تاریخ : | وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی : | تعداد سوالات: ۲۰
موضوع | دبیرستان علامه حلی تهران
سریال ۱۴۷۷۹۱

۳۳. گزینه ۴ می توان این مسأله را با اصل شمول و عدم شمول به دست آورد ولی با توجه به محدود بودن X ترجیح می دهیم با حالت بندی x به جواب برسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y+z\leq ۵ \Rightarrow (y,z):(۵,۰),(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲),\cdots,(۰,۵) \Rightarrow \text{۶ جواب} \\ \Rightarrow y+z\leq ۴ \Rightarrow (y,z):(۴,۰),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲),\cdots,(۰,۴) \Rightarrow \text{۵ جواب} \\ \Rightarrow y+z\leq ۳ \Rightarrow (y,z):(۳,۰),(۱,۲),(۲,۱),\cdots,(۰,۳) \Rightarrow \text{۴ جواب} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{جواب} \\ ۶+۵+۴=۱۵\end{array}$$

۳۴. گزینه ۱

کل اعداد چهاررقمی بزرگ تر یا مساوی ۳۰۰۰ را می یابیم:

$$\underset{\uparrow \atop \{۳,۴,۵\}}{\boxed{۳}} \times \boxed{۶} \times \boxed{۶} \times \boxed{۶} = ۶۴۸$$

اعداد بین ۲۹۹۳ و ۳۰۰۰ چون همگی دارای رقم ۹ می باشند، بنابراین جواب تست همان اعداد چهاررقمی بزرگ تر یا مساوی ۳۰۰۰ یعنی ۶۴۶ تا می باشد.

۳۵. گزینه ۳ ابتدا سه تیم انتخاب می کنیم سپس از هر تیم پنج نفره یک نفر را انتخاب می کنیم.

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}\times\binom{۵}{۱}\times\binom{۵}{۱} = ۴\times ۱۲۵ = ۵۰۰$$

۳۶. گزینه ۳

$$\text{جواب} = \underbrace{\binom{۱۰}{۱}}_{\text{ریاست}} \times \underbrace{\binom{۱۰-۱}{۲}}_{\text{معاونت}} \times \underbrace{\binom{۱۰-۱-۲}{۲}}_{\text{آبدارچی}} \times \underbrace{\binom{۱۰-۱-۲-۱}{۱}}_{\text{منشی}}$$

$$= \binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۲}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱} = ۳۷۸۰۰$$

چون سِمَت ها متفاوت است کافی است از یکی از آنها شروع کنیم و بقیه را محاسبه کنیم.

۳۷. گزینه ۲

ابتدا کل حالاتی را که می توان ۴ نقطه از بین نقاط فوق انتخاب کرد را محاسبه می کنیم: $\binom{۹}{۴} = \dfrac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱} = ۱۲۶$

از بین این ها، حالاتی که چهار نقطه بر یک استقامت یا سه نقطه بر یک استقامت و یک نقطه جای دیگر باشد، قابل قبول نیست.

$$\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۳}\times\binom{۶}{۱} = ۱+۴\times۵+۱\times۶ = ۲۷$$

بنابراین تعداد حالات قابل قبول برابر $۱۲۶-۲۷=۹۹$ خواهد بود.

۳۸. گزینه ۴ اعداد مربع کامل مضرب ۱۳ را می یابیم، سپس توان های $۳\times۲=۶$ اُم مضرب ۱۳ را می یابیم و از هم کم می کنیم تا جواب پیدا شود (طبق اصل شمول و عدم شمول):

$$a = ۱۳q \xrightarrow[(۱)]{\text{مربع است } a} q = ۱۳k^۲ \Rightarrow a = (۱۳k)^۲ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ \leq a \leq ۹۹۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ \leq (۱۳k)^۲ \leq ۹۹۹۹۹$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ \leq ۱۳k \leq ۳۱۶ \Rightarrow ۸ \leq k \leq ۲۴ \Rightarrow ۲۴-۸+۱ = ۱۷ = \text{تعداد a}$$

$(۲)\ ۱۳|a \Rightarrow a = ۱۳q \Rightarrow a = (۱۳q)^۶ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ \leq a \leq ۹۹۹۹۹ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ \leq (۱۳q)^۶ \leq ۹۹۹۹۹$

$\Rightarrow ۵ \leq ۱۳q \leq ۶ \Rightarrow$ a تعداد $= ۰$

$\Rightarrow (۲),(۱)$ جواب $= (۱)$ جواب $-(۲)$ جواب $= ۱۷ - ۰ = ۱۷$

۳۹. گزینه ۳

ابتدا باید تکلیف متغیرهای غیر عادی یعنی $x_۱$ و $x_۲$ را روشن کنیم.

$(x_۱ + x_۲)^۳ + x_۳ + x_۴ = ۲۰$

اگر $\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow x_۳ + x_۴ = ۱۲ \xrightarrow[-۲]{x_۳\geq ۱, x_۴ \geq ۱} \begin{cases} y_۳ + y_۴ = ۱۰ \\ y_۳\ ,\ y_۴ \geq ۰ \end{cases}$

$\Rightarrow$ تعداد جواب $= \binom{۱۰+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۱}{۱} = ۱۱$

اگر $\begin{cases} x_۱ = ۱ \\ x_۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow x_۳ + x_۴ = -۷$ جواب ندارد

۴۰. گزینه ۲ برای هر دو عددی سه حالت ممکن است. یا برابرند یا یکی بزرگ تر از دیگری است. در این مسأله که شرایط یکسانی بر x, y حکم فرماست، تعداد جواب های $y > x$ برابر با تعداد جواب های $x > y$ است. پس کافی است کل جواب ها را بیابیم و از جواب های برابر کم کرده و تقسیم بر ۲ کنیم.

(۱) کل جواب ها $= \binom{۸+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۰}{۲} = ۴۵$

$x = y \Rightarrow ۲x + z = ۸ \Rightarrow$ جواب ها $(x,y) : (۰,۸)\ ,\ (۱,۶)\ ,\ (۲,۴)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۴,۰) \Rightarrow$ جواب ۵ (۲)

$\Rightarrow x < y$ جواب های با شرط $= \frac{۴۵ - ۵}{۲} = ۲۰$ جواب

۴۱. گزینه ۳ جملات این بسط به صورت $x^{a_۱} y^{a_۲} z^{a_۳}$ است که در آن:

$a_۱ + a_۲ + a_۳ = ۶\ ,\ a_۱, a_۲, a_۳ \geq ۰$

$\Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{۶+۳-۱}{۳-۱} = ۲۸$

۴۲. گزینه ۳ اولین دایره از سمت چپ را با ۵ رنگ مختلف می توانیم رنگ آمیزی کنیم ولی دایره دوم فقط با چهار رنگ مختلف می تواند رنگ آمیزی شود (نباید با دایره اول همرنگ باشد) به همین ترتیب دایره سوم نیز نباید با دایره دوم همرنگ باشد پس آن هم به چهار طریق رنگ آمیزی می شود و ...

جواب $= ۵ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۱۲۸۰$

۴۳. گزینه ۲ ابتدا از بین این ۵ جفت به $\binom{۵}{۱}$ طریق جفت مورد نظر را انتخاب می کنیم. حال از بین ۴ جفت متمایز باید ۲ لنگه ناجفت انتخاب کرد ابتدا دو جفت را بین آنها انتخاب کرده و از بین هر جفت یکی را انتخاب می کنیم:

$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۱۲۰$

۴۴. گزینه ۴ دو حالت داریم:

چهار ضلعی سمت راست ضلع AB باشد: کافی است دو نقطه انتخاب شود: $\binom{۴}{۲} = ۶$

چهار ضلعی سمت چپ ضلع AB باشد: کافی است دو نقطه انتخاب شود: $\binom{۳}{۲} = ۳$

$\Rightarrow$ جواب= $۶ + ۳ = ۹$

۴۵. گزینه ۴ حاصل مورد نظر را برابر I در نظر می گیریم و از قاعده پاسکال استفاده می‌کنیم:

قاعده پاسکال: $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+۱}=\binom{n+۱}{r+۱}$

$$I=I+\binom{۵}{۲}-\binom{۵}{۲}=\binom{۵}{۲}+\binom{۵}{۳}+\binom{۶}{۴}+\binom{۷}{۵}+\binom{۸}{۶}+\binom{۹}{۷}+\binom{۱۰}{۸}-\binom{۵}{۲}$$
$$=\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۴}+\cdots+\binom{۱۰}{۸}-\binom{۵}{۲}=\cdots=\binom{۱۱}{۸}-\binom{۵}{۲}=۱۶۵-۱۰=۱۵۵$$

۴۶. گزینه ۳

تعداد جواب $=\binom{\sqrt{s}+۴-۱}{۴-۱}=\binom{\sqrt{s}+۳}{۳}=۳۵\Rightarrow\frac{(\sqrt{s}+۳)(\sqrt{s}+۲)(\sqrt{s}+۱)}{۳!}=۳۵$

$\Rightarrow(\sqrt{s}+۳)(\sqrt{s}+۲)(\sqrt{s}+۱)=۲۱۰=۷\times۶\times۵\Rightarrow\sqrt{s}+۱=۵\Rightarrow\sqrt{s}=۴\Rightarrow s=۱۶$

۴۷. گزینه ۳   اگر یک فرد دیگر غیر از این چهار نفر، همراه آن‌ها دور میز گرد بنشینند، این کار به $(۵-۱)!=۲۴$ طرق ممکن است. حال اگر فرد، میز را ترک کند، خواسته مسأله برآورده می‌شود.

روش دوم: نفر اول به یک طریق در یکی از صندلی‌ها قرار می‌گیری می‌ماند، ۴ صندلی و ۳ نفر، تعداد حالات انتخاب ۳ صندلی از ۴ صندلی مانده از دستور $۱\times\binom{۴}{۳}\times۳!=۲۴$ حالت می‌باشد.

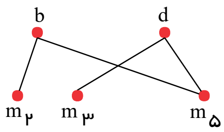
۴۸. گزینه ۲   نکته: در گراف مرتبه p همواره $\Delta\le p-۱$ می‌باشد.

وقتی سه رأس ایزوله را کنار بگذاریم، ۸ رأس می‌ماند. وقتی ۸ رأس داریم حداکثر Δ برابر ۷ می‌باشد. ($\Delta\le p-۱$)

۴۹. گزینه ۴

$$\begin{cases}a: m_۱, m_۴, m_۳\\ b: m_۲, m_۴, m_۵\\ c: m_۴\\ d: m_۳, m_۴, m_۵\end{cases}$$

برای حل این نوع سوال‌ها ابتدا از مشاغلی شروع به حل می‌کنیم که کمترین داوطلب را دارند. پس شغل c برای $m_۴$ است. اگر شغل a را در نظر بگیریم افراد $m_۱$ و $m_۴$ داوطلب هستند ولی چون $m_۴$ دارای شغل است پس شغل a برای $m_۱$ است. اگر $m_۱$ و $m_۴$ و شغل‌های آن‌ها را از گراف حذف کنیم گراف روبرو را داریم:



برای پیدا کردن این دو شغل حالات زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$c\to m_۴ : a\to m_۱ : b\begin{cases}m_۲ : d\begin{cases}m_۳\\ m_۵\end{cases}\\ m_۵\to d\to m_۳\end{cases}$$

$(m_۲,b),(m_۳,d)$

$(m_۲,b),(m_۵,d)$

$(m_۵,b),(m_۳,d)$

پس ۳ حالت برای تقسیم کردن این شغل‌ها وجود دارد. توجه کنید هدف حل سوال این است که هیچ شغلی خالی نماند.

۵۰. گزینه ۴   فرض می کنیم گراف k' رأس فرد داشته باشد پس: $k+k'=p$

از آن جایی که تعداد رئوس فرد هر گراف عددی زوج است پس k' عددی زوج است بنابراین k و p یا هر دو فردند یا هردو زوج پس $p+k$ عددی زوج است.

۵۱. گزینه ۱   باید تعداد رئوس درجه فرد این دنباله زوج باشد در نتیجه $k+۲$ و $۳k+۱$ باید هر دو یا فرد باشند یا هر دو زوج باشند و چون $k\in N$ می‌باشد این کار غیر ممکن می‌باشد زیرا اگر k زوج باشد، $k+۲$ زوج و $۳k+۱$ فرد است و اگر k فرد باشد ، $k+۲$ فرد و $۳k+۱$ زوج خواهد بود.

۵۲. گزینه ۳   برای پاسخ به سؤال یا باید گراف متناظر با دنباله‌های گزینه‌ها را رسم کنیم یا از روش هاول - حکیمی استفاده کنیم.

$۷, ۷, ۶, ۴, ۴, ۴, ۲, ۱, ۱ \rightarrow ۶, ۵, ۳, ۳, ۳, ۱, ۰, ۱ \rightarrow ۶, ۵, ۳, ۳, ۳, ۱, ۱, ۰ \rightarrow ۴, ۲, ۲, ۲, ۰, ۰, ۰$

از **۷** رأس بالا **۳** رأس ایزوله می‌باشند می‌ماند **۴** رأس لذا حداکثر درجه **۳** خواهد بود و $\Delta = ۴$ غیر ممکن است.