تاریخ :	وقت : دقیقه	سریال ۱۴۷۸۸۲
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۱۲	
موضوع		دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۳ نکته: اگر بردار $a+b$ نیمساز دو بردار b, a باشد، آنگاه:

$(a+b)$ بردار نیمساز $\Leftrightarrow |a|=|b|$

$$|a|=|b| \Rightarrow \sqrt{۱۶+۹+m^۲}=\sqrt{۴+۱۶+(m+۱)^۲} \Rightarrow ۲۵+m^۲=۲۰+(m^۲+۲m+۱) \Rightarrow m=۲$$

۲۲. گزینه ۲

می‌دانیم $j\times i=-k$ پس خواهیم داشت:

$$a\cdot(j\times i)=a\cdot(-k)=-a\cdot k=۴ \Rightarrow -(۲m-n,-۳,۱+m)\cdot(۰,۰,۱)=۴$$
$$\Rightarrow -(۱+m)=۴ \Rightarrow ۱+m=-۴ \Rightarrow m=-۵$$

پس $a=(-۱۰-n,-۳,-۴)$ ، از آنجا که $|a|=۵$ ، پس:

$$|a|=\sqrt{(-۱۰-n)^۲+(-۳)^۲+(-۴)^۲}=\sqrt{(-۱۰-n)^۲+۲۵} \xrightarrow{|a|=۵} -۱۰-n=۰ \Rightarrow n=-۱۰$$
$$\Rightarrow m+n=-۵-۱۰=-۱۵$$

۲۳. گزینه ۱ می‌دانیم $|a\times b|^۲=|a|^۲|b|^۲-(a\cdot b)^۲$، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$(a\cdot b)^۲=|a|^۲|b|^۲-|a\times b|^۲ \Rightarrow (a\cdot b)^۲$$
$$=۴^۲\times ۷^۲-۱۶^۲=(۴\times ۷)^۲-۱۶^۲=۲۸^۲-۱۶^۲=(۲۸-۱۶)(۲۸+۱۶)=۵۲۸$$
$$\Rightarrow |a\cdot b|=\sqrt{۵۲۸}=\sqrt{۱۶\times ۳۳}=۴\sqrt{۳۳}$$

۲۴. گزینه ۲ تذکر: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند آنگاه $a'=\frac{a\cdot b}{|b|^۲}b$ تصویر a روی b و از آنجا قرینه‌ی a نسبت به b از دستور $\vec{a}''=۲\vec{a}'-\vec{a}$ محاسبه می‌شود.

$$a'=\frac{a\cdot b}{|b|^۲}b=\frac{۳-۱+۴}{(\sqrt{۳})^۲}(b)=۲b$$

$$a''=۲a'-a=۴b-a=(۴,-۴,۴)-(۳,۱,-۴)=(۱,-۵,۰)=i-۵j$$

۲۵. گزینه ۱ نکته: اگر a و b دو بردار دلخواه در فضا باشند نامساوی زیر مشهور به نامساوی کوشی شوارتز برقرار است.

$$|a\cdot b|\le |a|\ |b|$$

در عبارت $۲x+y+۲z$ ضریب z, y, x را بردار $\vec{a}$ در نظر می گیریم یعنی $a(۲,۱,۲)$ و بردار b نیز به صورت $b(x,y,z)$ تعریف می‌شوند.

$$|a\cdot b|\le |a|\ |b|$$
$$\Rightarrow |۲x+y+۲z|\le \sqrt{۴+۱+۴}\cdot\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$
$$\Rightarrow ۹\le ۳\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\ge ۳$$
$$\Rightarrow \min(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲})=۳$$

۲۶. گزینه ۳ سه یال $v_۱=(a,-۱,۲)$، $v_۲=(۱,۲,b)$ و $v_۳=(-۱,c,۳)$ باید دو به دو بر هم عمود باشند، پس خواهیم داشت:

$$\begin{matrix} v_۱\cdot v_۲=۰ \\ v_۱\cdot v_۳=۰ \\ v_۲\cdot v_۳=۰ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a-۲+۲b=۰ \\ -a-c+۶=۰ \\ -۱+۲c+۳b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} a+۲b=۲ \\ a+c=۶ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{معادله دوم را از اولی کم می کنیم}} ۲b-c=-۴\ (I) \\ ۳b+۲c=۱ (II) \end{cases}$$

حال به کمک دو معادله (I) و (II) و حل دستگاه نظیرشان به دست خواهیم آورد که:

$$\begin{cases} ۲b-c=-۴ \\ ۳b+۲c=۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{دستگاه}]{\text{حل}} b=-۱\ ,c=۲ \Rightarrow a=۴$$

پس $a+b+c=۴+۲-۱=۵$.

۲۷. گزینه ۲

$$x+۱=y=z+۲=t \Rightarrow \begin{cases} x=t-۱ \\ y=t \\ z=t-۲ \end{cases}$$

اکنون این روابط را در معادله‌ی دوم جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{t-۱-m}{۳}=t-۳=\frac{t-۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} t-۱-m=۳t-۹ \Rightarrow ۲t=۸-m \\ ۲t-۶=t-۳ \Rightarrow t=۳ \quad (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(۳)=۸-m \Rightarrow m=۲$$

۲۸. گزینه ۲ طول ضلع مربع فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۰,۱,۱)$ از خط D است.

$u=(۲,۱,۱)$ بردار هادی خط D و $B(۱,۳,-۱)$ نقطه‌ای روی خط D

$h=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}$ فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط D

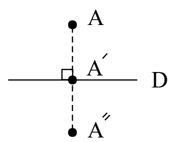
$$\overrightarrow{AB}=(xB-xA,yB-yA,\ zB-zA)=(۱,۲,-۲)$$

$$\overrightarrow{AB}\times u=(۱,۲,-۲)\times(۲,۱,۱)=(۴,-۵,-۳)$$

$$|\overrightarrow{AB}\times u|=\sqrt{۵۰} \quad , \quad |u|=\sqrt{۶}$$

طول ضلع مربع $h=\dfrac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۶}} \Rightarrow$ مساحت مربع $S=\dfrac{۲۵}{۳}$

۲۹. گزینه ۲ ابتدا خط D را پارامتری و نقطه‌ی A' (A' تصویر A روی خط D می‌باشد) را برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.



$$D:\begin{cases} x=۳t-۱ \\ y=t-۲ \\ z=۱ \end{cases} \Rightarrow A'=(۳t-۱,t-۲,۱)\in D$$

حال بردار $\overrightarrow{AA'}$ را برحسب t می‌سازیم:

$$\overrightarrow{AA'}=A'-A=(۳t-۲,t-۴,۰)\cdot(۳,۱,۰)=۰ \Rightarrow ۹t-۶+t-۴=۰ \Rightarrow t=۱$$

$\Rightarrow A'=(۲,-۱,۱) \leftarrow$ مختصات تصویر A روی خط D

از آنجا که A' وسط A و A'' است. پس:

$$A''=۲A'-A=۲(۲,-۱,۱)-(۱,۲,۱)=(۳,-۴,۱)$$

۳۰. گزینه ۴ ابتدا شرط عمود بودن دو خط را در نظر می‌گیریم:

$$d\perp d' \Rightarrow ud\perp u_{d'} \Rightarrow ud\cdot u_{d'}=0$$
$$\Rightarrow (a,-2,-1)\cdot(a-2,-3,5)=0 \Rightarrow a^2-2a+6-5=0$$
$$\Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1$$

با فرض $ud=(-1,-3,5)$ و $u_{d'}=(1,-2,-1)$، بردار نرمال صفحه عبارت است از:

$$n=ud\times u_{d'}=(13,4,5)$$

از طرفی نقطه‌ی $A=(0,1,0)$ (نقطه‌ی A متعلق به خط d' است که در صفحه نیز صدق می‌کند.) در این صفحه است، پس داریم:

$$P:13(x-0)+4(y-1)+5(z-0)=0 \Rightarrow 13x+4y+5z-4=0$$

برای تعیین محل برخورد صفحه P با محور oz مؤلفه y, x را در معادله صفحه مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x=y=0} z=\frac{4}{5}$$

۳۱. گزینه ۳ تذکر: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_1,y_1,z_1)$ از صفحه $p:ax+by+cz=d$ از دستور $L=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ حاصل می‌شود.

$$L=\frac{|2(0)+1(0)-2(2)-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{3}=3$$

۳۲. گزینه ۱ بردار عمود بر صفحه (بردار نرمال صفحه) موازی با $\vec{AB}\times\vec{AC}$ باید باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\vec{AB}=(1-0,1-2,0-(-1))=(1,-1,1)\\ \vec{AC}=(1-0,0-2,-1-(-1))=(1,-2,0)\end{cases}$$
$$\Rightarrow nP=\vec{AB}\times\vec{AC}=(1,-1,1)\times(1,-2,0)=(2,1,-1)$$

اگر n بردار نرمال باشد، معادله صفحه گذرا از مثلاً B و عمود بر $n=(2,1,-1)$ برابر می‌شود با:

$$B\in p \Rightarrow P:2(x-1)+1(y-1)-(z-0)=0 \Rightarrow P:2x+y-z-3=0$$

فاصله مبدأ از صفحه‌ای به معادله $ax+by+cz+d=0$ برابر $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ است. پس به کمک این فرمول در این جا داریم:

$$\text{فاصله مبدأ از } P=\frac{|-3|}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$