تاریخ :	وقت : دقیقه	سریال ۱۵۳۲۹۲
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۱۹	
موضوع 1.هندسه تحلیلی و جبر خطی		دبیرستان علامه حلی تهران

۲۱. گزینه ۴ همان طور که می‌دانیم مختصات تصویر و قرینه‌ی نقطه $A=(x,y,z)$ نسبت به صفحه‌های xy و yz به ترتیب نقاط $A'=(x,y,۰)$ و $A''=(-x,y,z)$ می‌باشد. لذا داریم:

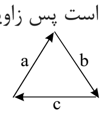
$$\left.\begin{matrix} \text{قرینه } A \text{ نسبت} : A'=(-۱,-۳,-۲) \\ \text{تصویر } A' \text{ روی صف} : A''=(-۱,-۳,۰) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A''A' \text{ وسط} : M=(-۱,-۳,-۱) \Rightarrow xM\cdot yM\cdot zM=(-۱)(-۳)(-۱)=-۳$$

۲۲. گزینه ۱ چون a بر دو صفحه‌ی xz و xy واقع است. پس روی فصل مشترک این دو صفحه یعنی محور x واقع است. هر بردار واقع بر محور ox به صورت $a=(x,۰,۰)$ است پس داریم:

$$\left.\begin{matrix} n^۲-n=۰\Rightarrow \begin{cases} n=۱ \\ n=۰ \end{cases} \\ \text{و} \\ n^۲-۱=۰\Rightarrow n=\pm ۱ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} n=۱$$

$$n=۱\Rightarrow a=(۲,۰,۰)\Rightarrow |a|=۲$$

۲۳. گزینه ۱ سه بردار a ، b و c مطابق شکل، مثلثی متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌کنند. از آن جا که انتهای بردار b بر ابتدای بردار c منطبق است پس زاویه‌ی بین دو بردار برابر است با $۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$ و داریم:



$$a+b=-c\Rightarrow |a+b|=|c|$$
$$|b-c|^۲=|b|^۲+|c|^۲-۲\,|b|\,|c|\cos ۱۲۰^\circ$$
$$=۲|c|^۲-۲|c|^۲(-\frac{۱}{۲})=۳|c|^۲\Rightarrow |b-c|=\sqrt{۳}\,|c|$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{|a+b|}{|b-c|}=\frac{|c|}{\sqrt{۳}\,|c|}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۴. گزینه ۱ مختصات نقطه‌ی M را به صورت (x,y,z) می‌گیریم. حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.

$$\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Rightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=۰$$
$$\overrightarrow{MA}=(۱,-۱,۲)-(x,y,z)=(۱-x,-۱-y,۲-z)$$
$$\overrightarrow{MB}=(-۱,۱,-۲)-(x,y,z)=(-۱-x,۱-y,-۲-z)$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=۰\Rightarrow (۱-x,-۱-y,۲-z)\cdot(-۱-x,۱-y,-۲-z)=۰$$
$$-(۱+x)(۱-x)-(۱+y)(۱-y)-(۲+z)(۲-z)=۰$$
$$x^۲-۱+y^۲-۱+z^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۶$$

فاصله‌ی M از مبدأ مختصات : $OM=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\Rightarrow OM=\sqrt{۶}$

۲۵. گزینه ۲

اندازه‌ی تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b برابر است با:

$$|a'|=\frac{|a\cdot b|}{|b|}=\frac{|-۱۲-۲-۲۱|}{\sqrt{۳۶+۴+۹}}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

۲۶. گزینه ۲ چون اندازه‌ی تصویربردار a بر روی بردار b برابر است با: $|a'|=\frac{|a\cdot b|}{|b|}$ در نتیجه داریم:

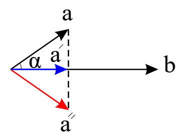
$$|a\cdot b|=|a'||b|$$

یعنی اگر زاویه‌ی بین دو بردار حاده باشد، ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی بردار تصویر در اندازه‌ی برداری که روی آن تصویر ایجاد شده است.

بنابراین داریم:

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA} = |BH||BH| = ۴\times ۴ = ۱۶$
$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = |CH||CB| = ۶\times ۱۰ = ۶۰$
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = ۱۶+۶۰ = ۷۶$

۲۷. گزینه ۳ نکته : اگر a' و a'' بترتیب تصویر و قرینه a نسبت به b باشند آنگاه $\vec{a} = \overrightarrow{a''} = ۲\vec{a}$

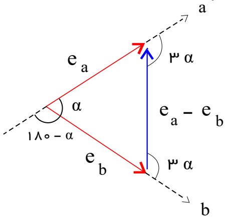


طبق فرض : $a + a'' = ۵\vec{b} \Rightarrow ۲\overrightarrow{a'} = ۵\vec{b} \Rightarrow \left|۲\overrightarrow{a'}\right| = \left|۵\vec{b}\right|$

$\Rightarrow |a'| = \frac{۵}{۲}|b| = \frac{۵}{۲}\times ۵ \Rightarrow \frac{|a\cdot b|}{|b|} = ۵ \Rightarrow |a\cdot b| = ۲\times ۵ = ۱۰$

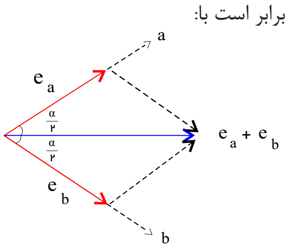
۲۸. گزینه ۱ در شکل مقابل $|ea| = |eb| = ۱$، پس مثلث متساوی‌الساقین است و خواهیم داشت: (مجموع زوایای خارجی، یک مثلث برابر ۳۶۰° است.)

$(۱۸۰^\circ - \alpha) + ۳\alpha + ۳\alpha = ۳۶۰^\circ$
$۵\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۶^\circ$



همچنین در شکل زیر چهارضلعی لوزی است پس قطر آن نیمساز است و بنابراین زاویه بین $ea+eb$ و a برابر است با:

$$\frac{\alpha}{۲} = \frac{۳۶^\circ}{۲} = ۱۸^\circ$$



۲۹. گزینه ۴ برای این‌که زاویه‌ی بردار با دو محور y و z، مکمل یکدیگر باشند، لازم است تا مؤلفه‌های y و z در بردار، قرینه‌ی هم باشند. حال اگر زاویه‌ی بردار با محور xها را با α نشان دهیم، داریم:

گزینه‌ی ۲ : $\cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$

گزینه‌ی ۳ : $\cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۶}}$

گزینه‌ی ۴ : $\cos\alpha = \frac{۲}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$

۳۰. گزینه ۲ تذکر: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار در فضا باشند اندازه‌ی تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ از دستور $\left|\overrightarrow{a'}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ حاصل می‌شود.

$|۲a+۳b| = \sqrt{۸۵} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴|a|^۲ + ۹|b|^۲ + ۱۲a\cdot b = ۸۵ \xrightarrow[|b|=\sqrt{۵}]{|a|=۲} ۴(۴)+۹(۵)+۱۲a\cdot b = ۸۵$

$\Rightarrow ۱۲a\cdot b \Rightarrow a\cdot b = ۲$

طول تصویر a روی b $= |a'| = \frac{|a\cdot b|}{|b|} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

۳۱. گزینه ۴ اگر α زاویه‌ی بین دو بردار S, b, a مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده به وسیله این دو بردار باشد، (چون طول دو بردار برابر است، متوازی‌الاضلاع به لوزی تبدیل می‌شود).

$$S = |a \times b| = |a| \times |b| \sin\alpha$$

$$۸۰ = ۱۰ \times ۱۰ \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - \sin^{۲}\alpha} = \pm\sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} \xrightarrow{\text{مقدار مثبت}} \cos\alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$a \cdot b = |a||b|cos\alpha \Rightarrow a \cdot b = ۱۰ \times ۱۰ \times \frac{۳}{۵} = ۶۰$$

۳۲. گزینه ۴

نکته: تصویر بردار a روی بردار b از دستور $a' = \frac{a \cdot b}{|b|^{۲}} b$ بدست می‌آید.

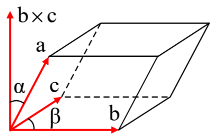
نکته: برداری که با هر سه محور زوایای یکسانی بسازد دارای سه مولفه یکسان است.

برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات، زوایای حاده مساوی می‌سازد مثلا بردار $(۱, ۱, ۱)$ است.

$$i \times (i \times k) = i \times (-j) = -k$$
$$a = -k = (۰, ۰, -۱)$$
$$b = (۱, ۱, ۱)$$
$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^{۲}} b = \frac{-۱}{۳}(۱, ۱, ۱) = (-\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۳})$$

۳۳. گزینه ۱ تذکر: حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{متوازی‌السطوح}} = |a \cdot (b \times c)| = ||a|\,|b|\,|c| \sin\beta \cos\alpha|$$



بردار a با صفحه‌ی شامل دو بردار b و c، زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد. از طرفی بردار $b \times c$ بر صفحه‌ی شامل این دو بردار عمود است، پس با بردار a، زاویه‌ی ۳۰° خواهد ساخت. داریم:

$$|b \times c| = |b|\,|c| \sin ۳۰^{\circ} = ۲ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = |a|\,|b \times c| \cos ۳۰^{\circ} = ۳ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

۳۴. گزینه ۲ چون محور z درون صفحه‌ی P است. پس ضریب z در معادله‌ی صفحه برابر صفر است یعنی $c = ۰$.
از طرفی نقطه‌ی $(-a, -۱, ۱)$ روی خط d است و در نتیجه در صفحه P قرار دارد. پس مختصات آن در معادله‌ی صفحه‌ی P صدق می‌کند. داریم:

$$-a + b(-۱) = d \Rightarrow a + b + d = ۰$$

بنابراین :

$$a + b + c + d = ۰$$

۳۵. گزینه ۱

$$L: \frac{x+۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۱} = \frac{z}{۲} = t \Rightarrow L: \begin{cases} x = ۲t - ۱ \\ y = -t + ۲ \\ z = ۲t \end{cases}$$

معادلات پارامتری خط L را در معادلات متقارن خط L' جایگزین می‌کنیم.

$$L': \frac{(۲t-۱)-۳}{۱} = \frac{(-t+۲)+a}{۲} = -(۲t)$$

باتوجه به معادلات بالا، باید جواب‌های حاصل از دو معادله‌ی $\frac{(۲t-۱)-۳}{۱} = -۲t$ و $\frac{(-t+۲)+a}{۲} = -۲t$ باهم برابر باشند.

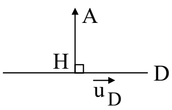
$$\begin{cases} \frac{(۲t-۱)-۳}{۱} = -۲t \Rightarrow ۲t - ۴ = -۲t \Rightarrow ۴t = ۴ \Rightarrow t = ۱ \\ \frac{(-t+۲)+a}{۲} = -۲t \xrightarrow{t=۱} \frac{۱+a}{۲} = -۲ \Rightarrow ۱ + a = -۴ \Rightarrow a = -۵ \end{cases}$$

۳۶. گزینه ۱ بردار هادی خط L و بردار نرمال صفحه‌ی P به‌ترتیب عبارتند از $uL=(-۲,۳,۲)$ و $nP=(۲,۲,-۱)$، از طرفی $uL\cdot nP=-۴+۶-۲=۰$، بنابراین این دو بردار بر هم عمودند یا به عبارت دیگر خط L با صفحه‌ی P موازی است. اکنون کافی است فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه از خط L را از صفحه‌ی P به دست آوریم. اگر این فاصله برابر ۳ باشد، بی‌شمار جواب وجود دارد و در غیر این صورت مسأله فاقد جواب است. نقطه‌ی $A=(۱,۲,۲)$ را روی خط L انتخاب می‌کنیم. فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P برابر است با:

$$D=\frac{|۲(۱)+۲(۲)-۲+۵|}{\sqrt{۲^۲+۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۹}{۳}=۳$$

پس فاصله‌ی هر نقطه از خط L تا صفحه‌ی P برابر ۳ واحد است یعنی بی‌شمار جواب داریم.

۳۷. گزینه ۴



عادله پارامتری خط D به‌صورت $\begin{cases}x=t\\ y=۲t\\ z=t+۲\end{cases}$ است. با در نظر گرفتن نقطه $H(t,۲t,t+۲)$ روی خط D و بردار $u=(۱,۲,۱)$ به‌عنوان بردار هادی خط داریم:

$$\overrightarrow{AH}\perp D\Rightarrow \overrightarrow{AH}\cdot u=۰\Rightarrow (t,۲t+۲,t+۲)\cdot(۱,۲,۱)=۰$$

$$\Rightarrow t+۴t+۴+t+۲=۰\Rightarrow ۶t+۶=۰\Rightarrow t=-۱$$

$$\Rightarrow H(-۱,-۲,۱)\Rightarrow m+n+p=-۲$$

۳۸. گزینه ۴

معادله فصل مشترک P و P':

$$D:\begin{cases}x-۲y=۰\\ x+۲y=۴\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} D:\begin{cases}x=۲\\ y=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{خط } D \text{ را پارامتری می‌کنیم}} D:\begin{cases}x=۲\\ y=۱\\ z=t\end{cases}\rightarrow M=(۲,۱,t)$$

$$M(۲,۱,۱)\in P\xrightarrow[\text{و صفحه ۱ باشد پس } t=۱ \text{ است صدق در } P \text{ می‌دهیم}]{\text{چون قرار است ارتفاع نقطه تقاطع خط ۱}} ۲x-۳y+az=۵\Rightarrow ۲(۲)-۳(۱)+a(۱)=۵$$

$$\Rightarrow ۱+a=۵\Rightarrow a=۴$$

۳۹. گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی گذر از سه نقطه‌ی A, B, C را می‌یابیم. می‌دانیم: $NP=AB\times AC$

$$\left.\begin{matrix}A(۱,۲,-۱)\\ B(۲,۳,۰)\\ C(-۱,۰,۵)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(۱,۱,۱)\\ \overrightarrow{AC}=(-۲,-۲,۶)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(۸,-۸,۰)\xrightarrow{\times\frac{۱}{۸}}(۱,-۱,۰)$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مورد نظر $x-y=-۱$ است و فاصله‌ی مبدأ مختصات از این صفحه برابر است با:

$$D=\frac{|۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تذکر: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰,z_۰)$ از صفحه‌ی $P:ax+by+cz=d$ از دستور $L=\dfrac{|ax_۰+by_۰+cz_۰-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ به دست می‌آید.