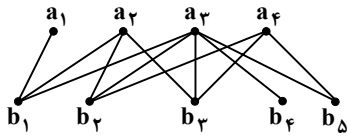


پایخ تشریحی:

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا گراف مربوط به مشاغل را رسم می‌کنیم:



چون شغل a_1 تک داوطلبی است، لذا به b_1 نسبت می‌دهیم.

$$a_1 \rightarrow b_1$$

چون شغل a_3 داوطلبی دارد که فقط توانایی انجام a_3 را دارد، مسأله را روی a_3 حالت بندی می‌کنیم:

$$a_3 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_2 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_4 \rightarrow b_5 \quad \text{حالت ۱}$$

$$a_3 \rightarrow b_3 \Rightarrow a_2 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_4 \rightarrow b_5 \quad \text{حالت ۱}$$

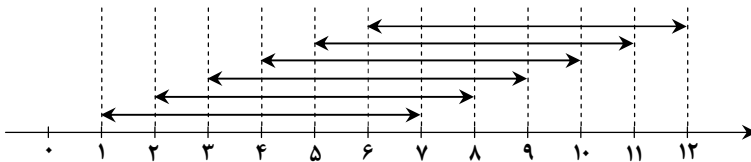
$$a_3 \rightarrow b_4 \Rightarrow \begin{cases} a_2 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_4 \rightarrow \begin{cases} b_5 \\ b_3 \end{cases} \\ a_2 \rightarrow b_3 \Rightarrow a_4 \rightarrow \begin{cases} b_2 \\ b_5 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{حالت ۲} \\ \text{حالت ۲} \end{matrix}$$

$$a_3 \rightarrow b_5 \Rightarrow \begin{cases} a_4 \rightarrow b_2 \\ a_2 \rightarrow b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 \rightarrow b_3 \\ a_2 \rightarrow b_2 \end{cases} \quad \text{حالت ۲}$$

جمعاً: $1+1+2+2+2=8$ حالت امکان پذیر است.

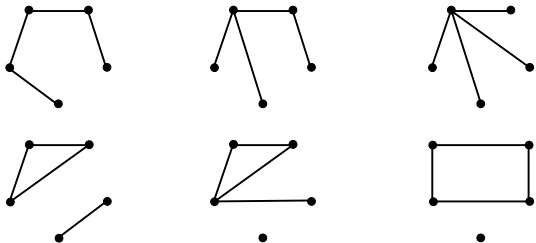
۲- گزینه ۴ پاسخ است.

بازه‌ها به قرار زیرند:



چون بازه $(1,7)$ با بازه $(6,12)$ اشتراک دارد، لذا تمام بازه‌ها با هم اشتراک دارند و لذا گراف کامل است.

$$\binom{6}{2} = 15$$



۳- گزینه ۴ پاسخ است.

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا دو یالی که به رأس a متصل می‌شوند را انتخاب کرده و سپس از بین یال‌هایی که بین b و c و d و e متصل می‌شوند، دو یال انتخاب می‌کنیم:

یال‌های ممکن بین b و c و d و e و f

$$\binom{5}{2} \times \binom{10}{2} = 10 \times 45 = 450$$

یال‌های متصل به a

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

راه اول: اگر x رأس درجه‌ی ۸ و y رأس درجه‌ی ۹ داشته باشیم، آن‌گاه:

$$\left. \begin{aligned} 8x + 9y = 2q = 86 \\ x + y = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 8x + 9(10 - x) = 86 \Rightarrow x = 4$$

راه دوم: چون این گراف دو یال از گراف کامل مرتبه‌ی ۱۰ کم‌تر دارد، اگر این یال را از ۴ رأس مختلف حذف کنیم، درجات گراف به صورت: ۸, ۸, ۸, ۸, ۹, ۹, ۹, ۹, ۹, ۹ می‌آید. لذا ۴ رأس درجه‌ی ۸ داریم.

دقت کنید اگر این دو یال را از یک رأس حذف کنیم، رأس درجه‌ی ۷ به وجود خواهد آمد که با فرض این که رئوس یا درجه‌ی ۸ یا درجه‌ی ۹ هستند، در تناقض‌اند.

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} \text{••••••••••} \\ p = 20 \\ q = 8 \Rightarrow p' = 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حداقل رئوس ایزوله} = 20 - 16 = 4$$

در هر گراف که $p \geq 2q$ باشد، حداقل $p - 2q$ رأس ایزوله داریم.

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$4p = 2q \rightarrow q = 2p \rightarrow q + 7 = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow 4p + 14 = p(p-1) \rightarrow p^2 - 5p - 14 = 0 \rightarrow (p-7)(p+2) = 0 \rightarrow p = 7$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

چون جمله عمومی این دنباله به صورت دنباله‌ی حسابی است، لذا باید قدر نسبت آن برابر صفر باشد ($b = 0$). لذا گراف a -منتظم است، پس:

$$10 \times a = 30 \rightarrow a = 3 \rightarrow a + b = 3$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

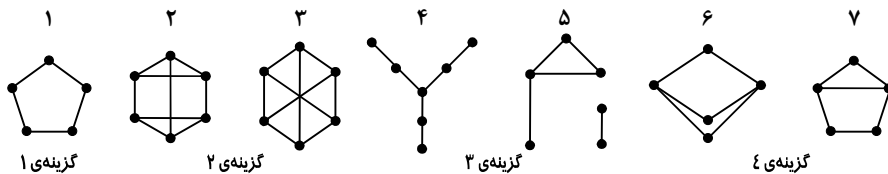
هر مسیر به طول ۴ دنباله‌ای ۵ رأسی است که در آن رأس تکراری وجود ندارد و هر دو جمله‌ی متوالی دنباله، مجاورند. در گراف کامل شرط دوم همواره برقرار است پس کافی است دنباله‌ای شامل ۵ رأس متمایز بنویسیم که در آن a و b مجاور باشند. ابتدا سه رأس از چهار رأس دیگر را انتخاب می‌کنیم (مانند c و e و f) سپس آن‌ها را در یک ردیف چنان مرتب می‌کنیم که بسته‌ی a و b کنار هم باشند و چون جهت حرکت در مسیر اهمیت ندارد ما همواره در مسیرهایی که مورد محاسبه قرار می‌دهیم از a به b حرکت می‌کنیم.

○, ○, ○, ○, ○

$$\textcircled{a, b}, c, e, f \quad \binom{4}{3} \times 4! = 96$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

شکل گراف برای هر یک از گزینه‌ها به صورت زیر است:



گراف‌های شکل ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷ همگی دارای چندضلعی بدون قطر هستند، پس بازه‌ای نیستند.

شکل ۴ تنها درخت مرتبه ۷ است که بازه‌ای نیست.

فقط شکل ۵ می‌تواند بازه‌ای باشد، بنابراین گزینه‌ی ۳ جواب درست است.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\sum \deg v_i = 7 + 7 + 6 + x + y + 3 + 3 + 3 = 2q = 2 \times 18 \Rightarrow x + y = 36 - 29 = 7$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{3 \leq x, y \leq 6}{x + y = 7} \Rightarrow \text{تنها حالت ممکن} \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

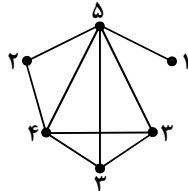
	(۱)	(۲)	(۳)
w_1	a	d	d
w_2	b	b	b
w_3	c	c	c
w_4	d	a	e

کار w_3 الزاماً باید به c سپرده شود آن گاه (با حذف c). w_4 فقط یک داوطلب خواهد داشت (b) که ناگزیر به او سپرده می شود، سپس برای w_1 دو فرض قابل تصور است، اگر w_1 به a سپرده شود، w_4 فقط به e سپرده خواهد شد و اگر w_1 به d سپرده شود برای w_4 دو حالت ممکن است، یکی آن که به a و دیگری آن که به e سپرده شود. بنابراین در مجموع سه راه حل ممکن برای تشخیص مشاغل به افراد وجود دارد:

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

در گزینه ۱: ۳ رأس فرد وجود دارد، پس گراف نیست.

در گزینه ۲: دو رأس با درجه ۵ $p-1=5$ وجود دارد که با تمامی رأس های دیگر مجاور هستند، پس مینیمم درجه باید حداقل ۲ باشد.



در گزینه ۳: رأس ۴ درجه ۵ با تمامی رأس ها مجاور است. با حذف آن به دنباله ۰، ۰، ۰، ۱، ۳ می رسیم که گراف نیست، ولی دنباله ۲ گزینه ۲ می تواند یک گراف باشد:

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow p \leq \frac{2q}{\delta} \Rightarrow p \leq \frac{2 \times 23}{5} \Rightarrow p_{\max} = 9$$

دنباله ۵ درجات گرافی با این ویژگی به صورت زیر است: ۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

طبق داده های سؤال می توانیم بنویسیم: $p+q=15$

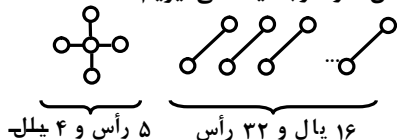
$$\begin{cases} 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3}{2}p \\ q = 5p - 21 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}p = 5p - 21 \Rightarrow p = 6$$

$$\Rightarrow 3p = 10p - 42 \Rightarrow p = 6$$

$$q = 9 \Rightarrow p + q = 15$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

برای این که مرتبه ی گراف حداکثر شود یک رأس درجه ۴ در نظر گرفته و بقیه ی رأس ها را درجه یک می گیریم.



در کل $32 + 5 = 37$ رأس وجود دارد.

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر $a = (1, 2)$ ، $b = (2, 4)$ ، $c = (0, 3)$ ، $d = (1, 4)$ و $e = (3, 6)$ فرض

شود، آن گاه گراف بازه ها به صورت شکل مقابل است:

دوره های به طول ۳ عبارتند از $acda$ ، $bdcb$ و $bdeb$. دوره های

به طول ۴ عبارتند از $bedcb$ و $acbda$ و دور به طول ۵ به صورت

$acbeda$ است.

۱۸- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا با ۶ رأس، گراف کامل K_6 را می سازیم. سپس دو رأس دیگر با درجه ۳ $\delta = 3$ را به ۶ رأس قبلی وصل می کنیم. بنابراین

حداکثر تعداد یال ها برابر می شود با:

$$q(K_6) + 3 + 3 = \frac{6 \times 5}{2} + 6 = 21$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.

همان طور که می‌دانیم تعداد دورهای به طول m در گراف کامل K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$$

رأس a حتماً یکی از ۴ رأس موجود در دور به طول ۴ است و رأس g قطعاً در میان این رأس‌ها نیست. پس باید از ۶ رأس دیگر، ۳ رأس را انتخاب کنیم.

تعداد دورها با ویژگی مورد نظر برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \frac{(4-1)!}{2} = 20 \times 3 = 60$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\text{مجموع درجات} = 2q \Rightarrow 3+2+2+2+1+1+1+1+1 = 2q \Rightarrow q=7, p=9$$

می‌دانیم گراف فرد منتظم از مرتبه فرد نداریم پس باید r زوج باشد و چون در این دنباله درجه‌ی ۳ داریم پس حداقل مقدار برای r ، ۴ خواهد بود.

با این توضیح اگر گراف ۴- منتظم را در نظر بگیریم، داریم:

$$pr = 2q'$$

$$9 \times 4 = 2q' \Rightarrow q' = 18$$

پس حداقل تعداد یال لازم برابر است با:

$$q' - q = 18 - 7 = 11$$