



۷- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا با ۶ رأس، گراف کامل  $K_6$  را می‌سازیم. سپس دو رأس دیگر با درجه‌ی  $\delta = 3$  را به ۶ رأس قبلی وصل می‌کنیم. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر می‌شود با:

$$q(K_6) + 3 + 3 = \frac{6+5}{2} + 6 = 21$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

همان‌طور که می‌دانیم تعداد دورهای به طول  $m$  در گراف کامل  $K_p$  برابر است با:

$$\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$$

رأس  $a$  حتماً یکی از ۴ رأس موجود در دور به طول ۴ است و رأس  $g$  قطعاً در میان این رأس‌ها نیست. پس باید از ۶ رأس دیگر، ۳ رأس را انتخاب کنیم.

تعداد دورها با ویژگی مورد نظر برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \frac{(4-1)!}{2} = 20 \times 3 = 60$$

۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$2q = 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2q \Rightarrow q = 7, p = 9$$

می‌دانیم گراف فرد منتظم از مرتبه فرد نداریم پس باید  $r$  زوج باشد و چون در این دنباله درجه‌ی ۳ داریم پس حداقل مقدار برای  $r, 4$  خواهد بود.

با این توضیح اگر گراف ۴- منتظم را در نظر بگیریم، داریم:

$$pr = 2q'$$

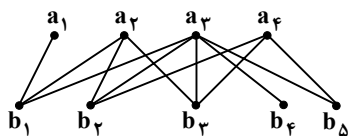
$$9 \times 4 = 2q' \Rightarrow q' = 18$$

پس حداقل تعداد یال لازم برابر است با:

$$q' - q = 18 - 7 = 11$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا گراف مربوط به مشاغل را رسم می‌کنیم:



چون شغل  $a_1$  تک داوطلبی است، لذا به  $b_1$  نسبت می‌دهیم.

$$a_1 \rightarrow b_1$$

چون شغل  $a_3$  داوطلبی دارد که فقط توانایی انجام  $a_3$  را دارد، مسأله را روی  $a_3$  حالت‌بندی می‌کنیم:

$$a_3 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_3 \rightarrow b_3 \Rightarrow a_4 \rightarrow b_5 \quad \text{حالت ۱}$$

$$a_3 \rightarrow b_3 \Rightarrow a_2 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_4 \rightarrow b_5 \quad \text{حالت ۱}$$

$$a_3 \rightarrow b_4 \Rightarrow \begin{cases} a_2 \rightarrow b_2 \Rightarrow a_4 \rightarrow \begin{cases} b_5 \\ b_3 \end{cases} \\ a_2 \rightarrow b_3 \Rightarrow a_4 \rightarrow \begin{cases} b_2 \\ b_5 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{حالت ۲} \\ \text{حالت ۲} \end{matrix}$$

$$a_3 \rightarrow b_5 \Rightarrow \begin{cases} a_4 \rightarrow b_2 \\ a_2 \rightarrow b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 \rightarrow b_3 \\ a_2 \rightarrow b_2 \end{cases} \quad \text{حالت ۲}$$

جمعاً:  $1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8$  حالت امکان‌پذیر است.



۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

هر مسیر به طول ۴ دنباله‌ای ۵ رأسی است که در آن رأس تکراری وجود ندارد و هر دو جمله‌ی متواری دنباله، مجاورند. در گراف کامل شرط دوم همواره برقرار است پس کافی است دنباله‌ای شامل ۵ رأس متمایز بنویسیم که در آن  $a$  و  $b$  مجاور باشند. ابتدا سه رأس از چهار رأس دیگر را انتخاب می‌کنیم (مانند  $c$  و  $e$  و  $f$ ) سپس آن‌ها را در یک ردیف چنان مرتب می‌کنیم که بسته‌ی  $a$  و  $b$  کنار هم باشند و چون جهت حرکت در مسیر اهمیت ندارد ما همواره در مسیرهایی که مورد محاسبه قرار می‌دهیم از  $a$  به  $b$  حرکت می‌کنیم.

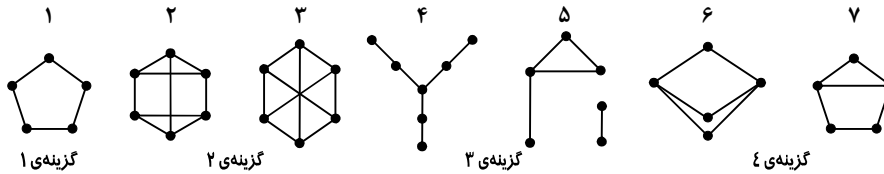
$\circ, \circ, \circ, \circ, \circ$

$$\left( \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right) \times 4! = 96$$

$a, b, c, e, f$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

شکل گراف برای هر یک از گزینه‌ها به صورت زیر است:



گراف‌های شکل ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷ همگی دارای چندضلعی بدون قطر هستند، پس بازه‌ای نیستند.

شکل ۴ تنها درخت مرتبه ۷ است که بازه‌ای نیست.

فقط شکل ۵ می‌تواند بازه‌ای باشد، بنابراین گزینه‌ی ۳ جواب درست است.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\sum \deg v_i = 7+7+6+x+y+3+3+3 = 2q = 2 \times 18 \Rightarrow x+y = 36-29 = 7$$

$$\Rightarrow \frac{3 \leq x, y \leq 6}{x+y=7} \Rightarrow \text{تنها حالت ممکن} \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

دنباله درجات نزولی است