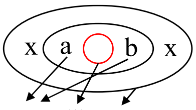
تاریخ : 	وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی : 	تعداد سوالات: ۲۰

موضوع 	دبیرستان علامه حلی تهران 	سریال ۱۴۸۴۶۸

۳۳. گزینه ۳

b,a به !۲ حالت جابجا می شوند، نفر وسط ۳ حالت دارد b,a و نفر وسط را یک حالت در نظر می گیریم با ۲ نفر باقی مانده گروهی ۳ نفره می شوند که !۳ حالت جابجا می شوند.



$۲! \times ۳ \times ۳! = ۳۶$

۳۴. گزینه ۴ کافی است رقم‌های ۳ را در کنار هم مانند یک رقم در نظر بگیریم با چهار رقم دیگر کلاً ۵ رقم داریم، مثلاً

۳۳۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷

پس به !۵ حالت جابه‌جا می‌شوند. چون خود ارقام ۳ در جابه‌جایی حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند، پس در کل همان !۵ حالت می‌باشد.

۳۵. گزینه ۳ ابتدا حروف غیر از A را کنار هم چیده و در فضای بین آنها و ابتدا و انتهای چیدمان حروف A را قرار می دهیم.

$\bigcirc B \bigcirc C \bigcirc D \bigcirc E \bigcirc F \bigcirc$

$$\text{جابجایی سایر حروف} \leftarrow ۵! \times \underbrace{\binom{۶}{۳}}_{\text{انتخاب سه مکان برای حروف } A} \times ۱ = ۱۲۰ \times ۲۰ = ۲۴۰۰$$

۳۶. گزینه ۲ باتوجه به این که تعداد ارقام ۲ و غیر ۲ با هم برابرند، بنابراین دو حالت می‌توانیم در نظر بگیریم:

حالت اول: رقم یکان ۲ باشد، در این صورت داریم:

$\square ۲ \square ۲ \square ۲ \Rightarrow ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۶$

حالت دوم: رقم یکان ۲ نباشد، در این صورت داریم:

$۲ \square ۲ \square ۲ \square \Rightarrow ۱ \times ۳ \times ۱ \times ۲ \times ۱ \times ۱ = ۶$

۳۷. گزینه ۲ ابتدا باید از میان ۵ زوج ۴ زوج را انتخاب کرد و سپس باید از هر زوج یک نفر را انتخاب کرد که مطمئن باشیم زن و شوهرها با هم انتخاب نمی‌شوند یعنی:

$$\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{انتخاب چهار زوج از پنج زوج}} \times \overbrace{\binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱} \times \binom{۲}{۱}}^{\text{از هر زوج یک نفر انتخاب میکنیم}} = ۵ \times ۲^{۴} = ۸۰$$

۳۸. گزینه ۲ نکته‌ی ۱ : تابع f از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B پوشا نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو B نظیر یک عضو A باشد.

نکته‌ی ۲ : تعداد توابع از مجموعه‌ی n عضوی A به مجموعه‌ی m عضوی B برابر است با: m^n

مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f: A \to B$ را با S نشان می‌دهیم در این‌صورت داریم: $|S| = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۴} = ۸۱$

حال فرض کنیم A_i مجموعه‌ی توابعی باشد که هیچ عضوی از A را به i نسبت نمی‌دهد. $(i = ۱, ۲, ۳)$

تعداد توابع پوشا، برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی $A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳$ است.

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = \text{تعداد توابع از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۲ عضوی} \xrightarrow{\text{نکته ۲}} ۲^{۴}$$

$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = \text{تعداد توابع از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۱ عضوی} \xrightarrow{\text{نکته ۲}} ۱^{۴}$$

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \text{تعداد توابع از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی صفر عضوی} = ۰^{۴}$$

بنابراین تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B عبارت است از:

$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| \;=\; |S| - \big(|A_۱|+|A_۲|+|A_۳|\big) + \big(|A_۱\cap A_۲|+|A_۱\cap A_۳|+|A_۲\cap A_۳|\big) - |A_۱\cap A_۲\cap A_۳|$$
$$= ۸۱ - (۳\times ۱۶) + (۳\times ۱) - ۰ = ۳۶$$

روش دوم:
$f\{(a,?)\ ,\ (b,?)\ ,\ (c,?)\ ,\ (d,?)\}$

به جای مؤلفه های دوم باید اعداد ۱ و ۲ و ۳ قرار بگیرد، واضح است که باید یکی از این اعداد دوبار تکرار شود.

$$\left.\begin{matrix} ۱\quad ۲\quad ۳\quad ۱ \;\rightarrow\; \text{تعداد} = \dfrac{۴!}{۲!} = ۱۲ \\ ۱\quad ۲\quad ۳\quad ۲ \;\rightarrow\; \text{تعداد} = \dfrac{۴!}{۲!} = ۱۲ \\ ۱\quad ۲\quad ۳\quad ۳ \;\rightarrow\; \text{تعداد} = \dfrac{۴!}{۲!} = ۱۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{تعداد توابع پوشا} = ۳\times ۱۲ = ۳۶$$

۳۹. گزینه ۴ چون اشیا یکسان و جعبه‌ها (نفرات) متمایزند، باید تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۹ \\ x_۱\geq ۲\,,\ x_۲\geq ۲\,,\ x_۳\geq ۲ \Rightarrow ۰\leq y_۱=x_۱-۲\ ,\ ۰\leq y_۲=x_۲-۲\ ,\ ۰\leq y_۳\ =x_۲-۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow (y_۱+۲)+(y_۲+۲)+(y_۳+۲)=۹ \Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳=۳$$
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$$

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

۴۰. گزینه ۳ در واقع منظور سؤال، حل معادله‌ی سیاله‌ی زیر با شرط گفته شده است:

تعداد خود کار های سعید : $x_۱$,   تعداد خود کار های مجید : $x_۲$,   تعداد خود کار های حمید : $x_۳$

$x_۱+x_۲+x_۳=۱۱ \qquad ۱\leq x_۱\leq ۴$

ابتدا جواب‌ها با شرط $x_۱\geq ۱$ را به‌دست می‌آوریم و سپس جواب‌های نامطلوب یعنی جواب‌ها با شرط $x_۱\geq ۵$ را از درون آن حذف می‌کنیم:

$$۱\leq x_۱ \Rightarrow ۰\leq x'_۱=x_۱-۱ \Rightarrow x_۱=x'_۱+۱$$
$$\xRightarrow{۰\leq x'_۱,x_۲,x_۳} x'_۱+۱+x_۲+x_۳=۱۱ \Rightarrow x'_۱+x_۲+x_۳=۱۰ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های حسابی} = \binom{۱۲}{۲} = ۶۶$$
$$۵\leq x_۱ \Rightarrow ۰\leq x'_۱=x_۱-۵ \Rightarrow x_۱=x'_۱+۵$$
$$\xRightarrow{۰\leq x'_۱,x_۲,x_۳} x'_۱+۵+x_۲+x_۳=۱۱ \Rightarrow x'_۱+x_۲+x_۳=۶ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های حسابی} = \binom{۸}{۲} = ۲۸$$
$$۱\leq x_۱\leq ۴ \ \text{تعداد جواب‌ها با شرط} = \binom{۱۲}{۲} - \binom{۸}{۲} = ۶۶-۲۸=۳۸$$

چون دو نفر دیگر می‌توانند خودکار دریافت نکنند، لذا جواب‌های حسابی را به‌دست آوردیم.

۴۱. گزینه ۲ نکته: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ برابر است با:

$$\binom{n+k+۱}{n} = \binom{n+k-۱}{k-۱}\ ,\ ۰\leq x_i$$

باتوجه به اینکه توپ ها یکسان هستند، کافی است تعداد جواب های صحیح معادله زیر را بیابیم:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۱۰ \\ ۱\leq x_i\leq ۵ \end{cases} \xrightarrow{y_i=x_i-۱} \begin{cases} y_۱+y_۲+y_۳=۷ \\ ۰\leq y_i\leq ۴ \end{cases}$$

اگر مجموعه کل جواب ها با شرط $y_i\geq ۰$ را با S نمایش دهیم، آن گاه داریم: $|S| = \binom{۷+۲}{۲}$

اگر A_i مجموعه جواب هایی باشد که $y_i\geq ۵$ است، آن گاه تعداد جواب ها با شرط $۰\leq y_i\leq ۴$ برابر است با:

$$\left|A'_۱\cap A'_۲\cap A'_۳\right| = \left|(A_۱\cup A_۲\cup A_۳)'\right|$$
$$= |S| - \big(|A_۱|+|A_۲|+|A_۳|\big) + \big(|A_۱\cap A_۲|+|A_۱\cap A_۳|+|A_۲\cap A_۳|\big) - |A_۱\cap A_۲\cap A_۳| \qquad (*)$$

حال هر یک از مقادیر فوق را محاسبه می کنیم:

$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ($تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۷$ با شرط $y_۱ \geq ۵)$
$= ($تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y'_۱ + y_۲ + y_۳ = ۲$ با شرط $y'_۱ \geq ۰) = \binom{۲+۲}{۲}$

$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ($تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۷$ با شرط $y_۱, y_۲ \geq ۵) = ۰$

$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ($تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۷$ با شرط $y_۱, y_۲, y_۳ \geq ۵) = ۰$

با جایگذاری این مقادیر در (*) داریم:

$$|A'_۱ \cap A'_۲ \cap A'_۳| = \binom{۹}{۲} - ۳\binom{۴}{۲} + ۳(۰) - ۰ = ۳۶ - ۱۸ = ۱۸$$

۴۲. گزینه ۳ روش اول:

نکته: تعداد کل توابع از یک مجموعه m عضوی به یک مجموعه n عضوی برابر است با: n^m

طبق فرض $f(۱) = x$، پس باید تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{۲,۳,۴\}$ به مجموعه $B = \{x, y, z\}$ را به دست آوریم.
مجموعه کل توابع از A به B را با S، مجموعه توابعی که هیچ عضوی از A را به y نظیر نمی‌کنند، با $A_۱$ مجموعه توابعی که هیچ عضوی از A را به z نظیر نمی‌کنند، با $A_۲$ نمایش می‌دهیم. بنابراین باید تعداد اعضای $A'_۱ \cap A'_۲$ را به دست آوریم.

$$|S| = ۳^۳ \quad , \quad |A_۱| = |A_۲| = ۲^۳ \quad , \quad |A_۱ \cap A_۲| = ۱^۳$$

روش دوم:

$$|A'_۱ \cap A'_۲| = |(A_۱ \cup A_۲)'| = S - |A_۱ \cup A_۲| = S - (|A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲|) = ۲۷ - (۸ + ۸ - ۱) = ۱۲$$

$$f = \{(۱, \ x \ ), (۲, \ ? \ ), (۳, \ ? \ ), (۴, \ ?)\}$$

$$\begin{array}{ccccl} x & y & z & x & \to ۳! \\ x & y & z & y & \to \dfrac{۳!}{۲!} \overset{+}{\longrightarrow} ۱۲ \\ x & y & z & z & \to \dfrac{۳!}{۲!} \end{array}$$

۴۳. گزینه ۴ نکته: جملات بسط $(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k)^n$ به صورت $x_۱^{\alpha_۱} x_۲^{\alpha_۲} \cdots x_k^{\alpha_k}$ است که در آن $\alpha_۱ + \alpha_۳ + \cdots + \alpha_k = n$ $(\alpha_i \geq ۰)$ است.

باتوجه به نکته‌ی بالا برای محاسبه‌ی تعداد جملات به صورت $x_۱^{\alpha_۱} \cdots x_۵^{\alpha_۵} x_۶^۹ x_۷^{\alpha_۷} \cdots x_{۱۰}^{\alpha_{۱۰}}$ کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $\alpha_۱ + \cdots + \alpha_۵ + ۹ + \alpha_۷ + \cdots + \alpha_{۱۰} = ۲۷$ را به دست آوریم:

$$\alpha_۱ + \cdots + \alpha_۵ + \alpha_۷ + \cdots + \alpha_{۱۰} = ۲۷ - ۹ = ۱۸$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی بالا برابر است با:

$$\binom{۱۸+۸}{۸} = \binom{۲۶}{۸}$$

۴۴. گزینه ۱ هر جمله این بسط به فرم $a^{x_۱} b^{x_۲} c^{x_۳} d^{x_۴} e^{x_۵}$ می‌باشد که در آن $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + = ۱۰$ می‌باشد.
تعداد جملات بسط $(a+b+c+d+e)^{۱۰}$ که فاقد e باشند، برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰$ با این‌شرط که $x_۵ = ۰$:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۰ \Rightarrow \binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۳}{۳} = \frac{۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱}{۶} = ۲۸۶$$

۴۵. گزینه ۳ جایگشت ۵ حرفی به ۵ احتیاج دارد، پس به جز lim باید دو حرف دیگر از بین a و s و e انتخاب کنیم که $\binom{۳}{۲} = ۳$ حالت دارد، حالا داریم :

$$\mathrm{lim} \ \underbrace{\bigcirc\bigcirc}_{\text{۲حرف دیگر}} \Rightarrow \text{۳ شی داریم} \Rightarrow \text{جایگشت: } ۳! = ۶$$

پس در کل $۳ \times ۶ = ۱۸$ حالت وجود دارد.

۴۶. گزینه ۳

$$x+y+z<۶ \Rightarrow x+y+z\leq ۵ \Rightarrow x+y+z+t=۵$$
$$\Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

۴۷. گزینه ۴ می توان این مسأله را با اصل شمول و عدم شمول به دست آورد ولی با توجه به محدود بودن x ترجیح می دهیم با حالت بندی x به جواب برسیم:

$$\left.\begin{array}{l} x=۲\Rightarrow y+z\leq ۵\Rightarrow (y,z):(۵,۰),(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲),\cdots,(۰,۵)\Rightarrow \text{۶ جواب} \\ x=۳\Rightarrow y+z\leq ۴\Rightarrow (y,z):(۴,۰),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲),\cdots,(۰,۴)\Rightarrow \text{۵ جواب} \\ x=۴\Rightarrow y+z\leq ۳\Rightarrow (y,z):(۳,۰),(۱,۲),(۲,۱),\cdots,(۰,۳)\Rightarrow \text{۴ جواب} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c}\text{جواب}\\ ۶+۵+۴=۱۵\end{array}$$

۴۸. گزینه ۲ ابتدا یکی از گروهها را دور میزگرد می نشانیم که این کار به !۴ طریق صورت می گیرد؛ سپس گروه دیگر را لابه لای آنها قرار می دهیم که به !۵ طریق صورت می گیرد !۵ × !۴

۴۹. گزینه ۲ روش اول: همه دو به دو تناظر یک به یک دارند پس تعداد حالات آنها برابر و برابر $\frac{۱}{۶}$ کل حالات است.

$$\text{جواب}=\frac{۷!}{۶}=۸۴۰$$

روش دوم: ابتدا از ۷ موقعیت ممکن برای ورود این سه نفر به $\binom{۷}{۳}=۳۵$ طریق ۳ جا را انتخاب می کنیم (بدون جایگشت) حال ۴ نفر باقی مانده $۴!=۲۴$ حالت در ۴ جای خالی با هم جایگشت می دهند پس:

$$\text{جواب}=\binom{۷}{۳}\times ۴!=۳۵\times ۲۴=۸۴۰$$

۵۰. گزینه ۲

ابتدا کل حالاتی را که می توان ۴ نقطه از بین نقاط فوق انتخاب کرد را محاسبه می کنیم:

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲\times۱}=۱۲۶$$

از بین این ها، حالاتی که چهار نقطه بر یک استقامت یا سه نقطه بر یک استقامت و یک نقطه جای دیگر باشد، قابل قبول نیست.

$$\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۳}\times\binom{۶}{۱}=۱+۴\times۵+۱\times۶=۲۷$$

بنابراین تعداد حالات قابل قبول برابر $۱۲۶-۲۷=۹۹$ خواهد بود.

۵۱. گزینه ۲ برای هر دو عددی سه حالت ممکن است. یا برابرند یا یکی بزرگ تر از دیگری است. در این مسأله که شرایط یکسانی بر x,y حکم فرماست، تعداد جواب های $y>x$ برابر با تعداد جواب های $x>y$ است. پس کافی است کل جواب ها را بیابیم و از جواب های برابر کم کرده و تقسیم بر ۲ کنیم.

$$(۱)\ \text{کل جواب ها}=\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$
$$(۲)\ x=y\Rightarrow ۲x+z=۸\Rightarrow \text{جواب ها}\ (x,y):(۰,۸)\ ,\ (۱,۶)\ ,\ (۲,۴)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۴,۰)\Rightarrow \text{۵ جواب}$$
$$\Rightarrow x<y\ \text{جواب های با شرط}=\frac{۴۵-۵}{۲}=۲۰\ \text{جواب}$$

۵۲. گزینه ۱

کافی است از کل توابع از A به B توابعی که $f(۱)=۳$ یا $f(۲)=۲$ باشد را کم کنیم.

جواب طبق اصل شمول و عدم شمول:

$$\text{جواب}=(\text{کل توابع})-(f(۲)=۲)-(f(۱)=۳)-((f(۱)=۳),(f(۲)=۲))$$
$$=(۳\times۳\times۳\times۳)-(۳\times۱\times۳\times۳)-(۱\times۳\times۳\times۳)+(۱\times۱\times۳\times۳)=۳۶$$