲) $۵ \geq a \geq b \geq ۳$



$$۳)\sum \deg v_i = ۲q$$

$$\Rightarrow ۵+a+b+۳+۳+۲+۲ = ۲۴$$

$$\Rightarrow a+b = ۹ \xrightarrow{۳\leq a,b\leq ۵} a=۵, b=۴$$

$$\Rightarrow ۳a+۲b = ۱۵+۸ = ۲۳$$