۲۱. گزینه ۲ قرینه هر نقطه با بردار $(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به صفحه ی yz، نقطه یا بردار $(-a_۱,a_۲,a_۳)$ است.

$$a=(۲,-۱,-۳)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحه } yz}a''=(-۲,-۱,-۳)$$

تصویر نقطه یا بردار $(b_۱,b_۲,b_۳)$ روی محور yها، نقطه یا بردار $(۰,b_۱,۰)$ است.

$$a'=(-۲,-۱,-۳)\xrightarrow{\text{تصویر نسبت به صفحه } y \text{ ها}}a'=(۰,-۱,۰)$$

$$a+a'=(۲,-۱,-۳)+(۰,-۱,۰)=(۲,-۲,-۳)$$

$$|a+a'|=\sqrt{۴+۴+۹}=\sqrt{۱۷}$$

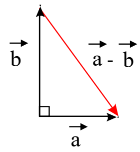
۲۲. گزینه ۲

چون دو بردار بر هم عمودند، $\vec{a}-\vec{b}=\sqrt{|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲}$ است و با توجه به داده‌های مسأله خواهیم داشت:

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲}=۴\sqrt{۲}\Rightarrow|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲=۳۲$$

$$\Rightarrow(۲\sqrt{۲})^۲+|\vec{b}|^۲=۳۲\Rightarrow|\vec{b}|=۲\sqrt{۶}$$

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



۲۳. گزینه ۱ بردار e_a+e_b ، بردار نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b است. داریم:

$$|a|=۳\Rightarrow e_a=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$

$$|b|=۳\Rightarrow e_b=(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳})$$

$$e_a+e_b=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰)\Rightarrow|e_a+e_b|=\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین برای یافتن بردار جهت نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b، کافی است بردار جهت بردار e_a+e_b را بیابیم پس بردار e_a+e_b را بر اندازه‌ی آن یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ تقسیم کنیم. در نتیجه بردار مورد نظر برابر است با $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$ که مجموع مؤلفه‌های آن برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۴. گزینه ۴ $e_۱$ و $e_۲$ بردارهای یکه هستند، داریم:

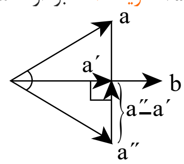
$$V_۱\perp V_۲\Rightarrow V_۱\cdot V_۲=۰\Rightarrow(۵e_۱+۴e_۲)\cdot(-۲e_۲+e_۱)=۰\Rightarrow-۱۰e_۱\cdot e_۲+۵|e_۱|^۲-۸|e_۲|^۲+۴e_۲\cdot e_۱=۰$$

$$\Rightarrow-۶e_۱\cdot e_۲=+۳\Rightarrow e_۱\cdot e_۲=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow|e_۱||e_۲|\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^\circ$$

۲۵. گزینه ۴ بردار $a'-a''$ بر بردار a' عمود است بنابراین ضرب داخلی آنها صفر می‌شود.

$$a'-a''=(۰,۲,-۲)$$

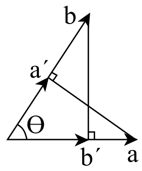
$$a'\cdot(a'-a'')=۰\Rightarrow۲-۲m+۲=۰\Rightarrow m=۲\Rightarrow a''=(۲,-۱,۳)$$



بردارهای a و a'' هم اندازه هستند بنابراین:

$$|a|=|a''|=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$$

۲۶. گزینه ۲



با توجه به شکل دیده می‌شود اگر زاویه‌ی بین a و b برابر θ باشد زاویه‌ی بین بردارهای a' و b' نیز θ است داریم:

$$a'\cdot b' = |a'||b'|\cos\theta = (|a|\cos\theta)(|b|\cos\theta)\cos\theta$$

$$\Rightarrow a'\cdot b' = \underbrace{(|a||b|\cos\theta)}_{a\cdot b=۱}\cos^۲\theta = \cos^۲\theta$$

۲۷. گزینه ۲ نکته : اگر $\vec{a}(x,y,z)$ بردار جهت بردار $\vec{a}$ از دستور $e_a = \frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$ بدست می‌آید.

$$\vec{a}=(۲,۳,m) \Rightarrow \overrightarrow{e_a} = \frac{۱}{|a|}a = \frac{۱}{\sqrt{۴+۹+m^۲}}(۲,۳,m) = \left(\frac{۲}{\sqrt{۱۳+m^۲}},\frac{۳}{\sqrt{۱۳+m^۲}},\frac{m}{\sqrt{۱۳+m^۲}}\right) \qquad (۱)$$

از طرفی طبق فرض $e_a = \left(\frac{۲}{۷},n,p\right)$ بنابراین :

$$\frac{۲}{\sqrt{۱۳+m^۲}} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow \sqrt{۱۳+m^۲} = ۷ \Rightarrow ۱۳+m^۲ = ۴۹ \Rightarrow m^۲ = ۳۶ \Rightarrow m = ۶ \quad (m>۰)$$

$$\Rightarrow (۱) \;:\; \overrightarrow{e_a} = \left(\frac{۲}{۷},\frac{۳}{۷},\frac{۶}{۷}\right) = \left(\frac{۲}{۷},n,p\right) \to \begin{cases}\frac{۳}{۷}=n\\ \frac{۶}{۷}=p\end{cases}$$

$$\Rightarrow m+n+p = ۶+\frac{۳}{۷}+\frac{۶}{۷} = \frac{۵۱}{۷}$$

۲۸. گزینه ۲ تذکر: حجم هر مثلث القاعده (چهاروجهی) ساخته شده روی بردارهای $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ از دستور $\frac{۱}{۶}|\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})|$ بدست می‌آید.

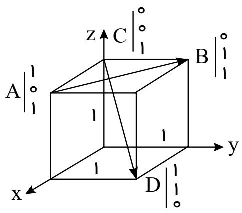
ابتدا بردارهای $b+j$ ،$b-j$ سازیم.

$$\left.\begin{array}{r} b+j=(i+k)+j=(۱,۱,۱)\\ b-j=(i+k)-j=(۱,-۱,۱)\end{array}\right\} \Rightarrow (b+j)\times(b-j) = (۲,۰,-۲)$$

$$v = \frac{۱}{۶}|a\cdot((b+j)\times(b-j))| = \frac{۱}{۶}|(۱,۲,-۱)\circ(۲,۰,-۲)| = \frac{۱}{۶}|۲+۰+۲| = \frac{۲}{۳}$$

۲۹. گزینه ۴

یک گوشه این مکعب را منطبق بر مبدأ مختصات کرده و به سایر رئوس آن مختصات می‌دهیم:



$$\begin{cases}\overrightarrow{CD} = D-C = (۱,۱,-۱)\\ \overrightarrow{AB} = B-A = (-۱,۱,۰)\end{cases} \Rightarrow AB\cdot CD = -۱+۱+۰ = ۰$$

۳۰. گزینه ۳ تذکر: اگر $\vec{a}(x,y,z)$ آنگاه اگر زوایای بردار $\vec{a}$ با محورهای مختصات بترتیب α و β و γ باشد:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a}(m,۳,۱) : \cos\alpha+۱ = ۲\cos\beta \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^۲+۱۰}}+۱ = ۲\times\frac{۳}{\sqrt{m^۲+۱۰}} \Rightarrow \frac{m+\sqrt{m^۲+۱۰}}{\sqrt{m^۲+۱۰}} = \frac{۶}{\sqrt{m^۲+۱۰}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^۲+۱۰} = ۶m \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^۲+۱۰ = ۳۶-۱۲m+m^۲ \Rightarrow ۱۲m = ۲۶ \Rightarrow m = \frac{۱۳}{۶}$$

۳۱. گزینه ۱ نکته: اگر a و b دو بردار دلخواه در فضا باشند نامساوی زیر مشهور به نامساوی کوشی شوارتز برقرار است.

$|a\cdot b| \le |a|\;|b|$

در عبارت $۲x+y+۲z$ ضریب z,y,x را بردار $\vec{a}$ در نظر می‌گیریم یعنی $a(۲,۱,۲)$ و بردار b نیز به صورت $b(x,y,z)$ تعریف می‌شوند.

$|a\cdot b| \le |a|\,|b|$

$$\Rightarrow |۲x+y+۲z| \le \sqrt{۴+۱+۴}\cdot\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$$
$$\Rightarrow ۹ \le ۳\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \ge ۳$$
$$\Rightarrow \min(\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}) = ۳$$

۳۲. گزینه ۳

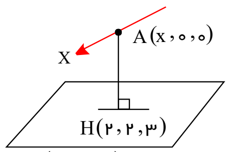
مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی a و $a+b$ $= |a\times(a+b)| = |\underbrace{a\times a}_{\circ} + a\times b| = |a\times b|$

$$\longrightarrow |a\times b| = |a|\,|b|\sin\theta = ۱۲ \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{۱-\sin^۲\theta} = \sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}(\circ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$$

حال به کمک $\cos\theta$ می‌توانیم بنویسیم:

$$a\cdot(a+b) = |a|^۲ + a\cdot b = \left|a^۲\right| + |a|\,|b|\cos\theta$$
$$= ۲۵ + ۴\times ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۲۵ + ۱۶ = ۴۱$$

۳۳. گزینه ۱ معادله‌ی خط AH را با استفاده از نقطه‌ی $A=(x_\circ,\circ,\circ)$ و $\overrightarrow{AH}=n=(۱,۲,۳)$ می‌نویسیم (n بردار نرمال صفحه‌ی P است.)



$$\frac{x-x_\circ}{۱} = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = t + x_\circ \\ y = ۲t \\ z = ۳t \end{cases}$$

چون نقطه‌ی $H=(۲,۲,۳)$ روی این خط قرار دارد، داریم:

$$y = ۲t = ۲ \Rightarrow t = ۱$$
$$x = t + x_\circ \Rightarrow ۱ + x_\circ \Rightarrow x_\circ = ۱$$

۳۴. گزینه ۲ از آن‌جا که d به تمامی در صفحه‌ی P قرار دارد، پس بردار هادی خط d بر بردار نرمال صفحه‌ی P عمود است. همچنین هر نقطه‌ی دلخواه خط d در معادله‌ی صفحه‌ی P صدق می‌کند. داریم:

$$u_D \cdot n_P = \circ \Rightarrow (۲,-۳,۱)\cdot(۱,۱,m) = \circ \Rightarrow m = ۱$$
$$A = (-۱,۲,۱) \in D \Rightarrow A = (-۱,۲,۱) \in P \Rightarrow -۱+۲+۱ = n \Rightarrow n = ۲$$

پس $m+n=۳$ است.

۳۵. گزینه ۴ ابتدا شرط عمود بودن دو خط را در نظر می‌گیریم:

$$d \perp d' \Rightarrow u_d \perp u_{d'} \Rightarrow u_d \cdot u_{d'} = \circ$$
$$\Rightarrow (a,-۲,-۱)\cdot(a-۲,-۳,۵) = \circ \Rightarrow a^۲ - ۲a + ۶ - ۵ = \circ$$
$$\Rightarrow a^۲ - ۲a + ۱ = \circ \Rightarrow (a-۱)^۲ = \circ \Rightarrow a = ۱$$

با فرض $u_d = (-۱,-۳,۵)$ و $u_{d'} = (۱,-۲,-۱)$، بردار نرمال صفحه عبارت است از:

$$n = u_d \times u_{d'} = (۱۳,۴,۵)$$

از طرفی نقطه‌ی $A=(\circ,۱,\circ)$ (نقطه‌ی A متعلق به خط d' است که در صفحه نیز صدق می‌کند.) در این صفحه است، پس داریم:

$$P: ۱۳(x-\circ) + ۴(y-۱) + ۵(z-\circ) = \circ \Rightarrow ۱۳x + ۴y + ۵z - ۴ = \circ$$

برای تعیین محل برخورد صفحه P با محور oz مؤلفه x, y را در معادله صفحه مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x=y=\circ} z = \frac{۴}{۵}$$

۳۶. گزینه ۱ اگر معادلات خط D را به صورت پارامتری در آوریم، آنگاه داریم:

$$D:\begin{cases} x=۲t-۱ \\ y=t-۲ \\ z=t+۱ \end{cases}$$

پس نقطه‌ی M را می‌توان به صورت $(۲t-۱,t-۲,t+۱)$ از خط D انتخاب کرده و فاصله‌ی آن را از صفحه‌ی P به دست آورد.

$$۵=\frac{|۲(۲t-۱)-(t-۲)+۲(t+۱)+۸|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲+۲^۲}}\Rightarrow|۵t+۱۰|=۱۵\Rightarrow|t+۲|=۳\Rightarrow\begin{cases} t=۱\rightarrow M(۱,-۱,۲) \\ t=-۵\rightarrow M(-۱۱,-۷,-۴) \end{cases}$$

۳۷. گزینه ۲

$$x+۱=y=z+۲=t\Rightarrow\begin{cases} x=t-۱ \\ y=t \\ z=t-۲ \end{cases}$$

اکنون این روابط را در معادله‌ی دوم جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{t-۱-m}{۳}=t-۳=\frac{t-۳}{۲}\Rightarrow\begin{cases} t-۱-m=۳t-۹\Rightarrow ۲t=۸-m \\ ۲t-۶=t-۳\Rightarrow t=۳ \quad (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(۳)=۸-m\Rightarrow m=۲$$

۳۸. گزینه ۳ تذکر: فاصله نقطه A از خط d از دستور $L=\frac{\left|\overrightarrow{AA_۰}\times\overrightarrow{ud}\right|}{|ud|}$ بدست می آید. که در آن $A_۰$ نقطه دلخواهی از خط d می باشد.

$$\begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=y \\ \frac{y+۲}{۳}=\frac{z}{۶} \end{cases}\xrightarrow{y}\begin{cases} \frac{x-۱}{۲}=y \\ y=\frac{z-۴}{۲} \end{cases}\rightarrow d:\frac{x-۱}{۲}=y=\frac{z-۴}{۲}$$

با انتخاب نقطه $A_۰\ (۱,۰,۴)$ روی خط d داریم:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA_۰}=(۰,۲,۱) \\ ud=(۲,۱,۲) \end{cases}\rightarrow\overrightarrow{AA_۰}\times ud=(۵,-۲,-۴)$$

$$d \text{ فاصله } A \text{ ازخط } = L=\frac{\left|\overrightarrow{AA_۰}\times ud\right|}{|ud|}=\frac{\sqrt{۲۵+۴+۱۶}}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\sqrt{۵}$$

۳۹. گزینه ۳ تذکر: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه $p:ax+by+cz=d$ از دستور $L=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ حاصل می‌شود.

$$L=\frac{|۲(۰)+۱(۰)-۲(۲)-۵|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=\frac{۹}{۳}=۳$$