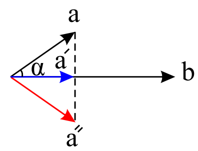
۲۱. گزینه ۲ تذکر: حجم هر مثلث القاعده (چهاروجهی) ساخته شده روی بردارهای $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ از دستور $\frac{۱}{۶}|\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})|$ بدست می‌آید.

ابتدا بردارهای $b+j$ ،$b-j$ سازیم.

$$\left.\begin{array}{l} b+j=(i+k)+j=(۱,۱,۱) \\ b-j=(i+k)-j=(۱,-۱,۱)\end{array}\right\} \Rightarrow (b+j)\times(b-j)=(۲,۰,-۲)$$

$$v=\frac{۱}{۶}|a\cdot((b+j)\times(b-j))|=\frac{۱}{۶}|(۱,۲,-۱)\circ(۲,۰,-۲)|=\frac{۱}{۶}|۲+۰+۲|=\frac{۲}{۳}$$

۲۲. گزینه ۳ نکته : اگر a' و a'' بترتیب تصویر و قرینه a نسبت به b باشند آنگاه $\vec{a}=\overrightarrow{a''}=۲\vec{a}$

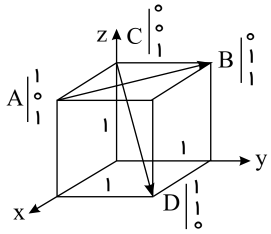


طبق فرض : $a+a''=\overrightarrow{۵b}\Rightarrow\overrightarrow{۲a'}=\overrightarrow{۵b}\Rightarrow\left|\overrightarrow{۲a'}\right|=\left|\overrightarrow{۵b}\right|$

$$\Rightarrow|a'|=\frac{۵}{۲}|b|=\frac{۵}{۲}\times۵\Rightarrow\frac{|a\cdot b|}{|b|}=۵\Rightarrow|a\cdot b|=۲\times۵=۱۰$$

۲۳. گزینه ۴

یک گوشه این مکعب را منطبق بر مبدأ مختصات کرده و به سایر رئوس آن مختصات می‌دهیم:



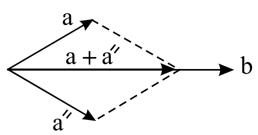
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{CD}=D-C=(۱,۱,-۱) \\ \overrightarrow{AB}=B-A=(-۱,۱,۰)\end{array}\right.\Rightarrow\ AB\cdot CD=-۱+۱+۰=۰$$

۲۴. گزینه ۳ تذکر: براساس نامساوی کوشی شوارتز اگر $\vec{a}$و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند آنگاه $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$

$$x^۲+۹y^۲+z^۲=۲۵\Rightarrow\vec{a}\xlongequal{\text{جذر جملات}}(x,۳y,z)\quad و\quad b=(۴,۲,۴)$$

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le|a||b|\Rightarrow|۴x+۶y+۴z|\le\sqrt{\underbrace{x^۲+۹y^۲+z^۲}_{۲۵}}\times\sqrt{۱۶+۴+۱۶}\Rightarrow|۴x+۶y+۴z|\le۳۰$$

۲۵. گزینه ۴



بردارهای $a+a''$ و b بر هم منطبق هستند پس بردار $\vec{b}$ مضربی از $a+a''$ است یعنی $b=k(a+a'')$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(۰,۱,۳) \\ a''=(-۳,-۱,۰)\end{array}\right.\Rightarrow\ a+a''=(-۳,۰,۳)$$

$$\Rightarrow b=k(-۳,۰,۳)\xrightarrow{\text{به ازای } k=\frac{۱}{۳}}\vec{b}=(-۱,۰,۱)=-\vec{i}+\vec{k}$$

۲۶. گزینه ۲ فرض می‌کنیم $M=(x,y,z)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد.

$$\overrightarrow{AM}=\frac{۲}{۳}\overrightarrow{MB}\xrightarrow{\times ۳}۳\overrightarrow{AM}=۲\overrightarrow{MB}\Rightarrow ۳(M-A)=۲(B-M)$$

$$\Rightarrow ۵M=۲B+۳A\Rightarrow M=\frac{۱}{۵}(۲B+۳A)=\frac{۱}{۵}((۰,۴,-۴)+(۳,-۳,۳))$$

$$\Rightarrow M=\frac{۱}{۵}(۳,۱,-۱)=\left(\frac{۳}{۵},\frac{۱}{۵},-\frac{۱}{۵}\right)$$

$$M \text{ مجموع مختصات نقطه‌ی } =\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$$

۲۷. گزینه ۱ نکته: اگر صفحه‌ای با دو خط غیر موازی، موازی باشد بردار نرمال آن از ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط بدست می‌آید.

دو خط $d_۱:\frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z+۳}{-۱}$, $d_۲:\begin{cases}x=۱+t\\ y=-۱-۲t\\ z=۲+t\end{cases}$ موازی نیستند

راستای عمود بر این دو خط را به دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{u_{d_۱}}\times\overrightarrow{u_{d_۲}}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۲ & ۱\end{vmatrix}=(-۱,-۳,-۵)$$

صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(۰,۱,۲)$ و عمود بر این راستا با خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ موازی است پس n بردار نرمال صفحه است و معادله‌ی صفحه به شرح زیر به دست می‌آید:

$$p:-(x-۰)-۳(y-۱)-۵(z-۲)=۰\Rightarrow p:x+۳y+۵z-۱۳=۰$$

با قرار دادن $x=y=۰$ نقطه‌ی تلاقی با محور zها به دست می‌آید:

$$z=\frac{۱۳}{۵}=۲/۶$$

۲۸. گزینه ۴ نکته: هر زمان یک نقطه با ویژگی خاص از یک خط را بخواهیم ابتدا معادله‌ی خط را پارامتری کرده و آن نقطه را برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه‌ی $p:ax+by+cz=d$ از دستور $h=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ حاصل می‌شود.

فرض کنید A نقطه‌ای پارامتری روی d باشد، داریم:

$$d=\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=z+۲=t$$

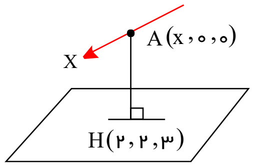
$$A=(۲t-۱,۳t-۳,t-۲)$$

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P، برابر h باشد، آن‌گاه:

$$h=\frac{|۴t-۲+۳t-۳-۲t+۴+۲|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=۲\Rightarrow ۵t+۱=\pm ۶\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-\frac{۷}{۵}$$

$$t=۱\Rightarrow A=(۱,۰,-۱)$$

۲۹. گزینه ۱ معادله‌ی خط AH را با استفاده از نقطه‌ی $A=(x_0,0,0)$ و $\overrightarrow{AH}=n=(1,2,3)$ می‌نویسیم (n بردار نرمال صفحه‌ی P است.)



$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=t+x_0\\ y=2t\\ z=3t\end{cases}$$

چون نقطه‌ی $H=(2,2,3)$ روی این خط قرار دارد، داریم:

$$y=2t=2\Rightarrow t=1$$
$$x=t+x_0\Rightarrow 1+x_0\Rightarrow x_0=1$$

۳۰. گزینه ۲ تذکر: معادله صفحه‌ی موازی محور xها از دستور $p:y=kz=d$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}A=(2,3,-1)\in p\xrightarrow{\text{صدق دهید}}3-k=d\\ B=(0,1,1)\in p\xrightarrow{\text{صدق دهید}}1+k=d\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}d=2\\ k=1\end{cases}\Rightarrow p:y+z=2$$

برای تعیین محل برخورد این صفحه با محور oy مؤلفه‌های x و z را در معادله‌ی صفحه‌ی مساوی صفر می‌گذاریم.

$$z=0\Rightarrow y=2\Rightarrow M=(0,2,0)$$

۳۱. گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی گذر از سه نقطه‌ی C,B,A را می‌یابیم. می‌دانیم: $NP=AB\times AC$

$$\left.\begin{array}{l}A(1,2,-1)\\ B(2,3,0)\\ C(-1,0,5)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-2,6)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(8,-8,0)\xrightarrow{\times\frac{1}{8}}(1,-1,0)$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر $x-y=-1$ است و فاصله‌ی مبدأ مختصات از این صفحه برابر است با:

$$D=\frac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تذکر: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ از صفحه‌ی $P:ax+by+cz=d$ از دستور $L=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ به دست می‌آید.

۳۲. گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $B(1,0,0)$ را روی خط در نظر می‌گیریم. اگر u بردار هادی خط D باشد و n بردار نرمال صفحه باشد، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}u=(1,1,2)\\ \overrightarrow{AB}=(0,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow N_p=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=(-4,2,1)$$

معادله‌ی صفحه‌ی P عبارت است از:

$$P:-4(x-1)+2(y+1)+1(z-2)=0\Rightarrow 4x-2y-z-4=0$$