۲۱. گزینه ۴　بردارهای های دو خط: $u=(۱,۱,۱),\ u'=(۲,۳,۱)$

چون نسبت های هر دو مؤلفه متناظر دو بردار مساوی نیستند، دو خط موازی نمی باشند و چون حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر نیست، دو خط بر هم عمود نیستند. بنابراین، باید تعیین کنیم که دو خط متقاطع هستند یا متنافر. معادلات یکی از دو خط، مثلاً خط D، را پارامتری می کنیم.

$M=(x=\frac{۲t-۱}{۲}, y=t-۲, z=t)$ نقطه متغیر خط D

مختصات پارامتری این نقطه را در معادلات خط D' قرار می دهیم:

$$D'\Rightarrow \frac{t+۱}{۲}=\frac{t+۲}{۳}=t\Rightarrow \begin{cases}\frac{t+۱}{۲}=t\Rightarrow t=۱\\ \frac{t+۲}{۳}=t\Rightarrow t=۱\end{cases}$$

چون دو معادله جواب مشترک $t=۱$ دارند، دو خط متقاطع اند و نقطه تلاقی:

$$t=۱\Rightarrow M(\frac{۱}{۲},-۱,۱)$$

۲۲. گزینه ۲　ابتدا نقطه تلاقی دو خط را پیدا می کنیم. برای این منظور ابتدا خط d را پارامتری کرده نقطه‌ی A را روی آن برحسب t انتخاب سپس مختصات A را در d' صدق می‌دهیم:

$$d:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۲}=t\Rightarrow A(۲t-۱,-t+۲,۲t)\in d$$

مختصات A در d' صدق می دهیم:

$$d':\frac{x-۳}{۱}=\frac{y-۵}{۲}=-z\Rightarrow A\in d'\Rightarrow \frac{۲t-۴}{۱}=\frac{-t-۳}{۲}\Rightarrow ۴t-۸=-t-۳\Rightarrow ۵t=۵\Rightarrow t=۱$$

$t=۱\Rightarrow A=(۱,۱,۲)$ نقطه تلاقی دو خط

معادله صفحه شامل محور oy بفرم $P:x+kz=۰$ است چون $A\in P$ پس مختصات A را در P صدق می دهیم.

$$A\in P\Rightarrow ۱+۲k=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow P:x-\frac{۱}{۲}z=۰\overset{\times ۲}{\Rightarrow} P:۲x-z=۰$$

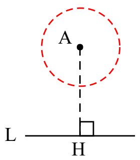
۲۳. گزینه ۴　وقتی خط بر صفحه منطبق باشد، آن‌گاه بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه برهم عمودند یعنی ضرب داخلی بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه، برابر صفر است. همچنین همه نقاط خط در صفحه واقع می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{uL}=(۲,۲b,۳)\\ \overrightarrow{nP}=(a,-۱,۲)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \overrightarrow{nP}\cdot\overrightarrow{uL}=۰\ \Rightarrow ۲a-۲b+۶=۰\Rightarrow a-b=-۳$$

$$A=(۲,۱,-۳)\in L\xrightarrow{\text{در } P \text{ صدق می کند } A}۲a-۱-۶=a+۱\Rightarrow a=۸$$

$$a-b=-۳\Rightarrow ۸-b=-۳\Rightarrow b=۱۱\Rightarrow a+b=۸+۱۱=۱۹$$

۲۴. گزینه ۱



مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ هستند یک کره به مرکز A و به شعاع ۳ است. محل تلاقی این کره و خط L خاصیت مسأله را داراست.

باید فاصله‌ی A را از خط مفروض بیابیم. نقطه‌ی $B=(۱,-۱,۰)$ روی خط L واقع و بردار $u=(۱,۲,۲)$ موازی با آن است.

$$\text{فاصله } A \text{ از خط } L: AH=\frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|}=\frac{|(۰,-۳,۳)\times(۱,۲,۲)|}{|(۱,۲,۲)|}=\frac{|(-۱۲,۳,۳)|}{۳}=۳\sqrt{۲}$$

چون فاصله‌ی A از خط L، بیش از ۳ واحد است. پس کره و خط همدیگر را قطع نمیکنند و در نتیجه نقطه‌ای با شرایط مذکور وجود ندارد.

۲۵. گزینه ۳

$$D:\begin{cases} x-z=1 \\ y+2z=2 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A_0(1,2,0)\in D$$ خط فصل مشترک

$$D:\begin{cases} z=x-1 \\ z=\dfrac{2-y}{2} \end{cases} \Rightarrow D:\ x-1=\frac{2-y}{2}=z \Rightarrow u_D(1,-2,1)$$

اگر $A_0(1,2,0)$ نقطه دلخواه از فصل مشترک (خط) و u بردار هادی فصل مشترک باشد، آنگاه فاصله نقطه A از فصل مشترک به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$L=\frac{\left|\overrightarrow{AA_0}\times u\right|}{|u|}\ ,\ u=(1,0,-1)\times(0,1,2)=(1,-2,1)$$

$$\overrightarrow{AA_0}\times u=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-3,-3,-3)$$

$$L=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

۲۶. گزینه ۱ بردار عمود بر صفحه (بردار نرمال صفحه) موازی با $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ باید باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1-0,1-2,0-(-1))=(1,-1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(1-0,0-2,-1-(-1))=(1,-2,0) \end{cases}$$
$$\Rightarrow n_P=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-1,1)\times(1,-2,0)=(2,1,-1)$$

اگر n بردار نرمال باشد، معادله صفحه گذرا از مثلاً B و عمود بر $n=(2,1,-1)$ برابر می‌شود با:

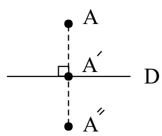
$$B\in p\Rightarrow P:2(x-1)+1(y-1)-(z-0)=0\Rightarrow P:2x+y-z-3=0$$

فاصله مبدأ از صفحه‌ای به معادله $ax+by+cz+d=0$ برابر $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ است. پس به کمک این فرمول در این جا داریم:

$$P \text{ فاصله مبدأ از } = \frac{|-3|}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

۲۷. گزینه ۲ ابتدا خط D را پارامتری و نقطه‌ی A' (A' تصویر A روی خط D می‌باشد) را برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.

$$D:\begin{cases} x=3t-1 \\ y=t-2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A'=(3t-1,t-2,1)\in D$$



حال بردار $\overrightarrow{AA'}$ را برحسب t می‌سازیم:

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (3t-2, t-4, 0)\cdot(3,1,0) = 0 \Rightarrow 9t-6+t-4=0 \Rightarrow t=1$$
$$\Rightarrow A' = (2,-1,1) \quad \leftarrow \quad \text{مختصات تصویر } A \text{ روی خط } D$$

از آنجا که A' وسط A و A'' است. پس:

$$A'' = 2A' - A = 2(2,-1,1) - (1,2,1) = (3,-4,1)$$

۲۸. گزینه ۳ به طور کلی، قرینه‌ی نقطه یا بردار (a_1, a_2, a_3) نسبت به محور zها، نقطه یا بردار $(-a_1, -a_2, a_3)$ است.

$$A = (-1,2,4) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}z\text{ها}} A'' = (1,-2,4)$$

تصویر هر نقطه یا بردار (b_1, b_2, b_3) روی صفحه‌ی xy، نقطه یا بردار $(b_1, b_2, 0)$ است.

$$A'' = (1,-2,4) \xrightarrow{\text{تصویر روی صفحه } xy} A' = (1,-2,0)$$
$$AA' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-2)^2 + (0-4)^2} = 6$$

۲۹. گزینه ۳ در متوازی الاضلاعی با قطرهای $a+b$ و $a-b$ داریم:

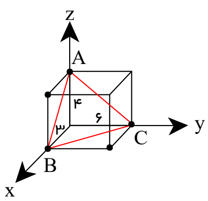
$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}(|a+b|^2 + |a-b|^2)$$

پس در اینجا خواهیم داشت:

$$|a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}((3^2 + (-2)^2 + 5^2) + (1^2 + 2^2 + (-3)^2) = \frac{1}{2}(38+14) = 26$$

۳۰. گزینه ۴

اگر دستگاه مختصات فضایی را بر یال‌های مکعب مستطیل منطبق کنیم، داریم:



$$A = (0,0,4),\ B = (3,0,0),\ C = (0,6,0)$$

پس $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ به صورت زیر هستند و با کمک آن‌ها می‌توان کسینوس زاویه‌ی B را محاسبه کرد.

$$\overrightarrow{BA} = (-3,0,4), \overrightarrow{BC} = (-3,6,0)$$
$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{9+0+0}{5\times 3\sqrt{5}} = \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{25}$$

۳۱. گزینه ۲

$$a\cdot c = 3 \Rightarrow |a||c|cos60^\circ = 3 \Rightarrow |a|\times 3\times\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow |a| = 2$$

$$a+2b+2c = 0 \xrightarrow{\text{طرفین در } \vec{a} \text{ ضرب داخلی}} a\cdot a + 2a\cdot b + 2a\cdot c = a\cdot o \Rightarrow |a|^2 + 2a\cdot b + 2a\cdot c = o$$
$$\Rightarrow 4 + 2a\cdot b + 6 = 0 \Rightarrow a\cdot b = -5$$

۳۲. گزینه ۳ اگر v'_1 و v'_2 به ترتیب تصویرهای قائم v_1 و v_2 روی امتداد بردار $a = (1,2,-1)$ باشند، آنگاه داریم:

$$v'_1 = \frac{v_1\cdot a}{|a|^2}a \ , \ v'_2 = \frac{v_2\cdot a}{|a|^2}a$$

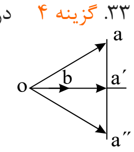
v'_1 و v'_2 قرینه اند، پس $v'_1 = -v'_2$، لذا داریم:

$$v'_1 + v'_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_1\cdot a}{|a|^2}a + \frac{v_2\cdot a}{|a|^2}a = \frac{(v_1+v_2)\cdot a}{|a|^2}a = 0$$

تساوی اخیر نشان می دهد که تصویر قائم بردار v_1+v_2 روی امتداد a، بردار صفر است، یعنی بردار v_1+v_2 یا صفر است و یا بر a عمود است.

در بین گزینه ها، تنها بردار $(-1,2,3)$ بر بردار $a = (1,2,-1)$ عمود است.

۳۳. گزینه ۴ در شکل زیر، a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b است.



اما دو بردار a' و b موازی هستند. بنابراین:

$$a''=۲a'-a\Rightarrow a'=\frac{۱}{۲}(a+a'')$$
$$a'=\frac{(-۱,۱,۶)+(۳,-۵,-۲)}{۲}=(۱,-۲,۲)$$
$$b=ka'\Rightarrow |b|=k|a'|\Rightarrow ۱=۳k\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}$$
$$b=\frac{۱}{۳}a'=\frac{۱}{۳}(۱,-۲,۲)\Rightarrow b=(\frac{۱}{۳},\frac{-۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$

۳۴. گزینه ۲

$$|OM|=\sqrt{۳}\Rightarrow\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۳$$

باتوجه به عبارت $۲x-۲y+z$ ، نامساوی کوشی- شوارتز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}a=(x,y,z)\\ b=(۲,-۲,۱)\end{array}\right\}\Rightarrow |a\cdot b|\leq |a||b|\Rightarrow |۲x-۲y+z|\leq\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\sqrt{۴+۴+۱}$$
$$\Rightarrow |۲x-۲y+z|\leq\sqrt{۳}\times ۳\Rightarrow |۲x-۲y+z|\leq ۳\sqrt{۳}$$

پس حداکثر مقدار $۲x-۲y+z$ برابر $۳\sqrt{۳}$ و حداکثر مقدار صحیح آن برابر ۵ می‌باشد زیرا $۳\sqrt{۳}$ تقریباً ۵٫۱ برابر می‌باشد.

۳۵. گزینه ۴ می‌دانیم که $i\times j=k$, $j\times k=i$ و $k\times i=j$ ، داریم:

$$(۳j+k)\times(k-i)=۳j\times k-۳j\times i+\underbrace{k\times k}_{۰}-k\times i=۳i-j+۳k\qquad(*)$$
$$\xrightarrow{(*)}(i-j+k)\cdot((۳j+k)\times(k-i))=(i-j+k)\cdot(۳i-j+۳k)=۳+۱+۳=۷$$

۳۶. گزینه ۲

$$\left.\begin{array}{l}|a+b|=۴\xrightarrow{\text{به توان ۲}}|a|^۲+|b|^۲+۲a\cdot b=۱۶\\ |a-b|=۲\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}|a|^۲+|b|^۲-۲a\cdot b=۱۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۴a\cdot b=۴\Rightarrow a\cdot b=۱$$

اگر دو عبارت فوق را از هم کم کنیم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|a\times b|\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱}{۲}|a\times b|\Rightarrow |a\times b|=\sqrt{۳}$$
$$\frac{|a\times b|}{a\cdot b}=\tan\alpha\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۱}=\tan\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۳}$$

۳۷. گزینه ۱ تذکر: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از دستور $\cos\alpha=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}$ حاصل می‌شود.

تذکر: بردار $\vec{e}a+\vec{e}b$ بردار نیمساز زاویه‌ی بین a و b می‌باشد.

$$\vec{a}(۲,\sqrt{۳},۳)\quad,\quad b=۴i=۴(۱,۰,۰)=(۴,۰,۰)$$

ابتدا زاویه ی بین a و b را می‌یابیم:

$$\cos\alpha=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}=\frac{۸+۰+۰}{(\sqrt{۴+۳+۹})\times ۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=۶۰$$

بنابراین زاویه‌ی بین بردارهای a و بردار $ea+eb$ ۳۰° می‌باشد.

۳۸. گزینه ۴ روش اول:

فرض کنیم $u=۳a$ و $v=۲b$ داریم:

$$|u|=۳,|v|=۴,\ |u+v|=۵$$
از طرفی می‌دانیم: $|u+v|^۲+|u-v|^۲=۲(|u|^۲+|v|^۲)$
$$\Rightarrow ۲۵+|u-v|^۲=۲(۹+۱۶)\Rightarrow |u-v|=|۳a-۲b|=۵$$

روش دوم:

$$|۳a+۲b|=۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} |۳a-۲b|^{۲}=۲۵$$
$$\Rightarrow ۹|a|^{۲}+۴|b|^{۲}+۱۲a\cdot b=۲۵ \xrightarrow[|b|=۲]{|a|=۱} ۹+۱۶+۱۲a\cdot b=۲۵ \rightarrow a\cdot b=۰$$
$$|۳a-۲b|^{۲}=۹|a|^{۲}+۴|b|^{۲}-۱۲a\cdot b=۹+۱۶+۰=۲۵ \rightarrow |۳a-۲b|=۵$$

روش سوم:

$$|۳a+۲b|^{۲}+|۳a-۲b|^{۲}=۲|۳a|^{۲}+۲|۲b|^{۲}=۱۸|a|^{۲}+۸|b|^{۲}=۱۸+۳۲=۵۰$$
$$\Rightarrow |۱۳a-۲b|^{۲}=۵۰-|۳a+۲b|^{۲}=۵۰-۵^{۲}=۲۵ \Rightarrow |۳a-۲b|=۵$$

۳۹. گزینه ۳ سه یال $v_{۱}=(a,-۱,۲)$ ، $v_{۲}=(۱,۲,b)$ و $v_{۳}=(-۱,c,۳)$ باید دو به دو بر هم عمود باشند، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} v_{۱}\cdot v_{۲}=۰ \\ v_{۱}\cdot v_{۳}=۰ \\ v_{۲}\cdot v_{۳}=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-۲+۲b=۰ \\ -a-c+۶=۰ \\ -۱+۲c+۳b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a+۲b=۲ \\ a+c=۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{معادله دوم را از اولی کم می کنیم.}} ۲b-c=-۴\ (I) \\ ۳b+۲c=۱\,(II) \end{cases}$$

حال به کمک دو معادله (I) و (II) و حل دستگاه نظیرشان به دست خواهیم آورد که:

$$\begin{cases} ۲b-c=-۴ \\ ۳b+۲c=۱ \end{cases} \xrightarrow[\text{دستگاه}]{\text{حل}} b=-۱\,,c=۲ \Rightarrow a=۴$$

پس $a+b+c=۴+۲-۱=۵$.