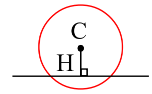
۲۱. گزینه ۴ باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده کوچکتر از شعاع دایره باشد.



$$\left.\begin{array}{l} f'_x = ۰ \to ۲x - ۲ = ۰ \to x = ۱ \\ f'_y = ۰ \to ۲y + ۴ = ۰ \to y = -۲ \end{array}\right. \Rightarrow C \left| \begin{array}{l} ۱ \\ -۲ \end{array}\right.$$

$$R^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۴ + ۱۶ + ۴۴}{۴} = ۱۶ \Rightarrow R = ۴$$

$$CH = \frac{|۳ - ۸ - m|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|-۵ - m|}{۵}$$

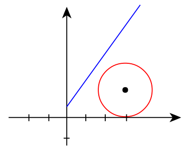
$$CH < R \Rightarrow \frac{|-۵ - m|}{۵} < ۴ \Rightarrow |-۵ - m| < ۲۰$$

$$\Rightarrow -۲۰ < -۵ - m < ۲۰ \Rightarrow -۱۵ < -m < ۲۵ \Rightarrow -۲۵ < m < ۱۵$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array}\right.$ از خط به معادله $ax + by + c = ۰$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$ بدست می‌آید.

۲۲. گزینه ۴ مکان نقطه‌ی داده شده یک نیم خط است، زیرا: $\begin{cases} x = |t| \\ y = |t| + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y = x + ۱ \\ x, y \geq ۰ \end{array}$

با توجه به شکل این نیم خط و دایره نقطه مشترکی ندارند.



فاصله مرکز دایره تا نیم خط $= \frac{|۱ - ۳ - x|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} > R = ۱ \Rightarrow$ **پس نیم‌خط و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند.**

۲۳. گزینه ۴ مکان هندسی نقاطی که بتوان از آن‌ها دایره داده شده را با زاویه قائمه دید دایره‌ای است به همان مرکز و شعاع $R' = R\sqrt{۲}$.

دایره جدید را با خط داده شده قطع می‌دهیم تا ببینیم چند نقطه با شرایط خواسته شده روی خط قرار دارد.

دایره داده شده، دایره‌ای به مرکز $(۲, -۳)$ و شعاع $\sqrt{۲}$ می‌باشد، پس دایره مطلوب دایره‌ای به مرکز $(۲, -۳)$ و شعاع $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲$ می باشد.

$$\left.\begin{array}{l} (x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۴ \\ y = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow (x - ۲)^۲ + ۱۶ = ۴ \Rightarrow (x - ۲)^۲ = -۱۲ \Rightarrow$$ هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

۲۴. گزینه ۴

$$x^{۲}+y^{۲}+۴x+۲y-۴=۰\begin{cases} f'_x=۰\to ۲x+۴=۰\to x=-۲\\ f'_y=۰\to ۲y+۲=۰\to y=-۱\end{cases}\Rightarrow C\left|\begin{matrix}-۲\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$R^{۲}=\alpha^{۲}+\beta^{۲}-c\to R^{۲}=۴+۱+۴=۹\to R=۳$$

شرط مماس خارج $: CC'=R+R'\to\sqrt{(-۲-۱)^{۲}+(-۱-۳)^{۲}}=۳+R'$

$$\to\sqrt{۹+۱۶}=۳+R'\to ۵=۳+R'\to R'=۲$$

حال با داشتن مرکز و شعاع دایره، معادله دایره را می‌نویسیم.

$$C'\left|\begin{matrix}۱\\۳\end{matrix}\right.\quad,\quad R'=۲\Rightarrow (x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

$$\Rightarrow (x-۱)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۴\Rightarrow x^{۲}-۲x+۱+y^{۲}-۶y+۹=۴\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲x-۶y+۶=۰$$

۲۵. گزینه ۳ طول مماس مشترک خارجی از رابطه $\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}$ بدست می آید که چون دو دایره مماس خارج اند طول OO' برابر جمع شعاع های دو دایره می باشد

$$\text{قطر}=۱۶\Rightarrow \text{شعاع}=۸\Rightarrow OO'=۸+۲=۱۰$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی}=\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=\sqrt{۶۴}=۸$$

۲۶. گزینه ۳

شرط این که دو دایره مماس داخل باشند این است که $OO'=|R-R'|$

$$\left.\begin{matrix}(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۳۶\Rightarrow\begin{cases}O:(-۱,۲)\\R=۶\end{cases}\\ O'=(۳,-۱)\Rightarrow OO'=\sqrt{(-۱-۳)^{۲}+(-۲-۱)^{۲}}=\sqrt{۱۶+۹}=۵\end{matrix}\right\}\Rightarrow ۵=|۶-R'|\Rightarrow\begin{cases}۵=۶-R'\Rightarrow R'=۱\\ ۵=R'-۶\Rightarrow R'=۱۱\end{cases}$$

$$R'=۱\quad,\quad O':(۳,۱)\Rightarrow (x-۳)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$$

۲۷. گزینه ۱ مرکز دایره ها به ترتیب $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ می باشند یعنی مرکزها هم عرض اند پس در صورتی مماس مشترک خارجی موازی محور yها (یعنی عمود بر خط المرکزین) است که دو دایره مماس داخل باشند.

$$d=|R-R'|$$

$$\begin{cases}d=OO'=۱\\ R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴}=۱\end{cases}\Rightarrow ۱=|R-۱|$$

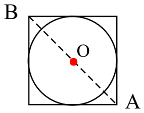
$$۱=R-۱\Rightarrow R=۲\quad \text{ق ق}$$

$$۱=۱-R\Rightarrow R=۰\quad \text{شعاع نمی تواند صفر باشد}$$

$$R=۲\Rightarrow R^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}-۴c}{۴}\Rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴c}\Rightarrow ۴=\sqrt{۴c}\Rightarrow ۱b=۴c\Rightarrow c=۴$$

۲۸. گزینه ۴

در این‌صورت وسط قطر مربع، مرکز دایره و طول ضلع مربع برابر قطر دایره خواهد شد و داریم:



$$O\left(\frac{۱+۳}{۲},\frac{۳+۱}{۲}\right)\Rightarrow O(۲,۲)$$

می‌دانیم طول قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{۲}$، حال:

$$\Rightarrow a=۲\xrightarrow{۲R=a}۲R=۲\Rightarrow R=۱$$

معادله‌ی دایره:

$(x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۱$

۲۹. گزینه ۲ نکته: نقطه $M(x_\circ , y_\circ)$ و دایره $F(x,y):(x-a)^۲+(y-\beta)^۲-R^۲$ مفروض است. اگر:

۱) $F(x_\circ , y_\circ)>\circ$ باشد، M خارج دایره است.

۲) $F(x_\circ , y_\circ)=\circ$ باشد، M روی دایره است.

۳) $F(x_\circ , y_\circ)<\circ$ باشد. M داخل دایره است.

مطابق نکته: باید مبدأ مختصات را در معادله دایره ها قرار دهیم:

$$\begin{cases} F_۱(x,y):x^۲+y^۲-۱۲x-۱ \Rightarrow F_۱(\circ,\circ)=-۱<\circ \Rightarrow \text{مبدأ داخل } C_۱ \text{ است.} \\ F_۲(x,y):x^۲+y^۲+۱۶y-۳۶ \Rightarrow F_۲(\circ,\circ)=-۳۶<\circ \Rightarrow \text{مبدأ داخل } C_۲ \text{ است.} \end{cases}$$

بنابراین مبدأ مختصات داخل هر دو دایره است. (ناحیه‌ی ۲)

۳۰. گزینه ۱ مطابق شکل باید اندازه‌ی پاره‌خط واصل بین نقاط $(۳,\circ)$, $(\circ,۳)$ را بیابیم:

$$\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲}$$