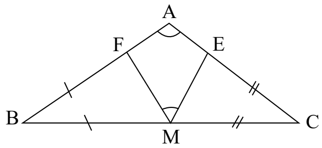
۱. در شکل مقابل، هر دو مثلث کناری متساوی الساقین اند. اگر زاویه ی A برابر ۱۰۶ درجه باشد، زاویه ی M چند درجه است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۸
۳) ۴۴ ۴) ۵۴



۲. در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{۳}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{۳}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

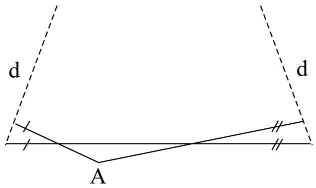
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۳. در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه ی M و N قطع می کند. فاصله ی این دو نقطه چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۴. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین اند. زاویه $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$، دو خط d', d با زاویه چند درجه متقاطع اند؟

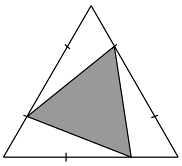
۱) ۲۰ ۲) ۵۰
۳) ۴۵ ۴) ۴۰



۵. در مثلث ABC، داریم $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند، زاویه $\widehat{MBC}$ چند درجه است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

۶. هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ تقسیم شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟

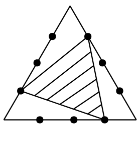


۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۷. از بین مثلث هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع باشد، کمترین مقدارمحیط کدام است؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۸. هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت های ۱ و ۳ تقسیم شده است، مساحت مثلث سایه زده چند برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$
۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۹. در مثلث ABC داریم، $AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲}AB$, $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ، ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

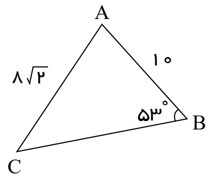
۱۰. در مستطیل به ابعاد **۱۳** و **۶** واحد نقطه‌ی M بر روی ضلع بزرگ قرار دارد و خطوط و اصل از M به دو رأس دیگر مستطیل بر هم عمودند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مستطیل از M کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳٫۵ ۳) ۴ ۴) ۴٫۵

۱۱. مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{۶}$ واحد را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. اندازه‌ی ضلع نابزرگتر از یک مثلث همنهشت چقدر است؟

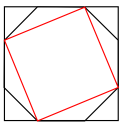
۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۱۲. در مثلث شکل مقابل، طول BC کدام است؟ $(\sin ۵۳^\circ \sim ۰٫۸)$



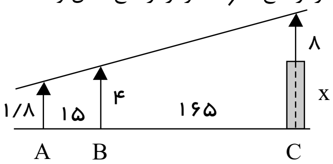
۱) ۲ ۲) ۱۴
۳) ۱۰ ۴) ۶

۱۳. درشکل مقابل اندازه‌ی طول اضلاع هشت ضلعی منتظم **۲** واحد است . مساحت مربع کوچک چند واحد مربع است؟



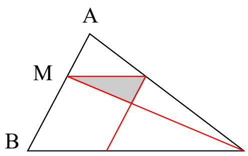
۱) $۴\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۲) $۴\left(۲+\sqrt{۲}\right)$
۳) $۸\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۴) $۸\left(۲+\sqrt{۲}\right)$

۱۴. درشکل مقابل دکلی به طول **۸** متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع متر، از ارتفاع **۱٫۸** متر از ارتفاع دکل و تیرک **۴** متری دریک راستا است. بلندی برج چند متراست؟



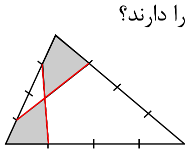
۱) ۱۹٫۸ ۲) ۲۰٫۲
۳) ۲۰٫۸ ۴) ۲۱٫۲

۱۵. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی الاضلاع است؟



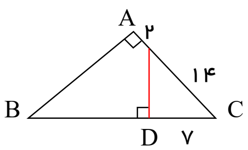
۱) ۲۰ ۲) ۲۴
۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۶. در شکل مقابل هر ضلع مثلث به **۴** قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهار ضلعی سایه زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



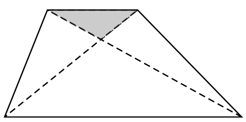
۱) هم مساحت ۲) هم محیط
۳) هم نهشت ۴) متشابه

۱۷. در شکل مقابل $\hat{A}=\hat{D}$، طول BD چند واحد است؟



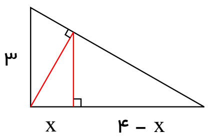
۱) ۲۲ ۲) ۲۳
۳) ۲۴ ۴) ۲۵

۱۸. قاعده‌ی بزرگ‌تر ذوزنقه دو برابر قاعده‌ی کوچک‌تر آن است. مساحت کل ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث سایه‌زده است؟



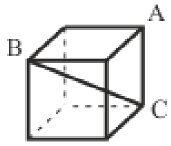
۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۹. در شکل مقابل، ارتفاع هر دومثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟



۱) ۱٫۹۶ ۲) ۱٫۵۶
۳) ۱٫۶۴ ۴) ۱٫۴۴

۲۰. در مکعب شکل مقابل فاصله ی رأس A از قطر BC چند برابر یال مکعب است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

۲۱. در داخل نیمکره به قطر $۲\sqrt{۳}$ بزرگترین منشور قائم با قاعده مربع طوری ساخته شده است که قطر مربع برابر $\sqrt{۳}$ است، حجم منشور کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۲

۲۲. قاعده ی یک منشور، مثلثی به اضلاع $\sqrt{۵}$ و۲ و ۱ واحد و ارتفاع منشور ۱ واحد است. این منشور را به دو جزء چنان تقسیم می کنیم که از کنار هم قرار دادن این دو جزء یک مکعب حاصل شود، قطر مکعب کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) نشدنی

۲۳. استوانه‌ای قائم توپر به ارتفاع ۵واحد و شعاع قاعده‌ی ۴ واحد را بر روی محور آن به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از قرار دادن این دو قسمت بر روی هم، نیم استوانه‌ای قائم ایجاد می‌شود. سطح کل شکل حاصل کدام است؟

۱) $۴۰\pi+۴۰$ ۲) $۴۰\pi+۸۰$ ۳) $۵۶\pi+۴۰$ ۴) $۵۶\pi+۸۰$

۲۴. از داخل یک استوانه‌ی قائم به ارتفاع ۵ و شعاع قاعده‌ی ۲ واحد، بزرگ‌ترین مخروط ممکن را خارج کرده‌اند. شکل باقی‌مانده را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۱ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

۱) $۱/۴۴\pi$ ۲) $۱/۵۴\pi$ ۳) $۱/۵۶\pi$ ۴) $۱/۷۵\pi$

۲۵. در یک هرم منتظم با قاعده مربع، وجوه جانبی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است. اگر سطح کل این هرم $۱۸(۱+\sqrt{۳})$ باشد، حجم آن کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

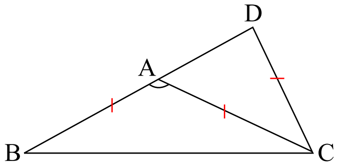
۲۶. در یک مکعب، مرکز تقارن هر وجه جانبی آن، رأس های یک هشت وجهی منتظم اند. حجم این هشت وجهی منتظم چند برابر حجم مکعب است؟ (دو هرم منتظم در قاعده مشترک)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۷. حجم یک کره، $\sqrt{۲}$ برابر حجم یک مخروط قائم است. اگرشعاع قاعده مخروط برابرشعاع کره باشد، فاصله راس مخروط تا محیط قاعده آن، چند برابر شعاع قاعده است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۲۸. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ ، ساق BA را از نقطه B به اندازه قاعده BC تا نقطه D، امتداد می‌دهیم، اگر $CD=CA$ باشد، زاویه A چند درجه است؟

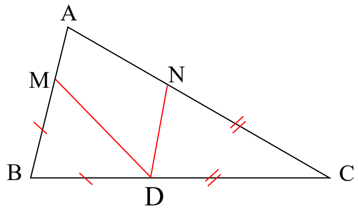


۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۵
۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۲

۲۹. در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می آوریم. اگر $\widehat{ADB} = ۳۴^{\circ}$ باشد، زاویه $O\widehat{A}D$ چند درجه است؟

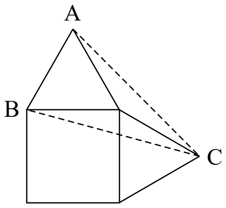
۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

۳۰. در شکل مقابل $\hat{A} = ۵۸^{\circ}$ $BM = BD,$ و $CN = CD$ ، زاویه $M\widehat{D}N$ چند درجه است؟



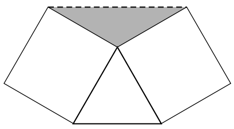
۱) ۵۸ ۲) ۵۹
۳) ۶۱ ۴) ۶۲

۳۱. در خارج یک مربع به ضلع ۲ واحد بر روی هر دو ضلع مجاور آن، مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است، مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\sqrt{۳}$

۳۲. در یک مثلث متساوی الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربّع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$
۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

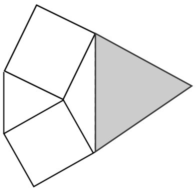
۳۳. در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک راس آن و شعاع ۲٫۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می کند، فاصله‌ی نزدیک‌ترین راس مربع تا نقطه‌ی تقاطع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳۴. در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، طول قاعده‌ها ۱۴و ۹واحد و طول سابق مایل $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است. اندازهٔ قطر کوچک‌تر ذوزنقه کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۷\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳۵. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع آن، دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



۱) ۲ ۲) ۲٫۲۵
۳) ۳ ۴) ۴

۳۶. مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد، کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) $۸(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) $۴(۱+\sqrt{۲})$ ۴) $۴(۲+\sqrt{۲})$

۳۷. قاعده ی یک هرم منتظم، شش ضلعی منتظمی است به ضلع ۱ واحد و طول یال جانبی آن برابر ۲ واحد است. حجم این هرم چند واحد مکعب است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۳۸. یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است. کوتاه‌ترین فاصله رأس دیگر مربع از ضلع این مثلث، کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۳۹. در مستطیلی به طول اضلاع $۲\sqrt{۷}$ و ۶ واحد، از هر دو رأس متقابل عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. فاصلهٔ این دو خط عمود کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۱٫۷۵ ۴) ۲

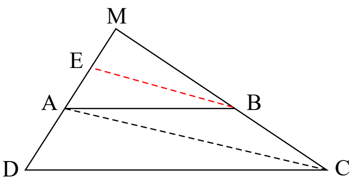
۴۰. در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است، اگر اندازه‌ی قاعده‌ی بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازه‌ی قاعده‌ی کوچک‌تر چند واحد است؟

۱) ۲٫۸ ۲) ۳٫۲ ۳) ۳٫۶ ۴) ۴٫۲

۴۱. قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر مساحت شش ضلعی اولیه است؟

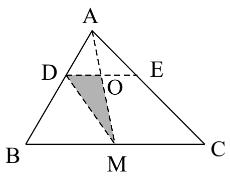
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۲. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD=۷$ و $AE=۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



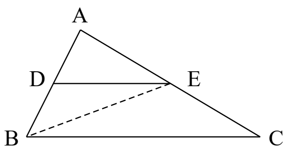
۱) ۱۲ ۲) ۱۲٫۲۵
۳) ۱۲٫۵ ۴) ۱۲٫۷۵

۴۳. در شکل زیر نقطه‌ی M وسط BC و $\frac{DA}{DB}=\frac{۲}{۳}$ و $DE \parallel BC$ است. مساحت مثلث ODM چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



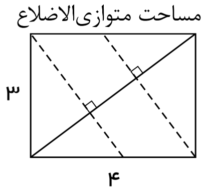
۱) ۱۲ ۲) ۱۵
۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۴۴. در مثلث ABC ، پاره خط DE موازی ضلع BC و $AD=\frac{۴}{۵}BC$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



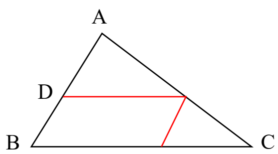
۱) ۲ ۲) ۲٫۲۵
۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۷۵

۴۵. در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل، کدام است؟

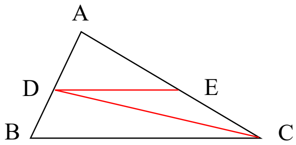


۱) ۵٫۲۵
۲) ۵٫۷۵
۳) ۶
۴) ۷٫۵

۴۶. در شکل روبرو $\frac{DA}{DB}=\frac{۳}{۲}$ ، مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

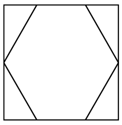


۱) ۳۶ ۲) ۴۰
۳) ۴۵ ۴) ۴۸



۴۷. در شکل مقابل، مساحت مثلث DEC شصت درصد مساحت مثلث ADE است. مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث ADE است؟

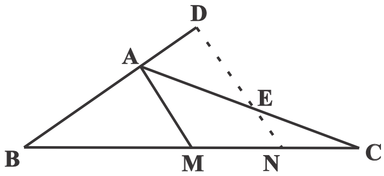
۱) ۱٫۳۶ ۲) ۱٫۴۴
۳) ۱٫۵۶ ۴) ۱٫۶۴



۴۸. در شکل مقابل محیط شش ضلعی منتظم، چند برابر محیط مستطیل محیط بر آن است؟

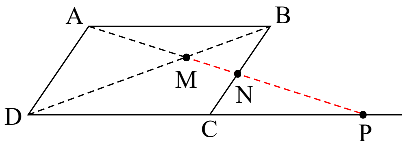
۱) $۳(\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $۳(۳-۲\sqrt{۲})$
۳) $۲(\sqrt{۳}-۱)$ ۴) $۳(۲-\sqrt{۳})$

۴۹. در مثلث ABC $(AB=\frac{۲}{۳}AC)$، پاره خط ND موازی میانه‌ی AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟

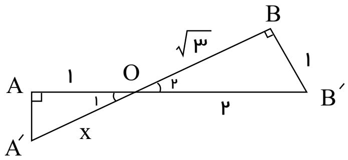


۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۵۰. در شکل روبه‌رو، $ABCD$ متوازی الاضلاع است. حاصل $MP\times MN$ برابر کدام است؟



۱) $AB^{۲}$ ۲) $AD^{۲}$
۳) $MD^{۲}$ ۴) $MA^{۲}$



۵۱. در شکل مقابل دو زاویه‌ی A و B قائمه‌اند. مقدار x چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$
۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۵۲. در یک مکعب به طول یال a، صفحه قطری، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند این دو قسمت را در وجه مربع به هم می‌چسبانیم. سطح کل منشور حاصل، چند برابر $a^{۲}$ است؟

۱) $۵+\sqrt{۲}$ ۲) $۴+۲\sqrt{۲}$ ۳) $۵+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳+۴\sqrt{۲}$

۵۳. در هرم با قاعده‌ی مربع، یکی از یال‌ها عمود بر صفحه‌ی قاعده، و بلندترین یال‌ها به طول ۶ واحد با تصویر خودش بر قاعده، زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد. حجم این هرم کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴٫۵\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۷٫۵\sqrt{۲}$

۵۴. یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل، کدام است؟

۱) ۳۶π ۲) ۳۸π ۳) ۳۹π ۴) ۴۰π

۵۵. یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ ۳۰ درجه و طول وتر ۸ واحد، حول وتر خود دوران می‌کند. حجم جسم حاصل، چند برابر π است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۰

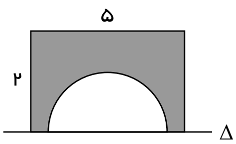
۵۶. در داخل یک چهاروجهی منتظم به طول یال $۲\sqrt{۶}$ واحد، بزرگ ترین کره ممکن جای گرفته است. شعاع این کره چند واحد است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۵۷. یک منشور قائم به ارتفاع ۲ و قاعده مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۳}$ واحد، در داخل مخروط قائم به شعاع قاعده ۳ واحد، با کمترین ارتفاع ممکن جای گرفته است. حجم این مخروط، کدام است؟

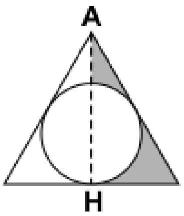
۱) ۶π ۲) ۸π ۳) ۹π ۴) ۱۲π

۵۸. سطح محدود به مستطیل ۵×۲ و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل، چند برابر π است؟



۱) ۱۵
۲) ۱۵٫۵
۳) ۱۶٫۵
۴) ۱۷

۵۹. در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ واحد، حجم حاصل از دوران هر دو سطح سایه زده شده، در حول ارتفاع AH، کدام است؟



۱) $\frac{۴\pi}{۳}$
۲) $\frac{۳\pi}{۲}$
۳) ۲π
۴) $\frac{۵\pi}{۳}$

۶۰. در متوازی الاضلاعی اندازه‌ی دو قطر ۱۲ و ۸ واحد، و زاویه‌ی بین دو قطر ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{۲}$ است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۳۲
۴) ۳۶

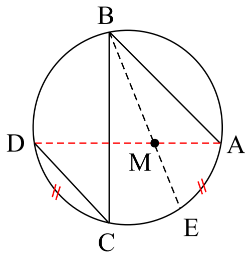
۶۱. حجم بزرگترین مکعب درون یک کره چه نسبتی از حجم آن کره است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳\pi}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴\pi}$
۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳\pi}$

۶۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول یک ضلع قائم ۸ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۳ واحد است، اندازهٔ وتر این مثلث، کدام است؟

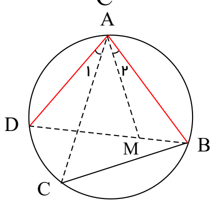
۱) ۱۵
۲) ۱۶
۳) ۱۷
۴) ۱۸

۶۳. در شکل مقابل $AB = ۶$، $BC = ۸$ ، $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$ ، اندازه‌ی AM، کدام است؟



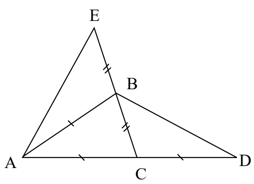
۱) ۲
۲) ۲٫۲۵
۳) ۲٫۵
۴) ۲٫۷۵

۶۴. در شکل مقابل $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ ، حاصل $AD \cdot BC$ برابر کدام است؟



۱) $DM \cdot AC$
۲) $BM \cdot AC$
۳) $AB \cdot CD$
۴) $BD \cdot BM$

۶۵. در شکل مقابل زاویه‌ی $B\widehat{A}C = ۵۲^\circ$، مجموع دو زاویه‌ی E, D چند درجه است؟

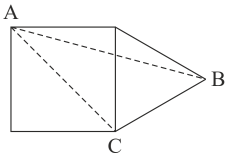


۱) ۳۸
۲) ۵۲
۳) ۵۸
۴) ۶۴

۶۶. در مثلث ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ \quad , \quad \hat{C} = ۲۴^\circ)$ ، از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن، $CD = CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه‌ی $D\widehat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۳۳°
۲) ۳۶°
۳) ۳۸°
۴) ۴۸°

۶۷. در شکل مقابل بر روی ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی آن است؟



۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) ۴ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۶۸. در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM=BA$ و $CN=CA$ را جدا می کنیم، اگر زاویه‌ی $\hat{A}=۷۲^\circ$ باشد، زاویه‌ی $M\widehat{A}N$ چند درجه است؟

۱) ۵۴° ۲) ۵۲° ۳) ۴۸° ۴) ۴۲°

۶۹. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه‌ی داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد. AD برابر کدام است؟

۱) AM ۲) MD ۳) MC ۴) $\frac{۱}{۲}AC$

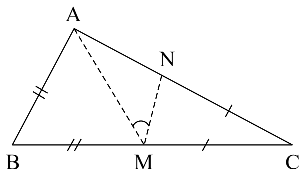
۷۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، قاعده‌ی BC را از هر دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها، تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۱. در مثلث ABC داریم $AB=AC$ و $\widehat{A}=۸۰^\circ$ ، عمودمنصف های دو ساق مثلث، قاعده ی BC را در M و N قطع می کند. کوچک ترین زاویه ی مثلث AMN چنددرجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۷۲. در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی‌الساقین هستند و $\hat{M}=۴۳^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\widehat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳° ۲) ۹۴°
۳) ۹۶° ۴) ۹۷°

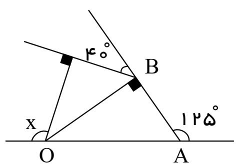
۷۳. یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه های هر مثلث همنشهت کدام است؟

۱) ۶۰° و ۶۰° و ۶۰° ۲) ۳۰° و ۳۰° و ۹۰°
۳) ۳۰° و ۶۰° و ۹۰° ۴) ۳۰° و ۳۰° و ۱۲۰°

۷۴. مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک هستند. در مثلث غیرقائم‌الزاویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع است. زاویه‌ی بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ی کوچک‌تر است؟

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۷۵. در شکل مقابل $\hat{A}=۱۲۵^\circ$ و $\hat{B}=۴۰^\circ$ است، زاویه‌ی x چند درجه است؟

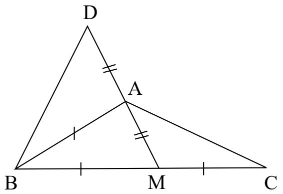


۱) ۱۰۵° ۲) ۱۱۰°
۳) ۱۱۵° ۴) ۱۲۵°

۷۶. در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A}=۱۰۸^\circ$ است. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD=BA$ و $CE=CA$ امتداد می‌دهیم. کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۱) ۲۴° ۲) ۳۲° ۳) ۳۶° ۴) ۵۴°

۷۷. در شکل مقابل $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^{\circ}$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ چند درجه است؟

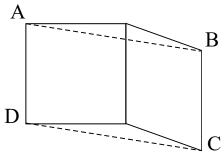


۱) ۳۹° ۲) ۶۱° ۳) ۵۸° ۴) ۵۶°

۷۸. در چهارضلعی محدّب $ABCD$، رابطهٔ $\frac{\widehat{A}}{۴}=\frac{\widehat{D}}{۳}=\frac{\widehat{C}+\widehat{D}}{۱۱}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویهٔ حاده بین نیم‌سازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ ، چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۷۹. در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰ درجه، در یک ضلع مشترک‌اند. بزرگ‌ترین زاویه‌ی متوازی‌الاضلاع $ABCD$ چند درجه است؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۸۰. در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازه‌ی ضلع سوم، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷٫۵ ۴) ۸

۸۱. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با زاویه‌ی ۶۰ درجه، قاعده‌ی کوچکتر برابر ساق آن است. اگر محیط این ذوزنقه ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲۷\sqrt{۳}$ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

۸۲. در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را در M قطع کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) ۴٫۵ ۳) ۵ ۴) ۶

۸۳. در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۴. در مثلث ABC $(\hat{A}=۹۰^{\circ})$ ارتفاع AH مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی ۶٫۷۶ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. نسبت فواصل H از دو ضلع قائم کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۲}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

۸۵. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. اگر زاویه‌ی خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC، چند درجه است؟

۱) ۳۴° ۲) ۳۸° ۳) ۴۲° ۴) ۴۴°

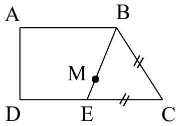
۸۶. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$، ساق AB را به اندازه‌ی $BD=BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه ی A چند درجه است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۲° ۴) ۳۶°

۸۷. در مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه‌ی قائمه کدام است؟

۱) $۱٫۴\sqrt{۲}$ ۲) ۲٫۱ ۳) ۲٫۸ ۴) $۲٫۱\sqrt{۲}$

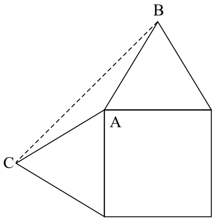
۸۸. در شکل مقابل، چهار ضلعی $ABCD$ ذوزنقه‌ی قائم الزاویه است و $CB = CE$. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو خط CB و CE برابر کدام است؟



۱) DE ۲) BC

۳) BE ۴) AD

۸۹. بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع **۲** واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟



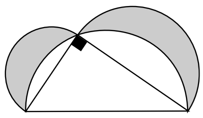
۱) $\sqrt{۳}-۱$

۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۳) ۱

۴) $\sqrt{۳}$

۹۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، طول اضلاع قائم **۳** و **۴** واحد است نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند مجموع مساحت‌های دو ناحیه ی سایه‌زده کدام است؟



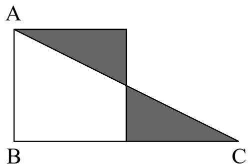
۱) ۲π ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۳π

۹۱. در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اندازه‌ی دو قاعده برابر **۵** و **۹** و طول ساق آن **۶** واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) $۱۴\sqrt{۶}$ ۲) $۲۱\sqrt{۲}$ ۳) $۲۱\sqrt{۳}$ ۴) $۲۸\sqrt{۲}$

۹۲. در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC، بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث سایه زده همنهشت باشند، مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟



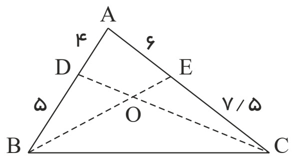
۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۹۳. مساحت یک مثلث قائم‌الزویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک‌تر آن ساخته می‌شود. اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع متوسط، چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۹۴. در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟



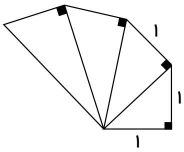
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) ۱

۹۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت **۱** و **۳**، مساحت آن **۶۰** واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

۹۶. مثلث‌های قائم‌الزاویه که در یک رأس مشترک هستند و اندازه‌ی یک ضلع قائم آن‌ها **۱** واحد است چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر آن ها وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$

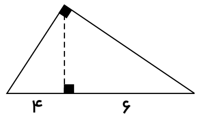
۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹۷. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول اضلاع قائم ۳ و $\sqrt{۷}$ است. ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. فاصله‌ی پای قائم از وسط وتر، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$. ضلع AC را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم $(AD = AC)$. اندازه‌ی BD کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۷



۹۹. در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۰}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$

۳) $\sqrt{۷۰}$ ۴) $\sqrt{۷۵}$

۱۰۰. طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه‌های این مربع، بزرگ‌ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت این هشت ضلعی کدام است؟

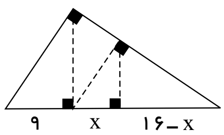
۱) ۳۲ ۲) $۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۲۴ + ۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$

۱۰۱. مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $۹\sqrt{۳}$ واحد مربع است. اندازه‌ی قطر کوچک آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۱۰۲. در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر، چه قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



۱۰۳. در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

۱) ۴/۵۴ ۲) ۵/۳۶

۳) ۵/۷۶ ۴) ۶/۷۵

۱۰۴. مثلثی به اضلاع b و a و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

۱) ۱۳/۵ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۷/۲

۱۰۵. مثلثی به اضلاع $a, ۴, ۵$، با مثلثی به طول اضلاع $b, ۷, ۹$، متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a، کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷}$ ۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۱۰۶. زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶ و ۵ و ۱ می‌باشند. کوچکترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگترین ضلع آن است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۷. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث، چند درجه است؟

۱) ۱۵° ۲) $۱۷/۵^\circ$ ۳) $۲۲/۵^\circ$ ۴) ۳۰°

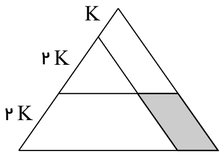
۱۰۸. در یک متوازی الاضلاع وسط دو ضلع غیر موازی را به هم وصل می‌کنیم. متوازی الاضلاع به دو قسمت نامساوی تقسیم می‌شود. مساحت قسمت بزرگتر چند برابر مساحت قسمت کوچک‌تر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰۹. در ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟

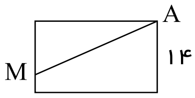
۱) ۱۸ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۱۰. در شکل روبه‌رو، یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۲ و ۲ تقسیم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع سایه زده چند درصد مساحت مثلث اصلی است؟



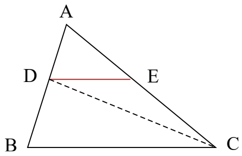
۱) ۱۶ ۲) ۱۸
۳) ۲۰ ۴) ۲۴

۱۱۱. در شکل روبه‌رو پاره خط AM مساحت مستطیل را به دو جزء با نسبت مساحت‌های $\frac{۵}{۹}$ تقسیم کرده است. اگر قطر مستطیل ۲۵ واحد، باشد، پاره خط AM چند واحد است؟



۱) ۲۱ ۲) ۲۳
۳) $۹\sqrt{۷}$ ۴) $۱۰\sqrt{۶}$

۱۱۲. در شکل مقابل $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$، $DE \parallel BC$، مساحت مثلث ADE چند درصد مثلث DEC است؟

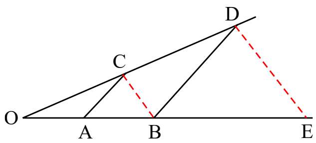


۱) ۷۰ ۲) ۸۴
۳) ۷۸ ۴) ۷۵

۱۱۳. در ذوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

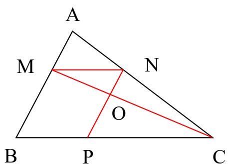
۱) ۱۱٫۴ ۲) ۱۱٫۶ ۳) ۱۲٫۲ ۴) ۱۲٫۸

۱۱۴. در شکل روبه‌رو، دو جفت پاره‌خط موازی‌اند. اگر $OA=۳$ و $AB=۵$، اندازه‌ی BE کدام است؟



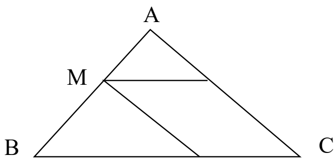
۱) $۱۳\frac{۱}{۳}$ ۲) $۱۲\frac{۲}{۳}$
۳) $۱۱\frac{۱}{۳}$ ۴) $۱۰\frac{۲}{۳}$

۱۱۵. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۷}$ و چهار ضلعی $MNPB$ متوازی الاضلاع است. مساحت مثلث OMN چند درصد مساحت مثلث AMN است؟



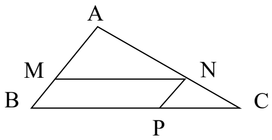
۱) ۶۳ ۲) ۶۰
۳) ۷۰ ۴) ۸۴

۱۱۶. در شکل مقابل، $AM=\frac{۲}{۳}MB$ و چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. مساحت متوازی‌الاضلاع چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸ ۲) ۵۰
۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۱۱۷. در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۴۸ ۲) ۵۲
۳) ۵۴ ۴) ۵۶

۱۱۸. در مثلث ABC داریم $\hat{A}=۷۰^\circ$,$\hat{B}=۵۰^\circ$ و ضلع $AB=۱۸$، در مثلث MNP داریم $\hat{M}=۷۰^\circ, \hat{N}=۶۰^\circ$، اگر مساحت مثلث ABC، برابر $\frac{۹}{۴}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

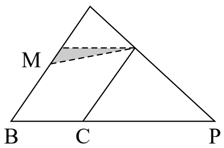
۱۱۹. درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۲۰. در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A}=۲\hat{B}$، کدام رابطه بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (ضلع b مقابل زاویه‌ی B است.)

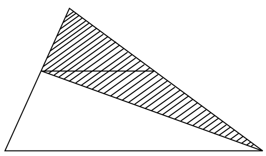
۱) $a^۲=bc$ ۲) $b^۲=ac$ ۳) $a^۲-b^۲=bc$ ۴) $a^۲-c^۲=bc$

۱۲۱. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC=\frac{۲}{۳}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



۱) $\frac{۱}{۱۲}$
۲) $\frac{۱}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۱۲۲. در شکل زیر، نسبت قاعده‌های ذوزنقه $\frac{۳}{۵}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت ذوزنقه است؟

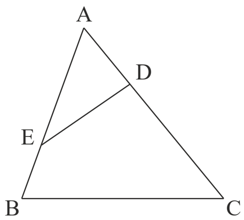


۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۲۳. در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{۲}{۳}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳

۱۲۴. در چهارضلعی $BCDE$، زاویه‌های روبرو مکمل هم هستند. اگر $BC=۲۰$ و $DE=۱۲$ آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۱) ۰/۵۶ ۲) ۰/۶۴ ۳) ۰/۷۲ ۴) ۰/۸

۱۲۵. در مثلث ABC، داریم $\hat{A}=۲\hat{B}$ و $BC=۶$ و $AC=۴$، اندازه‌ی ضلع AB کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۵/۵ ۴) ۶

۱۲۶. بزرگترین مکعب ممکن داخل یک کره به قطر ۶ واحد جای گرفته است، سطح کل این مکعب کدام است؟

۱) ۶۳ ۲) ۵۴ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

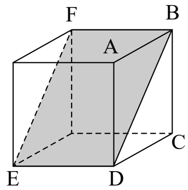
۱۲۷. در یک مکعب، فاصله‌ی هر رأس از صفحه‌ی گذرا بر انتهای سه یال که از همین رأس می‌گذرند، چند برابر یال این مکعب است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۲۸. در یک مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۶ و $۲\sqrt{۵}$ فاصله‌ی دو رأس غیرواقع در یک وجه کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) $۵\sqrt{۳}$ ۴) ۹

۱۲۹. در مکعب شکل مقابل، زاویه‌ی صفحه‌ی قطری سایه زده با صفحه‌ی وجه $ABCD$، چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

۱۳۰. در یک مکعب به طول یال $۴\sqrt{۲}$، فاصله‌ی وسط هر یک از دو وجه غیرموازی از یکدیگر چقدر است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۱۳۱. در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، بر انتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۶}$ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۱۳۲. می‌خواهیم مکعب مستطیلی به ابعاد a ,$\sqrt{۲}$,۱ را چنان بسازیم که زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال آن به طول a واحد، برابر ۳۰ درجه باشد. a برابر کدام عدد انتخاب شود؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۳. مساحت مقطع یک مکعب با صفحه‌ی قطری آن برابر $۹\sqrt{۲}$ می‌باشد. اندازه‌ی قطر مکعب کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۳۴. دو مکعب مستطیل یکسان به‌طور کامل در یک مکعب به طول یال ۶ واحد جای گرفته‌اند. طول قطر هر یک از این دو مکعب مستطیل کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۶}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) ۹

۱۳۵. قاعده‌ی یک مکعب مستطیل، به شکل مربع است و ارتفاع آن برابر قطر این مربع است. زاویه‌ی قطر مکعب مستطیل با یال کوچکتر آن چند درجه است؟

۱) ۱۵° ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰°

۱۳۶. قاعده‌ی یک منشور مایل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ واحد است. طول یال‌های جانبی منشور ۶ واحد و زاویه‌ی یال‌ها با صفحه‌ی قاعده ۶۰ درجه است. حجم این منشور کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱۸\sqrt{۳}$ ۴) ۳۶

۱۳۷. در داخل نیم‌کره به شعاع ۹ واحد، استوانه‌ای به ارتفاع ۶ واحد جای گرفته است. بیشترین حجم ممکن این استوانه، کدام است؟

۱) ۱۸۰π ۲) ۲۱۰π ۳) ۲۴۰π ۴) ۲۷۰π

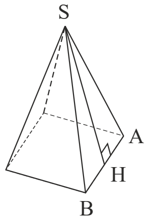
۱۳۸. مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) π ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) ۲π

۱۳۹. قاعده‌ی یک هرم مربعی به ضلع $\sqrt{۶}$ واحد است. وجوه جانبی آن مثلث‌های قائم‌الزاویه هستند. اگر طول کوتاه‌ترین یال آن **۲** واحد باشد، اندازه‌ی بلندترین یال آن چند واحد است؟

۱) **۴** ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) **۵**

۱۴۰. در هرم مربعی منتظم زیر، $SA = \sqrt{۳۴}$ و $SH = ۵$، حجم این هرم کدام است؟



۱) **۴۸** ۲) **۵۲**
۳) **۵۴** ۴) **۵۶**

۱۴۱. از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعدهٔ **۴** و ارتفاع **۵** واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط به فاصلهٔ **۳** واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$ ۲) $۱۱/۲۸\pi$ ۳) $۱۲/۵۶\pi$ ۴) $۱۳/۴۴\pi$

۱۴۲. مکعبی به طول یال **۲** واحد در داخل کوچکترین کره‌ی ممکن جای گرفته است. مساحت این کره کدام است؟

۱) ۸π ۲) ۹π ۳) ۱۲π ۴) ۱۸π

۱۴۳. کره ای از تمام رأس های یک مکعب مستطیل به ابعاد $۵, ۶, ۲\sqrt{۵}$، گذشته است. سطح این کره چند برابر π است؟

۱) **۶۴** ۲) **۸۱** ۳) **۱۴۴** ۴) **۱۳۶**

۱۴۴. مکعب مستطیل به ابعاد **۳** و **۴** و **۵** واحد، در داخل کوچک‌ترین کره‌ی ممکن جای گرفته است. مساحت سطح این کره، کدام است؟

۱) ۲۴π ۲) ۲۵π ۳) ۴۸π ۴) ۵۰π

۱۴۵. نیم کره‌ای به قطر **۱۲** واحد، در داخل کوچکترین استوانه‌ی ممکن جای گرفته است. حجم محدود به این نیمکره و استوانه، چند برابر π است؟

۱) **۳۶** ۲) **۴۲** ۳) **۵۴** ۴) **۷۲**

۱۴۶. ظرفی است به شکل نیمکره، به ضخامت یکنواخت **۳** واحد و قطر خارجی دهانه‌ی آن **۱۶** واحد است. سطح کل این ظرف چند برابر π است؟

۱) **۲۱۷** ۲) **۲۱۲** ۳) **۲۱۵** ۴) **۲۰۸**

۱۴۷. در داخل یک کره به شعاع **۵** واحد، استوانه‌ی قائم با سطح جانبی ۴۸π محاط شده است. حجم بیشتر این استوانه چقدر است؟

۱) ۹۶π ۲) ۹۸π ۳) ۱۰۸π ۴) ۱۴۴π

۱. گزینه ۱ روش اول: با توجه به این که دو مثلث و متساوی الساقین اند، بنابراین داریم:

$$\hat{E}_{۱}=\hat{M}_{۱}=\alpha \ \ , \ \ \hat{E}_{۲}=\hat{M}_{۲}=\beta$$
$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{B}+\hat{C}+\hat{A}=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\hat{C}+\hat{B}=۱۸۰^{\circ}-۱۰۶^{\circ}=۷۴^{\circ}\quad(I)$$
$$\overset{\Delta}{CEM}:\hat{C}+۲\alpha=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow ۲\alpha=۱۸۰^{\circ}-\hat{C}\quad(II)$$
$$\overset{\Delta}{BFM}:\hat{B}+۲\beta=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow ۲\beta=۱۸۰^{\circ}-\hat{B}\quad(III)$$

$$(II)+(III)\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۳۶۰^{\circ}-(\hat{C}+\hat{B})$$
$$(I)\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۳۶۰^{\circ}-۷۴^{\circ}}{۲}=۱۴۳^{\circ}\Rightarrow\hat{M}=\hat{M}_{۳}=۱۸۰^{\circ}-(\alpha+\beta)=۱۸۰^{\circ}-۱۴۳^{\circ}=۳۷^{\circ}$$

روش دوم: با توجه به این که تنها قید سؤال این است که $\hat{A}=۱۰۶^{\circ}$ و دو مثلث کناری متساوی الساقین اند، لذا مسأله را در حالت خاصی که ABC متساوی الساقین بوده و دو مثلث CEM و BFM همنهشت باشند، حل می کنیم:

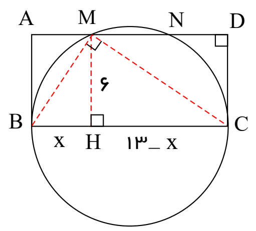
$$\overset{\Delta}{ABC}=۱۰۶^{\circ}+۲\beta=۱۸۰^{\circ}\Rightarrow\hat{\beta}=\frac{۱۸۰^{\circ}-۱۰۶^{\circ}}{۲}=۳۷^{\circ}$$
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{CEM}:۲\alpha+\beta=۱۸۰^{\circ}\\ \text{نیم صفحه }B\hat{M}C:۲\alpha+\hat{M}=۱۸۰^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{M}=\hat{\beta}\Rightarrow\hat{M}=۳۷^{\circ}$$

۲. گزینه ۲ نکته: مجموع فواصل هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از ۳ ضلع مثلث برابر است با ارتفاع مثلث.
از آنجا که مرکز مربع درون این مثلث قرار می‌گیرد پس اندازه ارتفاع مثلث جواب مساله است.

$$AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳})=\frac{۳}{۲}$$

۳. گزینه ۳ مثلث MBC در رأس M قائمه است چون دایره است و زاویه ی محاطی روبه رو به قطر ۹۰° است. حال در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه ی هندسی بین دو قطعه ی ایجاد شده بر وتر است. بنابراین:

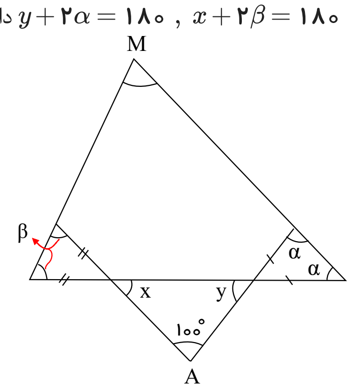
$$۶^{۲}=x\,(۱۳-x)\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰\Rightarrow(x-۴)\,(x-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۴\\x=۹\end{cases}$$



بنابراین قطعه ی کوچک تر یعنی $BH=۴$ می باشد و در نتیجه $AM=۴$ و به همین ترتیب $ND=۴$. در نتیجه $MN=۱۳-(۴+۴)=۵$.

۴. گزینه ۴ در دو مثلث متساوی الساقین فرض کنیم زوایای مجاور به قاعده در آنها β,α باشد با توجه به شکل $y+۲\alpha=۱۸۰\ ,\ x+۲\beta=۱۸۰$ داریم:

$$x+y=۸۰^{\circ}\Rightarrow ۲\alpha+۲\beta+(x+y)=۲\times۱۸۰^{\circ}$$
$$\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۳۶۰^{\circ}-۸۰^{\circ}=۲۸۰^{\circ}$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta=۱۴۰^{\circ}\Rightarrow M=۴۰^{\circ}$$

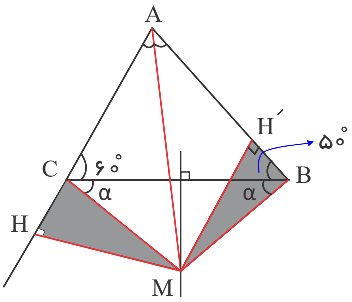


۵. گزینه ۳

برای حل این تست بهتر است ابتدا به تعریف‌های عمود منصف و نیمساز اشاره کنیم.

۱) عمود منصف هر پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط یکسان باشد.

۲) نیم ساز هر زاویه مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از دو ضلع زاویه یکسان باشد.



از نقطه M محل تلاقی عمود منصف ضلع BC و نیمساز $\hat{A}$ به B و C وصل می‌کنیم، پس طبق $MC = MB(۲)$ همچنین از M دو عمود MH و MH' را بر اضلاع AC و AB رسم می‌کنیم، پس طبق $MH = MH'$،(۱) در نتیجه، مثلث‌های قائم‌الزاویه MBH' و MCH به حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند. پس $\widehat{HCM} = \widehat{MBH'} = ۵۰^\circ + \alpha$

$$\widehat{HCM} + \widehat{MCA} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow (۵۰ + \alpha) + (۶۰ + \alpha) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۵^\circ$$

۶. گزینه ۴

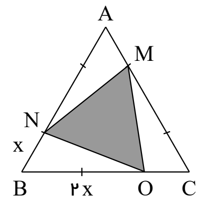
روش اول: مساحت مثلث هاي سفيد برابر است با:

$$S = ۳ \times \frac{h \times ۲x}{۲} = ۳hx$$

مساحت مثلث هاشورخورده برابر است با:

$$S(MNO) = S(ABC) - ۳S(MCO) = \frac{۳h \times ۳x}{۲} - ۳hx = \frac{۳hx}{۲}$$

$$S(ABC) = \frac{۳h \times ۳x}{۲} = \frac{۹hx}{۲} \to \frac{S(MNO)}{S(ABC)} = \frac{\frac{۳hx}{۲}}{\frac{۹hx}{۲}} = \frac{۱}{۳}$$



روش دوم: مساحت هر یک از مثلث‌های سفید برابر است با:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}(x)(۲x)\sin ۶۰^\circ$$

مساحت کل مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}(۳x)(۳x)\sin ۶۰^\circ$$

بنابراین مساحت هر مثلث سفید $\frac{۲}{۹}$ مساحت کل مثلث است.

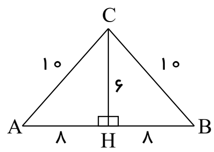
$$\text{مساحت سایه زده} = (\text{مساحت کل})\text{-}(\text{مساحت مثلث‌های سفید}) = S - (\frac{۲}{۹}S + \frac{۲}{۹}S + \frac{۲}{۹}S) = \frac{۱}{۳}S$$

۷. گزینه ۳

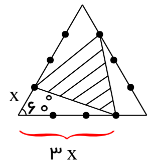
$$S = ۴۸ = \frac{۱}{۲} \times ۱۶ \times h \Rightarrow h = ۶$$

اگر $AC + BC$ مینیمم شود باید $AC = BC$ یعنی C روی عمود منصف AB است. به صورت شکل زیر:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط} = ۱۰ + ۱۰ + ۱۶ = ۳۶$$



۸. گزینه ۳



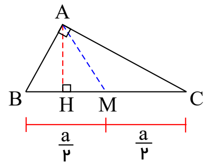
مساحت هر یک از مثلث‌های سفید $= \frac{۱}{۲}(x)(۳x)\sin ۶۰^\circ$

مساحت کل مثلث $= \frac{۱}{۲}(۴x)(۴x)\sin ۶۰^\circ$

بنابراین مساحت هر مثلث سفید $\frac{۳}{۱۶}$ مساحت کل مثلث است و می‌توان گفت:

مساحت مثلث سایه زده $= S-(\frac{۳}{۱۶}S+\frac{۳}{۱۶}S+\frac{۳}{۱۶}S)=\frac{۷}{۱۶}S$

۹. گزینه ۴



$$AC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB \quad (۱)$$

$$AB^۲+AC^۲=BC^۲ \xrightarrow{(۱)} AB^۲+\left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB\right)^۲=a^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۴}AB^۲=a^۲ \Rightarrow AB=\frac{۲}{۳}a$$

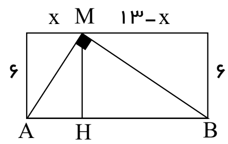
$$AB^۲=BH\cdot BC \Rightarrow \left(\frac{۲}{۳}a\right)^۲=BH\cdot a \Rightarrow BH=\frac{۴}{۹}a \Rightarrow HM=\frac{a}{۲}-\frac{۴a}{۹}=\frac{a}{۱۸}$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\cancel{AH}\times BC}{S_{\overset{\Delta}{AMH}}=\frac{۱}{۲}\cancel{AH}\times HM}=\frac{a}{\frac{a}{۱۸}}=۱۸$$

۱۰. گزینه ۳ روش اول: با توجه به رابطه‌ی طولی در مثلث قائم الزاویه‌ی AMB داریم:

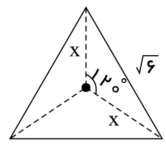
$$MH^۲=AH\times BH$$
$$X(۱۳-X)=MH^۲$$
$$X(۱۳-X)=۳۶ \Rightarrow X=۴$$

روش دوم: با توجه به شکل



$$MB^۲+MA^۲=AB^۲$$
$$(۱۳-x)^۲+۳۶+x^۲+۳۶=۱۶۹$$
$$\Rightarrow ۲x^۲-۲۶x+۷۲=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰ \quad x=۴, x=۹$$

۱۱. گزینه ۲ اگر از نقطه‌ی تلاقی میانه‌های مثلث متساوی الاضلاع به سه رأس آن وصل کنیم آنگاه سه مثلث همنهشت ایجاد می‌شود با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

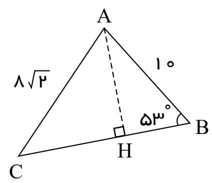


$$x^۲+x^۲-۲xx\cos ۱۲۰=(\sqrt{۶})^۲ \Rightarrow ۳x^۲=۶ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

هر یک از ۳ مثلث همنهشت متساوی‌الساقین است.

۱۲. گزینه ۲ با استفاده از قانون sinها در مثلث ABC داریم:

$$\frac{\sin ۵۳^\circ}{AC}=\frac{\sin\widehat{C}}{AB} \Rightarrow \frac{۰/۸}{۸\sqrt{۲}}=\frac{\sin\widehat{C}}{۱۰} \Rightarrow \sin\widehat{C}=\frac{۸}{۸\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

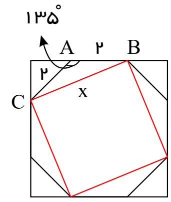


چون $\widehat{C}=۱۳۵^\circ$ نمی‌تواند باشد، لذا $\widehat{C}=۴۵^\circ$ اگر ارتفاع AH را رسم کنیم آنگاه $BH=AB\cos B\ ,\ CH=AC\cos C$ داریم:

$$BC = CH + BH = AC \times \cos\widehat{C} + AB\cos\widehat{B} = ۸\sqrt{۲} \times \cos ۴۵^\circ + ۱۰ \times \cos ۵۳^\circ$$

$$= ۸\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱۰ \times \sqrt{۱ - (۰/۸)^۲} \Rightarrow BC = ۸ + ۱۰ \times ۰/۶ = ۸ + ۶ = ۱۴$$

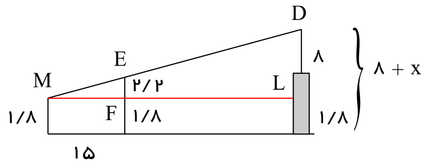
۱۳. گزینه ۲ باتوجه به مثلث ABC و قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



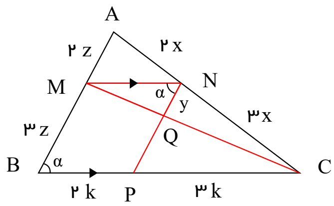
$$x^۲ = ۴ + ۴ - ۲ \times ۲ \times ۲\cos ۱۳۵ \Rightarrow x^۲ = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

۱۴. گزینه ۲ ازنقطه‌ی M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه‌ی تالس داریم:

$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{۲/۲}{۸ + x - ۱/۸} = \frac{۱۵}{۱۸۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow x = ۲۰/۲$$



۱۵. گزینه ۱



فرض کنیم $AM = ۲z$ و $MB = ۳z$ باشد، حال طبق قضیه‌ی تالس $AN = ۲x$ و $NC = ۳x$ خواهد بود. (چون $BMNP$ متوازی الاضلاع است و $MN||BC$). از طرفی در مثلث AMC ضلع NQ هم، با AM موازی است، پس اگر فرض کنیم $NQ = y$ داریم:

$$\frac{y}{۲} = \frac{۳x}{۲x + ۳x} \Rightarrow y = \frac{۶}{۵}$$

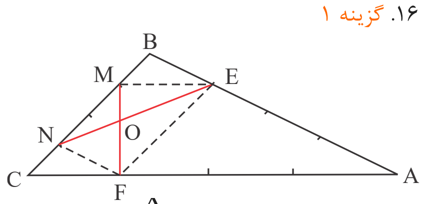
هم چنین باز بر طبق تالس:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{CP}{BP} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{PC}{BP} \Rightarrow \begin{cases} PC = ۳k \\ BP = ۲k = MN \end{cases}$$

حال خواهیم داشت:

$$\frac{S\Delta MNQ}{SBMNP} = \frac{\frac{۱}{۲} \times MN \times NQ \times \sin\alpha}{MB \times BP \times \sin\alpha} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲k \times \frac{۶}{۵} \times \sin\alpha}{۳ \times ۲k \times \sin\alpha} = \frac{۱}{۵} = ۲۰\%$$

۱۶. گزینه ۱



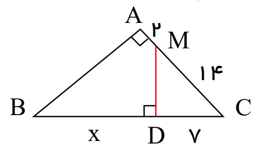
$$\frac{BE}{EA} = \frac{CF}{FA} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel BC \Rightarrow \text{ذوزنقه است MNFE}$$

$$\text{MNEF در ذوزنقه} \Rightarrow S_{M\overset{\Delta}{E}F} = S_{N\overset{\Delta}{E}F} \xrightarrow{OO\overset{\Delta}{E}F} S_{M\overset{\Delta}{O}E} = S_{O\overset{\Delta}{N}F}$$

(زیرا ارتفاع و قاعده مشترک دارند.)

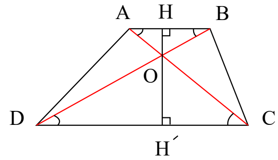
$$\left.\begin{array}{l} MB = CN \text{ از طرفی} \\ C\overset{\Delta}{N}F\,,\ M\overset{\Delta}{B}E \text{ دارای ارتفاع برابر هستند} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{M\overset{\Delta}{B}E} = S_{C\overset{\Delta}{N}F} \Rightarrow SMOEB = SNOFC$$

.۱۷ گزینه ۴



$$\left.\begin{array}{l}\hat{C}=\hat{C}\\ \hat{D}=\hat{A}\end{array}\right\}\Rightarrow M\overset{\Delta}{D}C\sim A\overset{\Delta}{B}C\Rightarrow \frac{DC}{AC}=\frac{MC}{BC}\Rightarrow \frac{۷}{۱۶}=\frac{۱۴}{۷+x}\Rightarrow \frac{۱}{۱۶}=\frac{۲}{۷+x}\Rightarrow ۷+x+۳۲\Rightarrow x=۲۵$$

.۱۸ گزینه ۳ با توجه به توازی AB و CD و مورب بودن قطرها، مطابق شکل $\widehat{A}=\widehat{C}$ و $\widehat{B}=\widehat{D}$ و در نتیجه مثلث های AOB و OCD متشابه‌اند. بنابراین داریم:



$$\frac{OH}{OH'}=\frac{AB}{CD}\xrightarrow{CD=۲AB}\frac{OH}{OH'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{OH}{OH'+OH}=\frac{۱}{۲+۱}$$

$$\Rightarrow\frac{OH}{HH'}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow HH'=۳OH$$

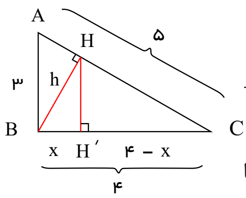
$$\frac{SABCD}{S\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times HH'}{\frac{۱}{۲}AB\times OH}=\frac{(AB+۲AB)\times ۳OH}{AB\times OH}=\frac{۹AB\times OH}{AB\times OH}=۹$$

.۱۹ گزینه ۴

وتر AC در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید.

$$AC=\sqrt{۲^۲+۴^۲}=۵$$

از طرفی داریم:



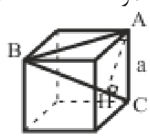
$$BH\times AC=AB\times BC\Rightarrow ۵h=۳\times۴\Rightarrow h=\frac{۱۲}{۵}$$

یا $\quad$ ارتفاع وارد بر وتر $=\dfrac{\text{ضرب دو ضلع قائم}}{\text{وتر}}=\dfrac{۳\times۴}{۵}=\dfrac{۱۲}{۵}$

$$\overset{\Delta}{BHC}:BH^۲=BH'\times BC\Rightarrow(\frac{۱۲}{۵})^۲=۴x\Rightarrow x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱٫۴۴$$

.۲۰ گزینه ۲

عمود AH فاصله ی رأس A تا قطر BC می باشد. مثلث ABC قائم الزاویه در رأس A است داریم:



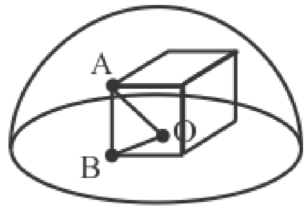
$$AC=a,BC=a\sqrt{۳},AB=a\sqrt{۲}$$

$$AB=\sqrt{BC^۲-AC^۲}=\sqrt{۳a^۲-a^۲}=a\sqrt{۲}$$

$$SABC=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{BC\times AH}{۲}\Rightarrow\frac{a\sqrt{۲}\times a}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}\times h}{۲}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۱. گزینه ۳

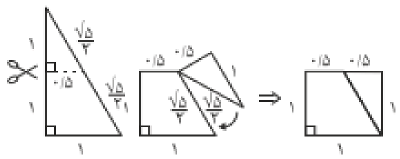
اگر O مرکز نیمکره باشد آنگاه O وسط قطر مربع است. پس در شکل OB نصف قطر مربع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و OA شعاع نیمکره برابر $\sqrt{۳}$ می باشد.



$$\begin{cases} OB=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ OA=\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{OA^{۲}-OB^{۲}}=\sqrt{۳-\frac{۳}{۴}}=\frac{۳}{۲}$$

$$\text{حجم منشور} = \text{ارتفاع} \times (\text{مساحت مربع}) = \left(\frac{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲}\right)\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۴}$$

۲۲. گزینه ۲ روش اول: مثلث با اندازه های ۱ و ۲ و $\sqrt{۵}$ قائم الزاویه است. اگر از وسط ضلع به طول ۲ خطی به موازات ضلع به طول ۱ رسم کنیم، موازی آن برابر ۰٫۵ خواهد بود. ضمن این که وتر مثلث را به دو قسمت با طول $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ تقسیم می کند. حال اگر در این امتداد و در راستای ارتفاع منشور آن را به دو قسمت تقسیم کنیم، می توان وجوهی که ابعادشان $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ و ۱ است را به هم چسباند و مکعبی به طول یال ۱ به دست آورد. مکعبی به طول یال ۱ ، قطری برابر $\sqrt{۳}$ دارد.



روش دوم: با ین کار حجم شکل تغییر نمی کند پس اگر طول اضلاع مکعب برابر a باشد، داریم:

$$\text{حجم منشور} = \text{حجم مکعب} \Rightarrow (\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱)\times ۱ = a^{۳} \Rightarrow a^{۳}=۱ \Rightarrow a=۱$$

بنابراین قطر مکعب برابر است با:

$$\text{قطر مکعب} = a\sqrt{۳}=۱\times\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

راه دوم: مسلماً حجم مکعب ایجاد شده با حجم منشور برابر است.

$$a^{۳}=\frac{۱}{۲}(۱)(۲)(۱)\Rightarrow a^{۳}=۱\Rightarrow a=۱$$

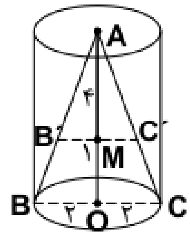
$$\text{قطر مکعب} = a\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

۲۳. گزینه ۴ مراحل ایجاد شکل حاصل

$$S_{\text{کل}} = \text{مساحت سطح جانبی نیم استوانه ای} + \text{مساحت قسمت مستطیلی} + \text{مساحت نیم دایره های بالایی و پایینی}$$

$$=۲\times(\frac{۴\times۴\times\pi}{۲})+۸\times۱۰+\frac{۱}{۲}\times۲\pi\times۴\times۱۰=۱۶\pi+۸۰+۴۰\pi=۵۶\pi+۸۰$$

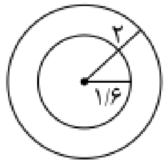
۲۴. گزینه ۱



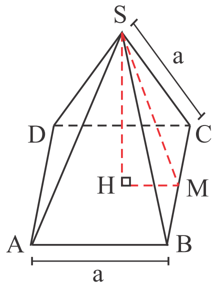
$$\frac{MB'}{OB}=\frac{AM}{AO}\Rightarrow\frac{MB'}{۲}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow MB'=۱٫۶$$

اگر صفحه ای به موازات قاعده و به فاصله ی ۱ واحد از آن را با استوانه ی قائم تقاطع دهیم، مقطع حاصل دایره ای به مرکز M و به شعاع ۲ است و اگر همان صفحه را با مخروط داخلی تقاطع دهیم. مقطع حاصل دایره ای به مرکز M و شعاع $MB' = MC' = ۱٫۶$ است. در نتیجه وقتی مخروط را از داخل استوانه درمی آوریم. مقطع حاصل از تقاطع با صفحه ی فوق الذکر به صورت مقابل است و داریم:

$$\text{مساحت مقطع} = \pi(۲^۲) - \pi(۱٫۶)^۲ = (۴ - ۲٫۵۶)\pi = ۱٫۴۴\pi$$



۲۵. گزینه ۱ با توجه به شکل و فرض تست داریم:



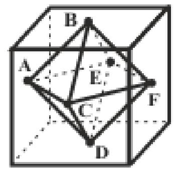
$$\text{سطح کل هرم} = ۴S_{\overset{\Delta}{SBC}} + S_{ABCD} = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ + a^۲ = a^۲\left(۱+\sqrt{۳}\right)$$

$$\xlongequal{\text{طبق فرض}} ۱۸\left(۱+\sqrt{۳}\right) \Rightarrow a^۲ = ۱۸ \Rightarrow a = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲} \quad (\text{رابطه}۱)$$

$$HM = \frac{a}{۲}\ ,\ SM = \overset{\Delta}{SBC}\ \text{ارتفاع} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow SH = \sqrt{SM^۲ - HM^۲} = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

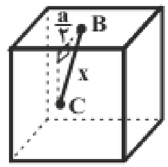
$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}S_{ABCD} \times SH = \frac{۱}{۳} \times a^۲ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}a = \frac{\sqrt{۲}}{۶}a^۳ \overset{(۱)}{=} ۱۸$$

۲۶. گزینه ۱ همان طور که در شکل ملاحظه می کنید، دو هرم $ABCDE$ و $FBCDE$ از قاعده به هم چسبیده اند و یک ۸ وجهی منتظم را به وجود آورده اند که اندازه ی ارتفاع وارد بر قاعده ی $BCDE$ در هر کدام از این هرم ها نصف طول ضلع مکعب یعنی $\frac{a}{۲}$ است. اما برای پیدا کردن حجم هرم باید مساحت قاعده را نیز پیدا کنیم که با توجه به شکل زیر، هر یک از اضلاع مربع قاعده با استفاده از رابطه ی فیثاغورس به دست می آید:



$$x^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

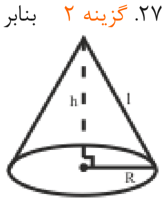
و چون هشت وجهی ایجاد شده منتظم است پس همه ی یال های آن با هم برابرند، در نتیجه:



$$\text{حجم هشت وجهی} = ۲V_{ABCDE} = ۲\left(\frac{۱}{۳}Sh\right) = \frac{۲}{۳}\left(x^۲\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{۲}{۳}\left(\frac{a^۲}{۲}\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = \frac{a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{هشت وجهی}}}{V_{\text{مکعب}}} = \frac{۱}{۶}$$

۲۷. گزینه ۲ بنابر فرض تست داریم:

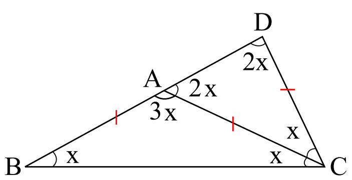


$$\text{حجم کره} = \sqrt{۲}\ (\text{حجم مخروط}) \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \sqrt{۲} \times \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow h = ۲\sqrt{۲}R$$

$$L = \sqrt{R^۲ + h^۲} = \sqrt{R^۲ + ۸R^۲} = ۳R \Rightarrow \frac{L}{R} = ۳$$

۲۸. گزینه ۳

اگر زاویه‌ی $A\hat{B}C$ را برابر x در نظر بگیریم آنگاه چون مثلث‌های ABC و BDC و ADC متساوی‌الساقین هستند شکل مقابل را خواهیم داشت.

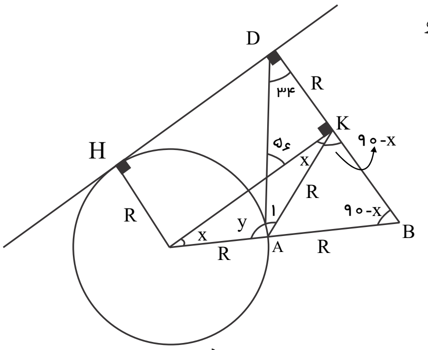


$\overset{\Delta}{ABC}: ۳x+x+x=۱۸۰ \Rightarrow ۵x=۱۸۰ \Rightarrow x=۳۶^\circ$

$\hat{A}=۳x=۳\times ۳۶=۱۰۸$

۲۹. گزینه ۳

بعد از رسم شکل عمود OK را بر BD رسم می‌کنیم. در این صورت $OHDK$ مستطیل و مثلث OBK قائم‌الزاویه است و AK میانه وارد بر وتر است بنابراین مثلث‌های OAK و AKB و AKD متساوی‌الساقین هستند باتوجه به شکل داریم.

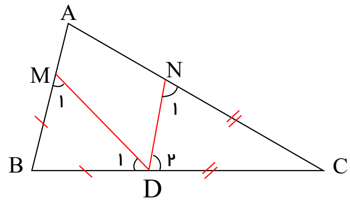


$$\left.\begin{array}{l} x+y+۵۶=۱۸۰ \\ y+۲x+۳۴=۱۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x+۳۴-۵۶=۰$$

$$\Rightarrow x=۲۲$$

$$x+y+۵۶=۱۸۰ \xrightarrow{x=۲۲} y=۱۰۲$$

۳۰. گزینه ۳

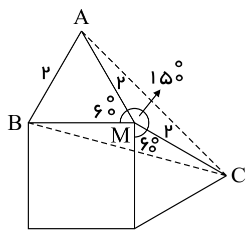


$$\hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\hat{D}_۱ \quad , \quad \hat{C}=۱۸۰-۲\hat{D}_۲$$

$$\hat{A}=۵۸^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=۱۸۰-۵۸=۱۲۲^\circ \Rightarrow (۱۸۰-۲D_۱)+(۱۸۰-۲D_۲)=۱۲۲^\circ$$

$$D_۱+D_۲=۱۱۹^\circ \Rightarrow M\hat{D}N=۱۸۰-۱۱۹ \Rightarrow M\hat{D}N=۶۱^\circ$$

۳۱. گزینه ۳



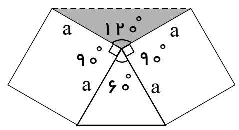
$$S_{\overset{\Delta}{AMC}}=S_{\overset{\Delta}{BMC}}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۱۵۰=۱$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABM}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times ۴=\sqrt{۳}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABM}}+۲S_{\overset{\Delta}{AMC}}=\sqrt{۳}+۲$$

۳۲. گزینه ۳

اگر طول ضلع متساوی الاضلاع را a در نظر بگیریم، آن‌گاه با توجه به فرض و شکل مقابل داریم:



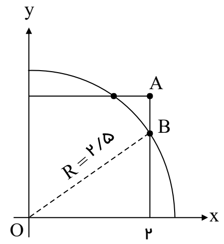
$$S_{\text{هاشور}}=\frac{۱}{۲}a^۲\sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

$$S_{\text{مثلث اصلی}}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\text{سایه زده شده}}=\frac{a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}}{a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}}=۱$$

۳۳. گزینه ۲

راس O را بر روی مبدا مختصات می گذاریم:



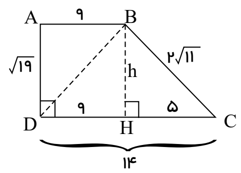
معادله‌ی دایره به صورت $x^{۲}+y^{۲}=\frac{۲۵}{۴}$ است. برای یافتن مختصات نقطه‌ی B کافی است در معادله‌ی دایره، $x=۲$ قرار دهیم:

$$۴+y^{۲}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow y^{۲}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \boxed{y=\frac{۳}{۲}}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A از B برابر اختلاف عرض‌هایشان است.

$$AB=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۳۴. گزینه ۳



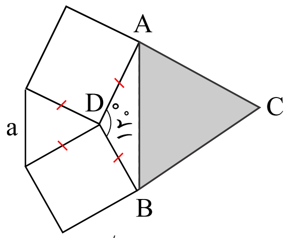
$$DH=AB=۹\Rightarrow HC=۵$$
$$h^{۲}=(۲\sqrt{۱۱})^{۲}-۵^{۲}\Rightarrow h^{۲}=۴۴-۲۵=۱۹\Rightarrow h=\sqrt{۱۹}$$
$$BD^{۲}=۹^{۲}+(\sqrt{۱۹})^{۲}=۸۱+۱۹=۱۰۰\Rightarrow BD=۱۰$$

۳۵. گزینه ۳

اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع اولیه را a در نظر بگیریم، آن گاه در مثلث متساوی‌الساقین DAB $(DA=DB=a)$ با زاویه‌ی رأس ۱۲۰° طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$AB^{۲}=a^{۲}+a^{۲}-۲(a)(a)\cos ۱۲۰^\circ=۳a^{۲}\Rightarrow AB=a\sqrt{۳}$$

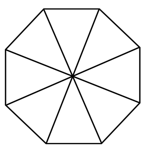
نسبت مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع سایه زده شده ABC به مساحت مثلث اصلی برابر است با:



$$\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a\sqrt{۳})^{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}=۳$$

۳۶. گزینه ۱

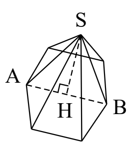
اگر قطرهای بزرگ این هشت‌ضلعی منتظم را رسم کنیم، ۸ مثلث متساوی‌الساقین همنهشت به طول ساق r (شعاع دایره) و زاویه‌ی رأس $۴۵^\circ=\frac{۳۶۰^\circ}{۸}$ پدید می‌آید، پس:



$$S_{\text{هشت ضلعی}}=۸\times S_{\text{مثلث}}=۸\times\frac{۱}{۲}\times r\times r\times\sin ۴۵^\circ=۸\times\frac{۱}{۲}\times۲\times۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۸\sqrt{۲}$$

۳۷. گزینه ۴

مطابق شکل، از رأس هرم (نقطه ی S) بر مرکز شش ضلعی منتظم، عمود SH را وارد می کنیم. نقطه ی H وسط قطر بزرگ AB قرار دارد. با توجه به فرض، طول ضلع شش ضلعی برابر $a=۱$ است، پس:



$$AB=۲a=۲\Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AB=۱$$

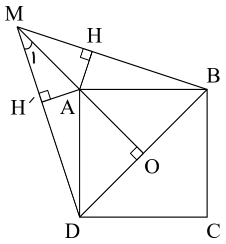
در $\overset{\Delta}{SAH}$ فیثاغورس : $SH=\sqrt{SA^۲-AH^۲}=\sqrt{۴-۱}=\sqrt{۳}$

حجم این هرم برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\times SH\times \text{مساحت شش ضلعی}=\frac{۱}{۳}(\sqrt{۳})(\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲)\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times\sqrt{۳}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a، اندازه‌ی قطر بزرگ برابر $۲a$ و قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ می‌باشد.

۳۸. گزینه ۲ در شکل AH یا AH' مورد سؤال است.



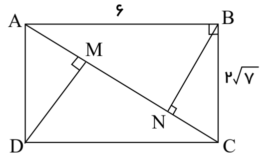
$$\text{ارتفاع مثلث}=MO=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۴\Rightarrow MO=۲\sqrt{۳}$$

$$MA=MO-OA=۲\sqrt{۳}-۲$$

در مثلث قائم الزاویه MAH' زاویه $M_۱$ برابر ۳۰ درجه است. پس ضلع روبه روی آن نصف وتر می‌باشد.

$$\hat{M}_۱=۳۰\Rightarrow AH'=\frac{۱}{۲}AM=\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}-۲)=\sqrt{۳}-۱$$

۳۹. گزینه ۱

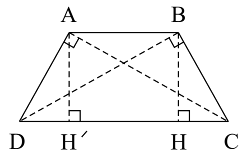


$$AC^۲=۶^۲+(۲\sqrt{۷})^۲=۳۶+۲۸=۶۴\Rightarrow AC=۸$$

$$BC^۲=CN\times AC\Rightarrow(۲\sqrt{۷})^۲=CN\times ۸\Rightarrow CN=\frac{۲۸}{۸}=\frac{۷}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{AMD}\cong\overset{\Delta}{BNC}\Rightarrow AM=CN=\frac{۷}{۲}\Rightarrow MN=AC-۲\times CN=۸-۲\times\frac{۷}{۲}=۱$$

۴۰. گزینه ۱ ارتفاع BH را رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{BCD}:BD=۸\,,\ DC=۱۰\Rightarrow \textbf{فیثاغورس}:BC=\sqrt{۱۰۰-۶۴}=۶$$

هم‌چنین در مثلث BCD ، داریم:

$$BC^۲=CH\times CD\Rightarrow CH=\frac{۶^۲}{۱۰}=۳/۶$$

چنان‌چه ارتفاع AH' را نیز رسم کنیم، آنگاه دو مثلث قائم الزاویه همنهشت هستند، داریم:

$$DH'=CH=۳/۶\Rightarrow AB=HH'=۱۰-۲\times ۳/۶=۲/۸$$

۴۱. گزینه ۳

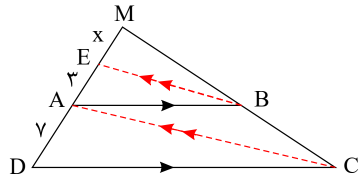
نکته: اندازه‌ی کوچکترین قطر ۶ ضلعی منتظم برابر $\sqrt{۳}a$ است.

نکته: نسبت مساحت‌های ۲ nضلعی منتظم برابر است با توان دوم نسبت اضلاع آنها.

$$a'=\sqrt{۳}a$$

$$\frac{S'}{S}=(\frac{a'}{a})^۲=(\frac{\sqrt{۳}a}{a})^۲=۳$$

۴۲. گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیه‌ی تالس استفاده کنیم:



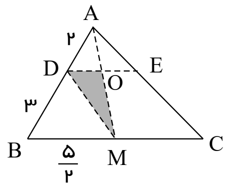
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{MAC} : BE \| AC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ \overset{\Delta}{MDC} : AB \| CD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{MA}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲٫۲۵$$

در نتیجه: $MD = ۲٫۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲٫۲۵$

۴۳. گزینه ۱ اگر بخواهیم در مسئله‌ای که نسبت داده شده و در حکم مسئله نیز نسبت خواسته شده می‌توانیم در یک حالت خاص با عدد گذاری مسئله را حل کنیم.

مثلث ABC متساوی الاضلاع است.



تالس: $\dfrac{DO}{BM} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow \dfrac{DO}{\frac{۵}{۲}} = \dfrac{۲}{۵} \Rightarrow DO = ۱$

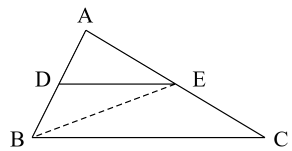
ارتفاع: $AM = \dfrac{۵}{۲}\sqrt{۳}$ $\qquad \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AO}{AM} \Rightarrow \dfrac{۲}{۵} = \dfrac{AO}{\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}} \Rightarrow AO = \sqrt{۳}$

$$S_{\overset{\Delta}{ODM}} = \frac{۱}{۲} \times OD \times OM = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \left(\frac{۵}{۲}\sqrt{۳} - \sqrt{۳}\right) = \frac{۳}{۴}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a^{۲} = \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\frac{S_{ODM}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۳}{۴}\sqrt{۳}}{\frac{۲۵}{۴}\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲۵} \times ۱۰۰ = \%۱۲$$

۴۴. گزینه ۲ در دو مثلث با ارتفاع های یکسان نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.



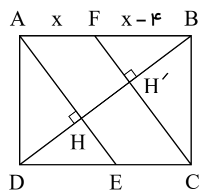
$$\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}} = \frac{EC}{AE} = \frac{BD}{AD} = \frac{۵}{۴}$$

$$\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}} = \frac{BD}{AB} = \frac{۵}{۹}$$

دو رابطه‌ی فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{S_{EBC}}{S_{AEB}}}{\frac{S_{EBD}}{S_{AEB}}} = \frac{\frac{۵}{۴}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{۹}{۴} = ۲٫۲۵$$

۴۵. گزینه ۱



$$\overset{\Delta}{ABD} : AB^{۲} + AD^{۲} = BD^{۲} \to ۴^{۲} + ۳^{۲} = BD^{۲} \to BD = ۵$$

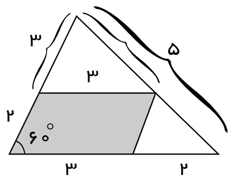
$$\overset{\Delta}{ABD} : AD^{۲} = DH \times BD \to ۹ = DH \times ۵ \to \begin{cases} DH = \dfrac{۹}{۵} \\ BH' = \dfrac{۹}{۵} \end{cases}$$

$$\to HH' = BD - DH - BH' = ۵ - \frac{۹}{۵} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : FH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BH'}{BH} \to \frac{۴-x}{۴} = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۹}{۱۶} \to ۱۶ - ۴x = ۹ \to x = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{AFCE} = AD \times AF = ۳ \times x = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵٫۲۵$$

۴۶. گزینه ۴ در حالت خاص مثلث را متساوی‌الاضلاع فرض می‌کنیم:



$$\frac{S_{\text{متوازی الاضلاع}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{۳ \times ۲ \times \cancel{\sin ۶۰^\circ}}{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵ \times \cancel{\sin ۶۰^\circ}} = \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۴۸}{۱۰۰}$$

۴۷. گزینه ۳

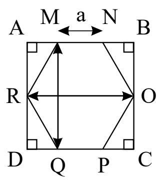
دو مثلث DEC , ADE دارای ارتفاع یکسان از رأس D می‌باشند. اگر ارتفاع رسم شده از D برابر h باشد داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{DEC} = \frac{EC \cdot h}{۲} \\ S_{ADE} = \frac{AE \cdot h}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{DEC}}{S_{ADE}} = \frac{EC}{AE} = \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{۸}{۵} \quad (I)$$

چون $BC \| DE$ پس دو مثلث ABC و ADE متشابهند و نسبت تشابه آنها $\frac{۵}{۸}$ است.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AC}{AE}\right)^۲ = \frac{۶۴}{۲۵} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{BDEC}}{S_{ADE}} = \frac{۳۹}{۲۵} = ۱٫۵۶$$

۴۸. گزینه ۴



طول ضلع شش ضلعی را a در نظر می‌گیریم. همان‌طور که می‌بینید، طول اضلاع مستطیل با طول قطرهای بزرگ و کوچک شش ضلعی برابر هستند، پس:

$$AB = RO = ۲a \,,\ AD = MQ = a\sqrt{۳} \Rightarrow \text{محیط مستطیل} = ۲(AB + AD) = ۲a(۲ + \sqrt{۳})$$

نسبت محیط شش ضلعی به محیط مستطیل برابر است با:

$$\frac{۶a}{۲a(۲+\sqrt{۳})} = \frac{۳}{۲+\sqrt{۳}} \times \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} = \frac{۳(۲-\sqrt{۳})}{۴-۳} = ۳(۲-\sqrt{۳})$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a، اندازه‌ی قطر بزرگ برابر $۲a$ و قطر کوچک برابر $\sqrt{۳}a$ می‌باشد.

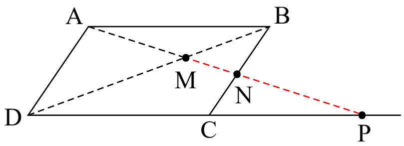
۴۹. گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} AM \| DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \| EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = ۱ \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}} \frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

۵۰. گزینه ۴

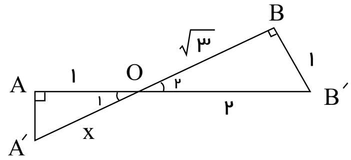
از قضیه تالس به صورت زیر استفاده می کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} BN \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{MN}{AM} = \dfrac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{BM}{MD} = \dfrac{AM}{MP} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

$$\Rightarrow AM^{۲} = MN \times MP$$

۵۱. گزینه ۲ ابتدا با رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی OB را بدست می آوریم.



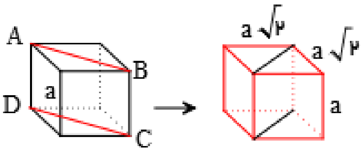
$$OB = \sqrt{۴ - ۱} = \sqrt{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOA'} \sim \overset{\Delta}{OBB'} \Rightarrow \overset{\Delta}{OBB'}$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'O}{OB'} = \frac{AO}{OB} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۵۲. گزینه ۲

اگر مکعب را از طریق صفحه قطری $ABCD$ به دو قسمت تقسیم کنیم و a ضلع مکعب باشد آنگاه $AB = CD = a\sqrt{۲}$ و این دو قسمت را از طریق وجه مربع به هم بچسبانیم آنگاه منشوری ایجاد می شود با دو وجه مربع شکل به ضلع a و دو وجه مستطیل شکل به ابعاد $a\sqrt{۲}, a$ و دو قاعده که با چهار مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه a, a ساخته شده است.

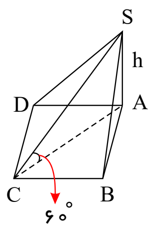


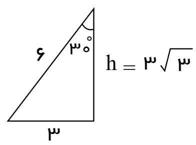
$$\text{مساحت کل} = ۲a^{۲} + ۲(a \times a\sqrt{۲}) + ۴(\frac{۱}{۲}a \times a) = ۴a^{۲} + ۲\sqrt{۲}a^{۲} = (۴ + ۲\sqrt{۲})a^{۲}$$

۵۳. گزینه ۲

مساحت قاعده $= \frac{۹}{۲} \Rightarrow$ **طول قطر مربع قاعده** $AC = ۳ \Rightarrow$ **نصف وتر = ضلع رو به زاویه** ۳۰°

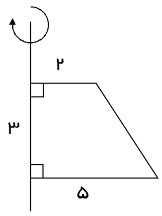
$$V = \frac{۱}{۳}h \times S = \frac{۱}{۳} \times ۳\sqrt{۳} \times \frac{۹}{۲} = ۴/۵\sqrt{۳}$$



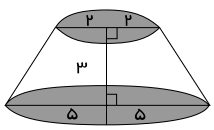


۵۴. گزینه ۳

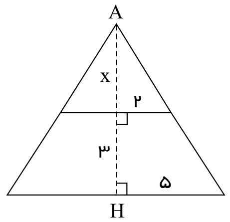
ابتدا شکل ذوزنقه را رسم می کنیم:



اگر این ذوزنقه را حول ساق قائم دوران دهیم یک مخروط ناقص به صورت زیر حاصل می‌شود.



ابتدا مخروط کامل را پیدا می کنیم:



برای این منظور دو ساق را امتداد می‌دهیم تا در راس A یکدیگر را ملاقات کنند.
با توجه به متشابه بودن مثلث کوچک با مثلث بزرگ:

$$\frac{x}{x+۳}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵x=۲x+۶\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow \boxed{x=۲}$$

حالا ابتدا حجم مخروط کامل را به دست می‌آوریم:

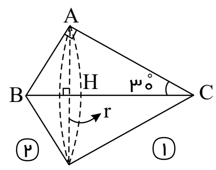
$$V_{\text{مخروط کامل}}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}\times AH=\frac{۱}{۳}\pi\times ۵^{۲}\times(۲+۳)=\frac{۱۲۵}{۳}\pi$$

سپس حجم مخروط کوچک بالایی را از کل کم می‌کنیم.

می‌دانیم مخروط کوچک با بزرگ متشابه است و نسبت تناسبشان $k=\frac{۲}{۵}$ است پس نسبت حجمشان $k^{۳}=\frac{۸}{۱۲۵}$ است. بنابراین $\frac{۸}{۱۲۵}$ از کل بریده می‌شود و $\frac{۱۱۷}{۱۲۵}$ آن باقی می‌ماند. پس حجم باقی مانده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{مخروط ناقص}}=\frac{۱۱۷}{\cancel{۱۲۵}}\times\frac{\cancel{۱۲۵}\pi}{۳}=\frac{۱۱۷\pi}{۳}=۳۹\pi$$

۵۵. گزینه ۲



$$BC=۸\ ,\ \hat{C}=۳۰^{\circ}\Rightarrow AB=۴\ ,\ AC=۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴\sqrt{۳}$$

$$AH=\frac{AB\times AC}{BC}=\frac{۴\times۴\sqrt{۳}}{۸}=۲\sqrt{۳}$$

از دوران این مثلث حول وتر آن دو مخروط با قاعدهٔ مشترک که دایره‌ای به شعاع AH می‌باشد، ایجاد می‌شود. داریم:

$$S_{\text{قاعده}}=\pi\times AH^{۲}=\pi\times(۲\sqrt{۳})^{۲}=۱۲\pi$$

$$\begin{cases}V_۱=\frac{۱}{۳}\times S_{\text{قاعده}}\times CH\\ V_۲=\frac{۱}{۳}\times S_{\text{قاعده}}\times BH\end{cases}\Rightarrow V_۱+V_۲=\frac{۱}{۳}\times S_{\text{قاعده}}\times(BH+CH)$$

$$\Rightarrow V_۱+V_۲=\frac{۱}{۳}\times S_{\text{قاعده}}\times BC=\frac{۱}{۳}\times ۱۲\pi\times ۸=۳۲\pi$$

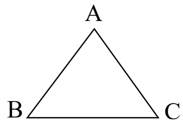
۵۶. گزینه ۱ چهاروجهی منتظم، هرمی است که با چهار مثلث متوازی الاضلاع ساخته شده است.اگر a یال چهاروجهی منتظم باشد، آن گاه ارتفاع آن برابر $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}a$ است. درضمن اگر از مرکز O به چهار رأس این هرم وصل کنیم چهار هرم که قاعده های آن ها مساوی و ارتفاع آن ها برابر شعاع کره (R) است ایجاد می شود.

$$\textbf{حجم چهاروجهی منتظم}=۴\times\textbf{حجم یک هرم به ارتفاع }(R)\Rightarrow \frac{۱}{۳}Sh=۴(\frac{۱}{۳}SR)\Rightarrow h=۴R$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}a=۴R\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}(۲\sqrt{۶})=۴R\Rightarrow R=۱$$

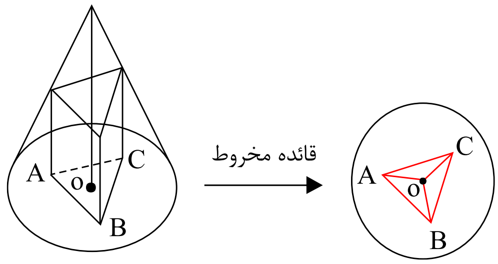
۵۷. گزینه ۳ نکته: قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه داریم:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos\hat{A}$



مطابق شکل، مرکز قاعده مثلث ABC از منشور قائم باید بر مرکز قاعده مخروط قائم منطبق باشد که در آن صورت داریم:

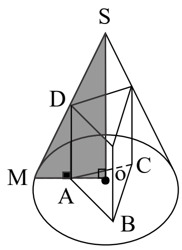
$O\overset{\Delta}{A}B: \begin{cases} \hat{O} = 120^\circ \\ OA = OB = x \\ AB = \sqrt{3} \end{cases}$



$\xrightarrow{\text{قضیه ی کسینوس ها}} (\sqrt{3})^2 = x^2 + x^2 - 2(x)(x)\cos 120^\circ = 3x^2 \Rightarrow x = 1$

پس مرکز قاعده (نقطه O) از سه رأس مثلث ABC به فاصله ۱ واحد است و در نتیجه با رسم ارتفاع مخروط (پاره‌خط SO) داریم:

$S\overset{\Delta}{O}M: \begin{cases} DA \parallel SO \\ DA = 2 \\ OA = 1,\ AM = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه ی تالس}} \frac{DA}{SO} = \frac{MA}{MO} \Rightarrow \frac{2}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SO = 3$



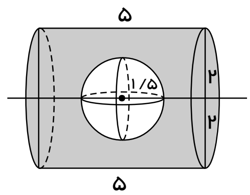
پس ارتفاع مخروط برابر $SO = h = 3$ است و در نتیجه حجم مخروط قائم مذکور برابر است با:

$V = \frac{1}{3}\pi t^2 h = \frac{1}{3}\pi(3^2)(3) = 9\pi$

۵۸. گزینه ۲ با دوران شکل داده شده حول خط Δ، شکل فضائی حاصل یک استوانه به شعاع ۲ و ارتفاع ۵ بوده که از درون آن کره‌ای به شعاع ۱٫۵ حذف شده است. داریم:

$V_{\text{حاصل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi \times 2^2 \times 5 - \frac{4}{3}\pi \times (\frac{3}{2})^3 = 20\pi - \frac{9}{2}\pi = \frac{31}{2}\pi$

یاد آوری: $\begin{cases} V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h \\ V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$



۵۹. گزینه ۴ اولاً شعاع دایره محاطی مثلث متساوی الاضلاع از رابطه زیر به دست می‌آید.

$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

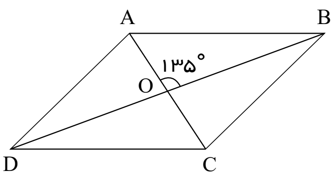
از طرفی ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع از رابطه $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ به دست می‌آید.

از دوران گفته شده یک مخروط ایجاد می‌شود که یک کره از آن حذف شده است.

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$$
$$=\frac{(2\sqrt{3})^3\sqrt{3}}{24}=\frac{9\times 8}{24}=3\pi$$

$$V_{\text{کره}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{6}{6}\right)^1=\frac{4}{3}\pi$$
$$?=3\pi-\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{4}$$

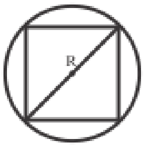
۶۰. گزینه ۲ می‌دانیم مساحت هر متوازی الاضلاع برابر نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها است. بنابراین داریم:



$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times AC\times BD\times\sin(A\hat{O}B)=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\frac{\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}$$

دقت کنید که $\sin 35^\circ=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۶۱. گزینه ۴ وقتی مکعب درون کره قرار می‌گیرد آنگاه قطر مکعب مساوی قطر کره است.



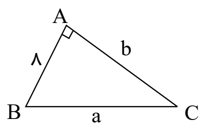
قطر کره = قطر مکعب $\Rightarrow a\sqrt{3}=2R$

$V_1=$ حجم مکعب

$V_2=$ حجم کره

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}=\frac{a^3}{\frac{4}{3}\pi\times\frac{a^3\times 3\sqrt{3}}{8}}=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$$

۶۲. گزینه ۳



$AB=8\ ,\ r=3$

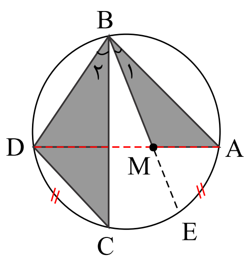
در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$r=p-a\Rightarrow 3=\frac{a+b+8}{2}-a$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6=a+b+8-2a\Rightarrow a-b=2\\ \text{فیثاغورث}:\ a^2-b^2=64\Rightarrow\underbrace{(a-b)}_{2}(a+b)=64\Rightarrow a+b=32\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=2\\a+b=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=17\\b=15\end{cases}$$

۶۳. گزینه ۲ با رسم پاره‌خط BD، نتیجه می‌گیریم که دو مثلث BDC و ABM متشابه‌اند، زیرا:



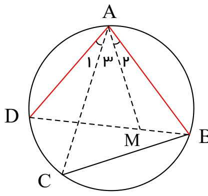
$$\begin{cases}\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{AE}}{2}\ ,\ \hat{B}_2=\frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\xrightarrow{\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}}\hat{B}_1=\hat{B}_2\xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}}B\overset{\Delta}{D}C\sim A\overset{\Delta}{B}M\\ \hat{C}=\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{CD}\Rightarrow\frac{6}{8}=\frac{AM}{3}\Rightarrow AM=\frac{9}{4}=2/25$$

۶۴. گزینه ۱

چون $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ ، پس $\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۳ = \widehat{A}_۲ + \widehat{A}_۳$ ؛ و در نتیجه، $C\widehat{A}B = M\widehat{A}D$.

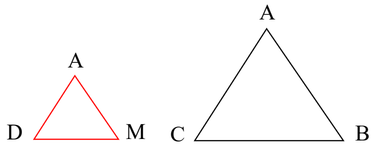
هم چنین:



$$A\widehat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = A\widehat{D}M$$

بنابراین، دو مثلث ACB و ADM بنابر سه زاویه با هم متشابه‌اند. در نتیجه:

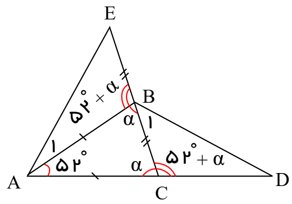
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot DM$$



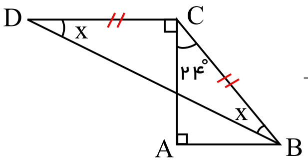
۶۵. گزینه ۴ دو مثلث BCD, ABE طبق برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم برابرند. پس $\hat{A}_۱ = \hat{D}, \hat{E} = \hat{B}_۱$ می‌باشد. حال داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A} = ۵۲^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۵۲^\circ = ۱۲۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۴^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} + \hat{E} = \hat{D} + \hat{B}_۱ = A\hat{C}B = \alpha = ۶۴^\circ$$

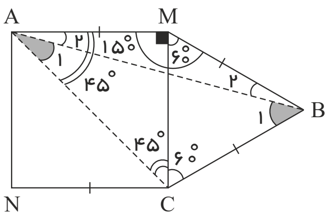


۶۶. گزینه ۱ مثلث BDC متساوی‌الساقین است فرض کنیم $D\hat{B}C$ برابر x باشد در این صورت داریم:



$$\longrightarrow \overset{\Delta}{ABD}: ۲\hat{x} + ۹۰^\circ + ۲۴^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{x} = ۶۶^\circ \Rightarrow \hat{x} = ۳۳^\circ$$

۶۷. گزینه ۲ چون مثلث ABM متساوی‌الساقین است $(AM = BM)$ پس $\hat{A}_۲ = \hat{B}_۲$ است.



$$\rightarrow \hat{M} = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

قطر مربع زاویه را نصف می‌کند. پس:

$$\hat{A}_۱ = ۴۵^\circ - \hat{A}_۲ = ۴۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$$

$$\hat{B}_۱ = ۶۰^\circ - \hat{B}_۲ = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ = ۴۵^\circ$$

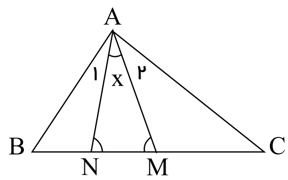
$$\hat{C} = ۶۰^\circ + ۴۵^\circ = ۱۰۵^\circ$$

در مثلث ABC: $\dfrac{\text{بزرگ‌ترین زاویه}}{\text{کوچک‌ترین زاویه}} = \dfrac{\hat{C}}{\hat{A}_۱} = \dfrac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ} = \dfrac{۷}{۲}$

۶۸. گزینه ۱ مثلث ANC متساوی‌الساقین است پس $\hat{N} = \hat{x} + \hat{A}_۲$ و مثلث BAM نیز متساوی‌الساقین است پس $\hat{M} = \hat{x} + \hat{A}_۱$ می باشد.

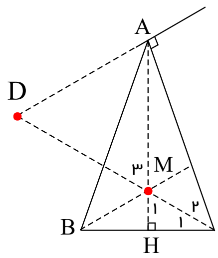
$$\overset{\Delta}{AMN}: \hat{x} + \hat{M} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{x} + (\hat{x} + \hat{A}_۲) + (\hat{x} + \hat{A}_۱) = ۱۸۰^\circ$$

$$\rightarrow ۲\hat{x} + \underbrace{(\hat{x} + \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲)}_{۷۲^\circ} = ۱۸۰^\circ \rightarrow ۲\hat{x} = ۱۰۸^\circ \rightarrow \hat{x} = M\hat{A}N = ۵۴^\circ$$



۶۹. گزینه ۱

در مثلث متساوی الساقین ABC ارتفاع AH نیمساز نیز می باشد. داریم:



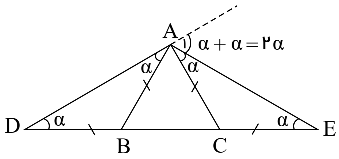
$$\overset{\Delta}{MHC}: \hat{M}_1+\hat{C}_1=90^\circ \rightarrow \hat{M}_1=90^\circ-\hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{C}_1=\hat{C}_2} \hat{M}_1=90^\circ-\hat{C}_1 \quad (I)$$ قائم‌الزاویه است

$$\overset{\Delta}{DAC}: \hat{D}+\hat{C}_2=90^\circ \Rightarrow \hat{D}=90^\circ-\hat{C}_2 \xrightarrow{\hat{C}_1=\hat{C}_2} \hat{D}=90^\circ-\hat{C}_1 \quad (II)$$ قائم‌الزاویه است

$I,II \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{D} \xrightarrow{\hat{M}_1=\hat{M}_3} \hat{D}=\hat{M}_3 \rightarrow$ بنابراین مثلث AMD متساوی‌الساقین است و $AD=AM$ است.

۷۰. گزینه ۳

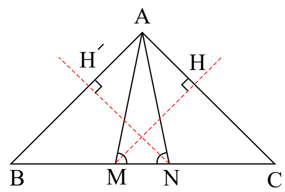
دو مثلث ABD و ACE با توجه به برابری دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها، با هم برابر هستند. از برابری آن‌ها نتیجه می گیریم که $AD=AE$ می‌باشد. پس مثلث ADE، یک مثلث متساوی‌الساقین بوده و زوایای نظیر قاعده‌اش یعنی زوایای D و E با هم برابر می‌باشند.



دقت کنید کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی، $\hat{D}$ یا $\hat{E}$ هستند (با هم برابرند) و کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، $\hat{A}_1$ است (در مثلث ADE) که برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش است.

$$\frac{\text{کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی}}{\text{کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی}}=\frac{2\alpha}{\alpha}=2$$

۷۱. گزینه ۲ با توجه به اینکه هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است، می توان دریافت که مثلث های AMC و ANB متساوی الساقین هستند.بنابراین داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2} \xrightarrow{\hat{A}=80} \hat{B}=\hat{C}=50^\circ$$

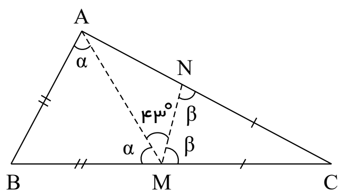
$$\overset{\Delta}{AMC}: AM=MC \Rightarrow \widehat{MAC}=\hat{C}=50^\circ \Rightarrow \hat{M}_1=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$$

$$\overset{\Delta}{ANB}: AN=BN \Rightarrow \widehat{BAN}=\hat{B}=50^\circ \Rightarrow \hat{N}_1=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$$

با توجه به روابط فوق در مثلث MAN خواهیم داشت:

$$\overset{\Delta}{MAN}: \widehat{MAN}+\hat{N}_1+\hat{M}_1=180^\circ \Rightarrow \widehat{MAN}+80^\circ+80^\circ=180^\circ \Rightarrow \widehat{MAN}=20^\circ$$

۷۲. گزینه ۲



$$\rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}+43^\circ=180^\circ \rightarrow \hat{\alpha}+\hat{\beta}=137^\circ$$

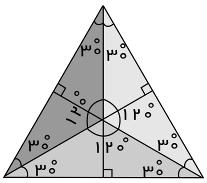
$$\hat{B}+\hat{\alpha}+\hat{\alpha}=180^\circ \rightarrow 2\hat{\alpha}=180^\circ-\hat{B} \rightarrow \hat{\alpha}=90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}$$

$$\hat{C}+\hat{\beta}+\hat{\beta}=180^\circ \rightarrow 2\hat{\beta}=180^\circ-\hat{C} \rightarrow \hat{\beta}=90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}$$

از طرفی: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=137^\circ \rightarrow 90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}+90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}=137^\circ \rightarrow \frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=43^\circ \rightarrow \hat{B}+\hat{C}=86^\circ$

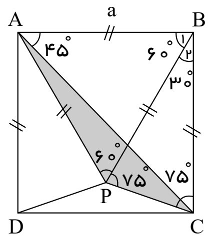
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \to \hat{A}+۸۶^\circ=۱۸۰ \to \hat{A}=۹۴^\circ$

۷۳. گزینه ۴ برای این که یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به سه مثلث هم‌نهشت (متساوی) تقسیم کنیم، باید از محل همرسی میانه‌ها (مرکز ثقل) که همان محل همرسی نیمسازها، عمودمنصف‌ها و ارتفاع ها می‌باشد. سه خط به سه رأس این مثلث وصل کنیم. زوایای داخلی این سه مثلث هم‌نهشت برابر ۳۰° ، ۳۰° و ۱۲۰° است.



۷۴. گزینه ۴

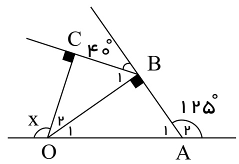
مثلث متساوی‌الاضلاع را درون مربع طوری قرار می‌دهیم که در یک ضلع مشترک باشند و داریم:



$P\hat{A}B=A\hat{P}B=\hat{B}_۱=۶۰^\circ \to \begin{cases} \hat{B}_۲=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ \\ P\hat{A}C=۶۰^\circ-۴۵^\circ=۱۵^\circ \text{ (زاویه‌ی کوچک‌تر)} \end{cases}$

توجه کنید مثلث BCP به دلیل آنکه $BP=BC$ است متساوی‌الساقین است و در نتیجه زوایای مجاور قاعده‌ی این مثلث با هم برابر هستند و هر کدام $۷۵^\circ=\dfrac{۱۸۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}$ می‌باشند. پس اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{P}C$ برابر $۱۳۵^\circ=۶۰^\circ+۷۵^\circ$ است. (زاویه‌ی بزرگ‌تر) بنابراین نسبت زاویه‌ی بزرگ‌تر به زاویه‌ی کوچک‌تر در مثلث APC برابر $۹=\dfrac{۱۳۵^\circ}{۱۵^\circ}$ است.

۷۵. گزینه ۱ برای پیدا کردن زاویه‌ی x باید اندازه‌ی زوایای $\hat{O}_۲,\hat{O}_۱$ را بدست آوریم.



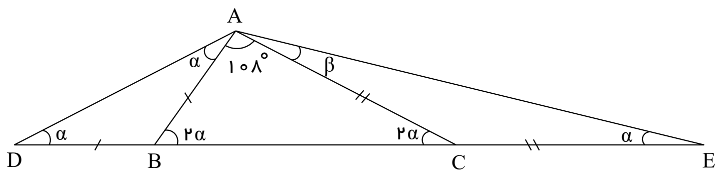
$\overset{\Delta}{OAB}$ زاویه‌ی خارجی مثلث $\hat{A}_۲=\hat{B}+\hat{O}_۱ \Rightarrow ۱۲۵^\circ=۹۰^\circ+\hat{O}_۱ \to \hat{O}_۱=۳۵^\circ$

$\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+۴۰^\circ)=۵۰^\circ$

$\overset{\Delta}{OBC}:\hat{O}_۲+\hat{B}_۱+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ \to \hat{O}_۲=۱۸۰^\circ-۹۰^\circ-۵۰^\circ=۴۰^\circ$

می‌دانیم: $\hat{x}+\hat{O}_۲+\hat{O}_۱=۱۸۰^\circ \to \hat{x}+۴۰^\circ+۳۵^\circ=۱۸۰^\circ \to \hat{x}=۱۰۵^\circ$

۷۶. گزینه ۳



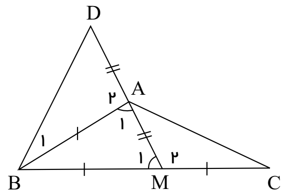
$\overset{\Delta}{ABC}:\ ۲\hat{\alpha}+۲\hat{\beta}+۱۰۸^\circ=۱۸۰^\circ \to \hat{\alpha}+\hat{\beta}=۳۶^\circ$

$\hat{A}=۱۰۸+\hat{\alpha}+\hat{\beta}=۱۴۴^\circ$

زاویه‌ی A بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث ADE است. پس زاویه‌ی خارجی آن کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی خواهد بود یعنی $۳۶^\circ=۱۴۴^\circ-۱۰۸^\circ$ است.

۷۷. گزینه ۳

با توجه به شکل داریم:



$$AB = BM \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{M}_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = MC \\ AD = AM \\ \hat{A}_۲ = \hat{M}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{AMC} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{C}$$

طبق فرض: $\hat{D}+\hat{C} = ۶۱^{\circ} \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{D} = ۶۱^{\circ}$

زاویه‌ی خارجی مثلث ABD: $\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{D} = ۶۱^{\circ} \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۶۱^{\circ} \Rightarrow A\hat{B}C = ۱۸۰ - ۶۱ - ۶۱ = ۵۸$

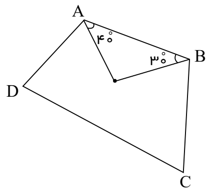
۷۸. گزینه ۳

$$\frac{A}{۴} = \frac{B}{۳} = \frac{C+D}{۱۱} = t \Rightarrow \begin{cases} A = ۴t \\ B = ۳t \\ C+D = ۱۱t \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم جمع زوایای داخلی هر ۴ ضلعی محدّب برابر ۳۶۰° است:

$$A+B+C+D = ۳۶۰ \Rightarrow ۴t+۳t+۱۱t = ۳۶۰ \Rightarrow ۱۸t = ۳۶۰ \Rightarrow t = ۲۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۴t = ۸۰^{\circ} \\ B = ۳t = ۶۰^{\circ} \end{cases}$$

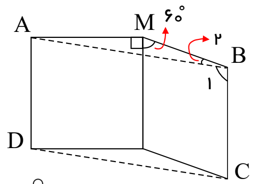
مطابق شکل واضح است زاویهٔ بین نیم‌سازهای رئوس B و C برابر $O = ۱۸۰ - (۴۰ - ۳۰) = ۱۱۰^{\circ}$ می‌باشد.



چون زاویهٔ حاده خواسته شده پس زاویهٔ حادهٔ O برابر $۱۸۰^{\circ} - ۱۱۰^{\circ} = ۷۰^{\circ}$ می‌باشد.

۷۹. گزینه ۲

چون مربع و لوزی با زاویه‌ی ۶۰° در یک ضلع مشترک هستند در نتیجه تمام اضلاع شکل با هم برابر بوده و در نتیجه مثلث MAB متساوی الساقین است پس داریم: $\hat{M} = ۶۰^{\circ} + ۹۰^{\circ} = ۱۵۰^{\circ}$



مثلث MAB متساوی‌الساقین $\rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^{\circ} - \hat{M}) \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۱۵^{\circ}$

چون یکی از زوایای لوزی ۶۰° است پس زاویه‌ی بزرگ‌تر لوزی ۱۲۰° است پس در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ زاویه‌ی بزرگ‌تر $۱۲۰^{\circ} - ۱۵^{\circ} = ۱۰۵^{\circ}$ است.

۸۰. گزینه ۱ در مثلث ABC با اضلاع a و b و c، ارتفاع وارد شده بر این اضلاع را به ترتیب h_a و h_b و h_c می‌نامیم.

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} a\, h_a \xrightarrow{a=۱۰} S = ۵\, h_a$$

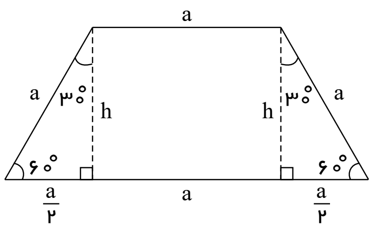
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} b\, h_b \xrightarrow{b=۱۵} S = \frac{۱۵}{۲} h_b$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} c\, h_c \longrightarrow S = \frac{c}{۲} h_c$$

از طرفی: $h_c = h_a + h_b \rightarrow \frac{۲S}{c} = \frac{S}{۵} + \frac{۲S}{۱۵} \rightarrow \frac{۲}{c} = \frac{۱}{۵} + \frac{۲}{۱۵} \rightarrow \frac{۲}{c} = \frac{۱}{۳} \rightarrow c = ۶$

۸۱. گزینه ۲

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است $(\frac{a}{۲})$.



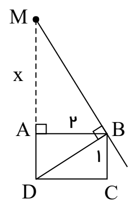
$$\text{محیط} = ۳۰ \to a+a+a+a+\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲} = ۳۰ \to ۵a = ۳۰ \to a = ۶$$

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{h}{a} \to \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{h}{۶} \to h = ۳\sqrt{۳}$$

قاعده‌ی کوچک ذوزنقه برابر ۶ و قاعده‌ی بزرگ آن برابر ۱۲ و ارتفاع آن $۳\sqrt{۳}$ است.

$$S = \frac{\text{ارتفاع}\ (\text{قاعده‌ی بزرگ} + \text{قاعده‌ی کوچک})}{۲} = \frac{(۶+۱۲)(۳\sqrt{۳})}{۲} = ۲۷\sqrt{۳}$$

۸۲. گزینه ۳



$$\overset{\Delta}{ABD}\ \text{فیثاغورس در}: BD^۲ = AD^۲ + AB^۲ \Rightarrow BD = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵} \quad (۱)$$

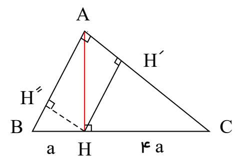
$$\overset{\Delta}{ABM}\ \text{فیثاغورس در}: BM^۲ = AB^۲ + AM^۲ \Rightarrow BM^۲ = ۴ + x^۲ \quad (۲)$$

$$\overset{\Delta}{BDM}\ \text{فیثاغورس در}: MD^۲ = BD^۲ + MB^۲ \xrightarrow{(۲),(۱)} (x+۱)^۲ = ۵+۴+x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۹ + x^۲ \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴$$

بنابراین فاصله‌ی نقطه‌ی M از سر دیگر این قطر، برابر $MD = ۱ + x = ۵$ می‌باشد.

۸۳. گزینه ۴ از فرض تست نتیجه می‌گیریم مساحت مثلث ABH مساوی $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث AHC است، پس $CH = ۴BH$ داریم:

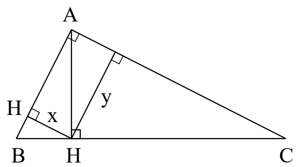


$$AH^۲ = a \times ۴a = ۴a^۲ \Rightarrow AH = ۲a$$

$$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \frac{AH}{HC} = \frac{۲a}{۴a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'} = \frac{۱}{۲}$$

۸۴. گزینه ۱

مساحت مثلث ABC را S و مساحت مثلث ABH را S' و مساحت مثلث ACH را S'' می‌نامیم.



$$\frac{S}{S'} = ۶/۷۶ \to \frac{S'+S''}{S'} = ۶/۷۶ \xrightarrow{\text{تفکیک}} ۱ + \frac{S''}{S'} = ۶/۷۶ \to \frac{S''}{S'} = ۵/۷۶$$

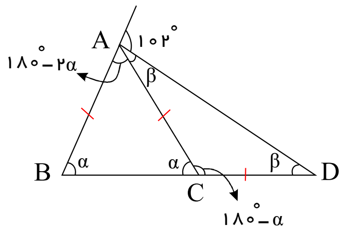
چون دو مثلث ABH و ACH متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت‌های آنها برابر مجذور نسبت تشابه است. لذا داریم:

$$\frac{S''}{S'} = ۵/۷۶ = k^۲ \to k = ۲/۴$$

طراح سوال نسبت ارتفاع‌های دو مثلث متشابه را خواسته است که همان برابر نسبت تشابه است.

$$\frac{y}{x} = ۲/۴ = \frac{۲۴}{۱۰} = \frac{۱۲}{۵} \longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{۵}{۱۲}$$

۸۵. گزینه ۴



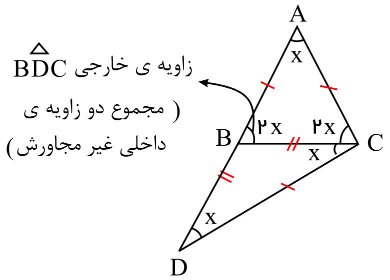
$$\overset{\Delta}{ACD}: \hat{\beta}+\hat{\beta}+۱۸۰^\circ-\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ \rightarrow \hat{\alpha}=۲\hat{\beta} \rightarrow \hat{\beta}=\frac{\hat{\alpha}}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{ABD}: A \text{ زاویه‌ی خارجی رأس } = \hat{B}+\hat{D} \rightarrow ۱۰۲^\circ=\hat{\alpha}+\hat{\beta} \rightarrow ۱۰۲^\circ=\hat{\alpha}+\frac{\hat{\alpha}}{۲}$$

$$\rightarrow ۱۰۲^\circ=\frac{۳\hat{\alpha}}{۲} \rightarrow ۳\hat{\alpha}=۲۰۴^\circ \rightarrow \hat{\alpha}=۶۸^\circ$$

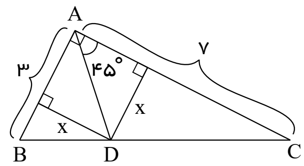
پس: $A \text{ زاویه‌ی رأس } = ۱۸۰^\circ-۲\hat{\alpha}=۱۸۰^\circ-۱۳۶^\circ=۴۴^\circ$

۸۶. گزینه ۴ از فرض تست شکل مقابل را خواهیم داشت فرض کنیم زاویه‌ی A برابر x باشد آنگاه زوایای دیگر بر حسب x به صورت مقابل خواهند بود.



$$\longrightarrow \overset{\Delta}{ABC}: \hat{x}+۲\hat{x}+۲\hat{x}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵\hat{x}=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۶^\circ$$

۸۷. گزینه ۴



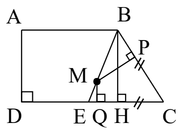
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{ABD}}+S_{\overset{\Delta}{ACD}}$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۷=\frac{۱}{۲}\times ۳\times x+\frac{۱}{۲}\times ۷\times x$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲۱=۳x+۷x \rightarrow ۱۰x=۲۱ \rightarrow x=\frac{۲۱}{۱۰}=۲/۱$$

AD قطر مربع است و می‌دانیم در یک مربع به ضلع a، قطر برابر $a\sqrt{۲}$ است. پس $AD=۲/۱\sqrt{۲}$ است.

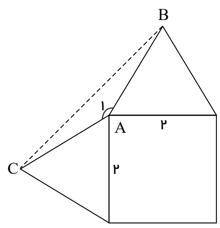
۸۸. گزینه ۴



مثلث CBE متساوی‌الساقین است. در هر مثلث متساوی الساقین فاصله‌ی یک نقطه روی قاعده از دو ساق همواره برابر با ارتفاع وارد بر ساق است. ارتفاع وارد بر ساق در مثلث CBE همان ارتفاع ذوزنقه است. چون ذوزنقه، قائم‌الزاویه می‌باشد، پس ارتفاع آن برابر با ضلع AD است. با توجه به این توضیح داریم:

$$MP+MQ=\text{ارتفاع وارد بر ساق}=BH=AD$$

۸۹. گزینه ۳

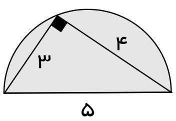


$$AB=AC=۲$$

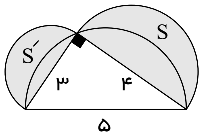
$$\hat{A}_۱=۳۶۰-(۹۰+۶۰+۶۰)=۳۶۰-(۲۱۰)$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin ۱۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \frac{۱}{۲}=۱$$

۹۰. گزینه ۲



$$\rightarrow S_{\text{نیم‌دایره به قطر } ۵}=\frac{۱}{۲}\pi R^۲=\frac{۱}{۲}\pi(\frac{۵}{۲})^۲=\frac{۲۵\pi}{۸}$$

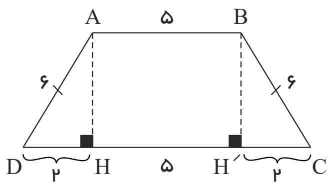


$$\rightarrow \begin{cases} S'_{\text{نیم‌دایره به قطر ۳}} = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹\pi}{۸} \\ S''_{\text{نیم‌دایره به قطر ۴}} = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{۴}{۲})^۲ = ۲\pi \end{cases}$$

$$S_{\text{سایه‌زده}} = \left(S'_{\text{نیم‌دایره به قطر ۳}} + S''_{\text{نیم‌دایره به قطر ۴}}\right) - \left(S_{\text{نیم‌دایره به قطر ۵}} - S'_{\text{مثلث قائم‌الزاویه}}\right)$$

$$= (\frac{۹\pi}{۸} + ۲\pi) - (\frac{۲۵\pi}{۸} - \frac{۳ \times ۴}{۲}) = ۶$$

۹۱. گزینه ۴



$$\rightarrow \overset{\Delta}{ADH} : AD^۲ = AH^۲ + DH^۲ \rightarrow ۳۶ = AH^۲ + ۴$$

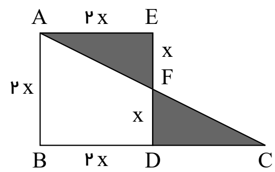
$$\rightarrow AH^۲ = ۳۲ \rightarrow AH = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{قاعده‌ی بزرگ} + \text{قاعده‌ی کوچک})}{۲} = \frac{(۵+۹)(۴\sqrt{۲})}{۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

۹۲. گزینه ۳ ضلع مربع را برابر با $۲x$ در نظر می‌گیریم. با توجه به همنهشتی دو مثلث AEF و CDF می‌توان گفت:

$EF = DF = x$

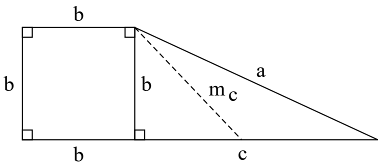
طبق روابط محاسبه ی مساحت ذوزنقه و مربع داریم:



$$\frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD(AB+DF)}{AB^۲} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲x)(۲x+x)}{(۲x)^۲} = \frac{۳x^۲}{۴x^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت ذوزنقه}}{\text{مساحت مربع}} = \frac{۳}{۴}$$

۹۳. گزینه ۱

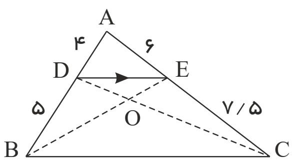


$$\rightarrow S_{\text{مثلث}} = S_{\text{مربع}} \rightarrow \frac{bc}{۲} = b^۲ \rightarrow b = \frac{c}{۲}$$

$$m_c{}^۲ = b^۲ + (\frac{c}{۲})^۲ \rightarrow m_c{}^۲ = \frac{c^۲}{۴} + \frac{c^۲}{۴} \rightarrow m_c{}^۲ = \frac{۱}{۲}c^۲ \rightarrow m_c = \frac{۱}{\sqrt{۲}}c = \frac{\sqrt{۲}}{۲}c$$

$$\text{پس} : \frac{m_c}{c} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}c}{c} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

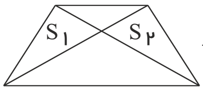
۹۴. گزینه ۴



$$\rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۵} \quad , \quad \frac{AE}{EC} = \frac{۶}{۷/۵} = \frac{۴}{۵}$$

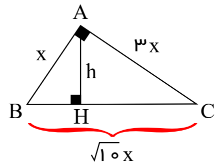
چون $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ است طبق عکس قضیه‌ی تالس نتیجه می‌گیریم که $BC \parallel DE$ است و چهارضلعی $BCED$ ذوزنقه است. از طرفی می‌دانیم در هر ذوزنقه با رسم دو قطر، دو مثلث هم مساحت به وجود می‌آید پس در ذوزنقه‌ی $BCED$ با رسم دو قطر BE و CD داریم:

$$\frac{SOBD}{SOCE} = ۱$$



$\rightarrow S_1 = S_2$

.۹۵ گزینه ۳



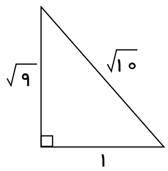
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2 \Rightarrow BC = \sqrt{10}\,x$$

$$S = 60 \Rightarrow \frac{x \times 3x}{2} = 60 \;\Rightarrow\; x^2 = 40 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{10}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{h \times BC}{2} \rightarrow 60 = \frac{h \times \sqrt{10}\,(2\sqrt{10})}{2} \rightarrow 120 = 20h \rightarrow h = 6$$

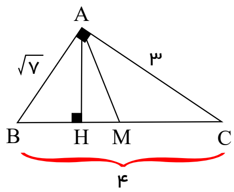
.۹۶ گزینه ۴ اندازه‌ی وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویه طبق قضیه‌ی فیثاغورس برابر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \cdots$ است.

بنابراین وتر مثلث نهم برابر $\sqrt{10}$ است و شکل آن بدین صورت است.



$$\rightarrow S_{\text{نهمین مثلث}} = \frac{\sqrt{9} \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

.۹۷ گزینه ۱



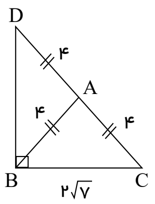
$$\rightarrow \overset{\Delta}{ABC} : BC^2 = AB^2 + AC^2 \rightarrow BC^2 = 7 + 9 = 16 \rightarrow BC = 4$$

$$\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{AH \times 4}{2} = 2AH \\[2ex] S_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2} \end{cases} \rightarrow 2 \times AH = \frac{3\sqrt{7}}{2} \rightarrow AH = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است پس $AM = \frac{4}{2} = 2$ است.

$$\overset{\Delta}{AHM} : AM^2 = AH^2 + HM^2 \rightarrow 4 = \frac{9 \times 7}{16} + HM^2 \rightarrow HM^2 = 4 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow HM = \frac{1}{4}$$

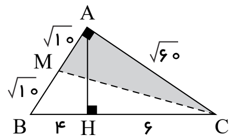
.۹۸ گزینه ۳ چون در شکل مقابل AB میانه‌ی وارد بر ضلع CD می باشد و اندازه ی میانه، نصف این ضلع است، نتیجه می‌گیریم که مثلث BCD در رأس B قائم است.



حال برای محاسبه‌ی اندازه‌ی ضلع BD طبق رابطه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow 8^2 = (2\sqrt{7})^2 + BD^2 \Rightarrow BD^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow BD = 6$$

۹۹. گزینه ۳
در ابتدا طول اضلاع قائمه را در مثلث ABC به‌دست می‌آوریم.



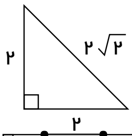
$$AB^{۲} = BH \cdot BC = ۴ \times ۱۰ = ۴۰ \to AB = \sqrt{۴۰} \to ۲\sqrt{۱۰} \to AM = \frac{AB}{۲} = \sqrt{۱۰}$$

$$AC^{۲} = CH \cdot BC = ۶ \times ۱۰ = ۶۰ \to AC = \sqrt{۶۰}$$

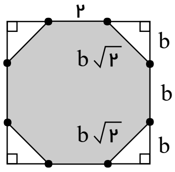
میانه‌ی وارد بر کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین میانه است، پس باید طول میانه‌ی CM را به‌دست آوریم.

$$CM^{۲} = AM^{۲} + AC^{۲} \to CM^{۲} = ۱۰ + ۶۰ = ۷۰ \Rightarrow\to CM = \sqrt{۷۰}$$

۱۰۰. گزینه ۴



$$\to \text{ضلع مربع} = x = ۲ + ۲ + ۲\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲}$$



$$\to ۲b + b\sqrt{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲} \to b = ۲$$

مساحت هشت ضلعی منتظم برابر است با مساحت مربع، منهای مساحت ۴ مثلث.

$$S = x^{۲} - ۴(\frac{b \times b}{۲}) = (۴ + ۲\sqrt{۲})^{۲} - ۲b^{۲} = ۱۶ + ۸ + ۱۶\sqrt{۲} - ۸ = ۱۶ + ۱۶\sqrt{۲}$$

۱۰۱. گزینه ۲ یک شش ضلعی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ساخته شده است. بنابراین مساحت آن برابر $۶(\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴})$ است (مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است).

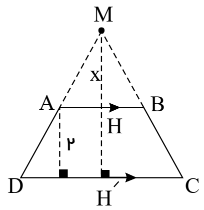
$$۶(\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}) = ۹\sqrt{۳} \to \frac{۳}{۲}a^{۲} = ۹ \to ۳a^{۲} = ۱۸ \to a^{۲} = ۶ \to a = \sqrt{۶}$$

طول کوچکترین قطر در یک شش ضلعی منتظم برابر $a\sqrt{۳}$ است.

$$a\sqrt{۳} = \sqrt{۶} \cdot \sqrt{۳} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

۱۰۲. گزینه ۲ در مثلث MCD با توجه به این مطلب که AB و CD موازی هستند، طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MH}{MH'} \to \frac{۶}{۹} = \frac{x}{x+۲} \to ۹x = ۶x + ۱۲ \to ۳x = ۱۲ \to x = ۴$$

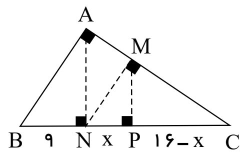


بنابراین فاصله‌ی M از قاعده‌ی بزرگ‌تر برابر $MH' = ۴ + ۲ = ۶$ است.

۱۰۳. گزینه ۳ MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می‌باشند.

$$\overset{\Delta}{ABC} : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NP} = \frac{۱۶}{۹} \quad (I)$$

$$\overset{\Delta}{ACN} : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{۱۶-x}{x} \quad (II)$$



$$I,II \xrightarrow{\text{نسبت } \frac{CM}{MA} \text{ در هر دو تناسب وجود دارد}} \frac{۱۶}{۹} = \frac{۱۶-x}{x} \to ۱۶x = ۱۴۴ - ۹x \to ۲۵x = ۱۴۴$$

$$\to x = \frac{۱۴۴}{۲۵} = \frac{۵۷۶}{۱۰۰} = ۵/۷۶$$

۱۰۴. گزینه ۲

چون دو مثلث قابل انطباق نمی‌باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی‌توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم $a > b$ است یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

$$\frac{۳}{۴} = \frac{a}{۵} = \frac{b}{۳} \to a = \frac{۱۵}{۴}, b = \frac{۹}{۴} \to \text{محیط} = ۳ + \frac{۹}{۴} + \frac{۱۵}{۴} = ۹$$

$$\frac{۳}{۵} = \frac{a}{۴} = \frac{b}{۳} \to a = \frac{۱۲}{۵}, b = \frac{۹}{۵} \to \text{محیط} = ۳ + \frac{۱۲}{۵} + \frac{۹}{۵} = ۷/۲$$

که بیشترین محیط برابر ۹ است.

۱۰۵. گزینه ۲ چون بیشترین مقدار ممکن برای عدد a را می‌خواهیم، لذا a با بزرگ‌ترین ضلع از مثلث دوم متناسب است. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b < ۷ < ۹ \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{۷} = \frac{۴}{b} \Rightarrow a = \frac{۴۵}{۷}, b = \frac{۲۸}{۵}$$

$$۷ < b < ۹ \Rightarrow \frac{a}{۹} = \frac{۵}{b} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow a = \frac{۳۶}{۷}, b = \frac{۳۵}{۴}$$

$$۷ < ۹ < b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۵}{۹} = \frac{۴}{۷} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

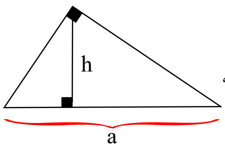
بنابراین بیشترین مقدار a برابر با $\frac{۴۵}{۷}$ می‌باشد.

۱۰۶. گزینه ۱

$$۶\alpha + ۵\alpha + \alpha = ۱۸۰^\circ \to ۱۲\alpha = ۱۸۰^\circ \to \alpha = ۱۵^\circ \to ۹۰^\circ, ۷۵^\circ, ۱۵^\circ$$

مثلث قائم‌الزاویه است پس بزرگ‌ترین ضلع آن وتر است و کوچک‌ترین ارتفاع، ارتفاع وارد بر وتر است و در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه‌ی ۱۵° دارد ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر است.

۱۰۷. گزینه ۱

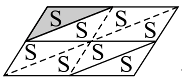


$$\text{مساحت مثلث قائم‌الزاویه} = \frac{۱}{۸} \times \text{مجذور وتر} \to \frac{a \times h}{۲} = \frac{۱}{۸}a^۲ \to h = \frac{۱}{۴}a$$

در مثلث قائم‌الزاویه اگر ارتفاع وارد بر وتر، ربع وتر باشد زوایا به‌صورت $۱۵^\circ, ۷۵^\circ, ۹۰^\circ$ هستند پس کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث ۱۵° است.

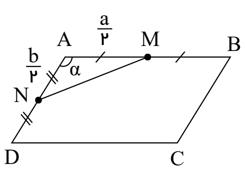
۱۰۸. گزینه ۳

روش اول: با توجه به شکل اگر وسط ها را به هم وصل کنیم ۸ مثلث هم مساحت به دست می‌آید.



$$\to \frac{\text{مساحت قسمت بزرگ‌تر}}{\text{مساحت قسمت کوچک‌تر}} = ۷$$

روش دوم :



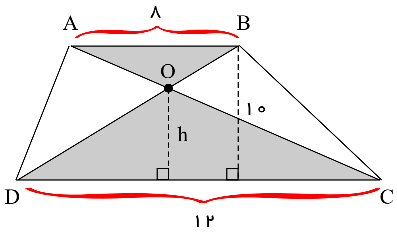
$$\to \begin{cases} SABCD = ab\sin\alpha \\ SAMN = (\frac{۱}{۲})(\frac{a}{۲})(\frac{b}{۲})\sin\alpha = \frac{۱}{۸}ab\sin\alpha \end{cases}$$

$$SMBCDN = SABCD - SAMN = \frac{۷}{۸}ab\sin\alpha \to SMBCDN = ۷SAMN$$

توجه کنید مساحت مثلث از رابطه‌ی نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشان بدست می‌آید.

۱۰۹. گزینه ۳

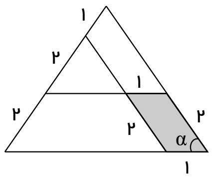
دو مثلث OAB و OCD متشابه هستند. بنابراین نسبت ارتفاعها با نسبت اضلاع، مساوی است.



$$\frac{h}{۱۰-h}=\frac{۱۲}{۸}\to\frac{h}{۱۰-h}=\frac{۳}{۲}\to ۲h=۳۰-۳h\to ۵h=۳۰\to h=۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{OBC}}=S_{\overset{\Delta}{BCD}}-S_{\overset{\Delta}{OCD}}=(\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۱۲)-(\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۲)=۶۰-۳۶=۲۴$$

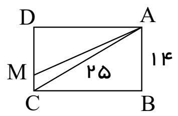
۱۱۰. گزینه ۱



$$\frac{\text{مساحت متوازی‌الاضلاع}}{\text{مساحت مثلث}}=\frac{۱\times ۲\times \sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵\times \sin\alpha}=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$$

توجه کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع a و b برابر $ab\sin\alpha$ و مساحت مثلث برابر نصف مساحت متوازی‌لااضلاع یعنی $\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$ است.

۱۱۱. گزینه ۲ ابتدا با استفاده از روابط محاسبه‌ی مساحت مثلث و مستطیل ، طول DM را محاسبه می‌کنیم:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{SABCM}=\frac{۵}{۹}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{S_{\overset{\Delta}{AMD}}}{SABCD}=\frac{۵}{۱۴}\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}\times DM\times AD}{AD\times AB}=\frac{۵}{۱۴}=\frac{DM}{۱۴}=\frac{۵}{۷}$$

$$\Rightarrow DM=۱۰$$

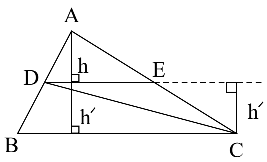
حال با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث ابتدا طول AD و سپس طول AM را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲=AD^۲+CD^۲\Rightarrow ۲۵^۲=AD^۲+۱۴^۲\Rightarrow AD^۲=۶۲۵-۱۹۶=۴۲۹$$

$$\overset{\Delta}{AMD}: AM^۲=AD^۲+DM^۲\Rightarrow AM^۲=۴۲۹+۱۰۰=۵۲۹\Rightarrow AM=۲۳$$

۱۱۲. گزینه ۴

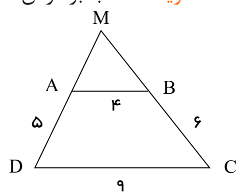
چون $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$ است پس $\frac{AD}{DB}=\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.



$$DE||BC\xrightarrow{\text{رابطه‌ی تالس در } \overset{\Delta}{ABC}}\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}=\frac{h}{h'}=\frac{۳}{۴}$$

پس: $\frac{SADE}{SDEC}=\frac{\frac{DE\times h}{۲}}{\frac{DE\times h'}{۲}}=\frac{h}{h'}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$

۱۱۳. گزینه ۴ بنابر فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت.



$$AB\|DC \Rightarrow \frac{MA}{MD}=\frac{AB}{DC}=\frac{MB}{MC}=\frac{۴}{۹}$$

$$\frac{MA}{MD}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{MA}{۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow MA=۴$$

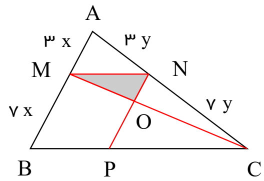
$$\frac{MB}{MC}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{MB}{۶}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow MB=\frac{۲۴}{۵}=۴٫۸$$

$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{MAB}=MA+MB+AB=۴+۴+۴٫۸=۱۲٫۸$$

۱۱۴. گزینه ۱ از قضیه‌ی تالس به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AC\|BD\xrightarrow{\text{تالس}}\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{OC}{CD} \\ BC\|DE\xrightarrow{\text{تالس}}\dfrac{OC}{CD}=\dfrac{OB}{BE}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{OA}{AB}=\frac{OB}{BE}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{BE}\Rightarrow BE=\frac{۴۰}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

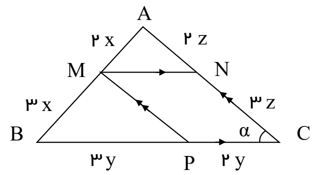
۱۱۵. گزینه ۳ از فرض تست و قضیه‌ی تالس شکل زیر را نتیجه می‌گیریم.



$$ON\|AM\Rightarrow\frac{CN}{CA}=\frac{ON}{AM}\Rightarrow\frac{۷y}{۱۰y}=\frac{ON}{۳x}\Rightarrow ON=\frac{۲۱}{۱۰}x$$

$$\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{\frac{۱}{۲}ON\times MN\sin\hat{N}}{\frac{۱}{۲}AM\times MN\sin\hat{M}}\xrightarrow{\hat{N}=\hat{M}}\frac{S_{OMN}}{S_{AMN}}=\frac{ON}{AM}=\frac{\frac{۲۱}{۱۰}x}{۳x}=\frac{۷}{۱۰}=۷۰\%$$

۱۱۶. گزینه ۱ باتوجه به فرض تست داریم:



$$AM=\frac{۲}{۳}MB\Rightarrow\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۳}$$

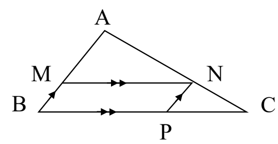
$$MP\|AC\xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}}\frac{BM}{MA}=\frac{BP}{PC}=\frac{۳}{۲}$$

$$\frac{S_{MNPC}}{S_{ABC}}=\frac{۲y\times۳z\times\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}\times۵y\times۵z\times\sin\alpha}=\frac{۶}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع ۴۸ درصد مساحت مثلث ABC است. توجه کنید که مساحت مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین دو ضلع می‌باشد.

۱۱۷. گزینه ۱

$MNPB$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:



$$MN\|BC\ ,\ NP\|AB$$

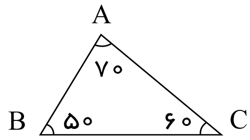
$$\frac{AM}{MB}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\text{ترکیب در مخرج}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{BM}{AB}=\frac{۲}{۵}\qquad(۱)$$

$$MN\|BC\Rightarrow\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۳}{۵}\xRightarrow{MN=BP}\frac{BP}{BC}=\frac{۳}{۵}\qquad(۲)$$

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{MB\times BP\times\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}}\overset{(۱),(۲)}{=}\frac{\frac{۲}{۵}AB\times\frac{۳}{۵}BC}{\frac{۱}{۲}AB\times BC}=\frac{۱۲}{۲۵}=۰٫۴۸=۴۸\%$$

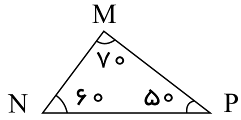
۱۱۸. گزینه ۱

دو مثلث ABC و MNP متشابهند زیرا:



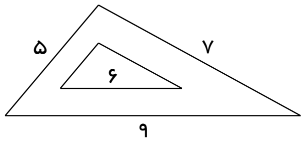
$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC}: A=۷۰, B=۵۰^\circ, \hat{C}=۶۰^\circ \\ \overset{\Delta}{MNP}: \hat{M}=۷۰, \hat{N}=۶۰, \hat{P}=۵۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{S}{S'}=\frac{۹}{۴}$, $\frac{S}{S'}=(\frac{AB}{MP})^۲$ داریم:



$$\frac{AB}{MP}=\sqrt{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow \frac{۱۸}{MP}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow MP=۱۲$$

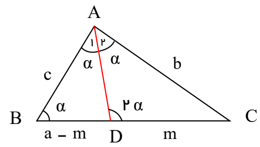
۱۱۹. گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر را S و مساحت مثلث کوچک‌تر را S' بنامیم، داریم:



$$\rightarrow \frac{S}{S'}=\underbrace{K^۲}_{\text{نسبت تشابه}} \rightarrow \frac{S}{S'}=(\frac{۹}{۶})^۲=\frac{۹}{۴}$$

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچک‌تر}}=\frac{S-S'}{S'} \xlongequal{\text{تفکیک}} \frac{S}{S'}-۱=\frac{۹}{۴}-۱=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

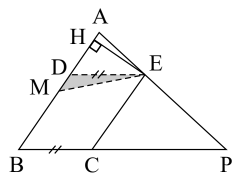
۱۲۰. گزینه ۳ با رسم نیمساز رأس A می‌توان گفت:



$$\begin{cases} \hat{D}=\hat{A}=۲\alpha \\ \hat{B}=\hat{A}_۲=\alpha \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{\underbrace{AD}_{BD}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{m}=\frac{c}{a-m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^۲=am \\ a^۲-am=bc \end{cases} \Rightarrow a^۲-b^۲=ma+bc-am=bc$$

۱۲۱. گزینه ۲



$$\overset{\Delta}{PEC} \sim \overset{\Delta}{APB} \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{PEC}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}}=(\frac{PC}{PB})^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}$$

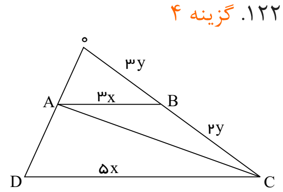
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{APB} \rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{APE}}}{S_{\overset{\Delta}{APB}}}=(\frac{DE}{BP})^۲=(\frac{BC}{BP})^۲=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}$$

$$\left.\begin{matrix} S_{\overset{\Delta}{DEM}}=\frac{۱}{۲}\times DM\times HE \\ SDECB=BE\times HE=۲DM\times HE \end{matrix}\right\} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEM}}=\frac{۱}{۴}SDECB$$

$$S_{\overset{\Delta}{DEM}}=\frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}}-S_{\overset{\Delta}{ADE}}-S_{\overset{\Delta}{ECP}})=\frac{۱}{۴}(S_{\overset{\Delta}{ABP}}-\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABP}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABP}})=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABP}})=\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABP}}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{DEM}}}{S_{\overset{\Delta}{ABP}}}=\frac{۱}{۹}$$

۱۲۲. گزینه ۴



$$AB||DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{DC}=\frac{OB}{OC}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} OB=۳y \\ OC=۵y \end{cases}$$

از طرفی مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع یکسانی دارند پس:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\Delta}{OAB}}=۳S \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}}۲S=\frac{۱}{۲}\times ۳x\times h\Rightarrow xh=\frac{۴S}{۳}\end{cases}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۸x}{۲}\times h=۴xh=۴\times\frac{۴s}{۳}=\frac{۱۶s}{۳}$$

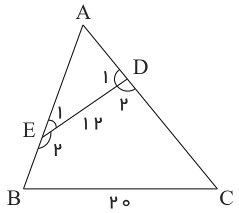
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OAC}}}{S_{\text{ذوزنقه}}}=\frac{۵s}{\frac{۱۶s}{۳}}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

۱۲۳. گزینه ۲   در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است.

$$\text{نسبت مساحت‌ها}=\frac{۲}{۳}\times\text{نسبت اضلاع}\rightarrow k^{۲}=\frac{۲}{۳}k\rightarrow k=\frac{۲}{۳}\rightarrow\text{نسبت تشابه مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر}=\frac{۳}{۲}$$

پس: $\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۹}{۴}=۲٫۲۵$

۱۲۴. گزینه ۲



$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\rightarrow\hat{B}=\hat{D}_۱$$

$$\begin{cases}\hat{C}+E_۲=۱۸۰^\circ \\ \hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\rightarrow\hat{C}=\hat{E}_۱$$

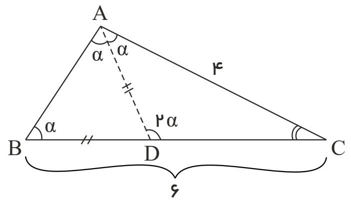
بنابراین دو مثلث ABC و ADE متشابه هستند و داریم:

$$k=\frac{DE}{BC}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه آنها است.

$$\frac{SADE}{SABC}=k^{۲}=\frac{۹}{۲۵}\rightarrow\frac{SABC-SADE}{SABC}=\frac{۲۵-۹}{۲۵}\rightarrow\frac{SBCDE}{SABC}=\frac{۱۶}{۲۵}=۰٫۶۴$$

۱۲۵. گزینه ۲   در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی رأس A را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ACD به علت برابری دو زاویه، متشابه هستند.



$$\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{ACD}\rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}\rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{۴}{CD}=\frac{۶}{۴}$$

$$\rightarrow CD=\frac{۸}{۳}\ ,\quad BD=۶-\frac{۸}{۳}=\frac{۱۰}{۳}$$

چون مثلث ABD متساوی‌الساقین است پس $AD=BD=\frac{۱۰}{۳}$.

نسبت تشابه: $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{AC}\rightarrow\frac{AB}{\frac{۱۰}{۳}}=\frac{۴}{\frac{۸}{۳}}=\frac{۶}{۴}\rightarrow AB=۵$

۱۲۶. گزینه ۳   وقتی بزرگ‌ترین مکعب ممکن داخل کره به قطر ۶ محاط می‌شود که قطرهای آنها بر هم منطبق باشند. پس داریم:

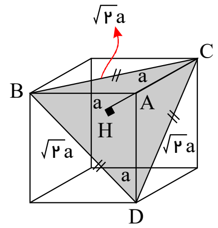
$$\underbrace{۲R}_{\text{قطر کره}}=\overbrace{\sqrt{۳}a}^{\text{قطر مکعب}}\Rightarrow ۶=\sqrt{۳}a\Rightarrow a=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

حال با معلم بودن طول یال‌های این مکعب، سطح کل این مکعب برابر است با:

$$S_{\text{کل}}=۶a^۲=۶(۲\sqrt{۳})^۲=۶\times ۱۲=۷۲$$

۱۲۷. گزینه ۴

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی رأس A از صفحه‌ی BCD، کافی است که حجم مخروط $ABCD$ را از دو روش محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم. داریم:



$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\ \text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}$$

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\times\underbrace{\frac{a^۲}{۲}}_{\text{قاعده‌ی } ABD}\times\underbrace{a}_{\text{ارتفاع } AC}=\frac{۱}{۳}\underbrace{(\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۲}a)^۲)}_{\text{قاعده‌ی } BCD}\times AH\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$

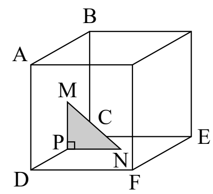
بنابراین AH مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برابر یال مکعب است.

۱۲۸. گزینه ۴   فاصله‌ی دو رأس غیرواقع در یک وجه، یعنی قطر مکعب مستطیل.

$$d=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}=\sqrt{۲۵+۳۶+۲۰}=\sqrt{۸۱}=۹$$

۱۲۹. گزینه ۴   توجه کنید که پاره‌خط BF بر صفحه‌ی $ABCD$ عمود است زیرا بر تمام خطوط این صفحه که از نقطه‌ی B می‌گذرند عمود می‌باشد. پاره‌خط BF عضو (متعلق) صفحه‌ی سایه زده است. پس صفحه‌ی $BDEF$ بر صفحه‌ی $ABCD$ عمود است.

۱۳۰. گزینه ۳   با توجه به این که نقاط M و N به ترتیب مراکز وجوه $ABCD$ و $DCEF$ هستند، داریم:



نقطه‌ی M مرکز $ABCD$ است. $M\Rightarrow MP=\frac{AD}{۲}=۲\sqrt{۲}$

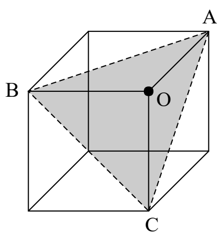
نقطه‌ی N مرکز $DCEF$ است. $N\Rightarrow NP=\frac{DF}{۲}=۲\sqrt{۲}$

طبق قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$\overset{\Delta}{MNP}: MN^۲=MP^۲+NP^۲=(۲\sqrt{۲})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲=۱۶\Rightarrow MN=۴$$

۱۳۱. گزینه ۴

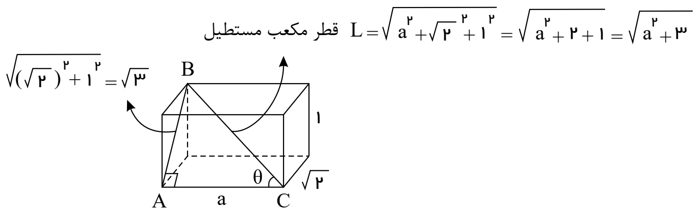
انتهای سه یالی که از رأس O می‌گذرند، نقاط A و B و C هستند و طراح سوال مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را خواسته است (دقت کنید که سه ضلع این مثلث قطرهای سه مربع یکسان هستند و طول قطر یک مربع به ضلع a برابر $\sqrt{۲}a$ است. بنابراین طول اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $۴\sqrt{۲}$ است).



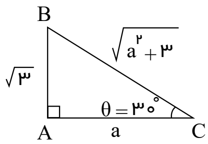
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{a^۲\cdot\sqrt{۳}}{۴}=\frac{(۴\sqrt{۲})^۲\sqrt{۳}}{۴}=۸\sqrt{۳}$$

توجه کنید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۱۳۲. گزینه ۳



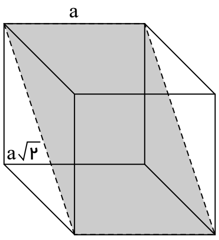
در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC، می‌دانیم زاویه‌ی بین قطر مکعب مستطیل و یال a، برابر 30° است. پس داریم:



$$\rightarrow \tan\theta=\tan 30^\circ=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=3$$

۱۳۳. گزینه ۴

مساحت مقطع یک مکعب به طول یال a با صفحه‌ی قطری آن برابر مساحت یک مستطیل به عرض a و طول $a\sqrt{2}$ است ($a\sqrt{2}$ قطر یک مربع به ضلع a است).



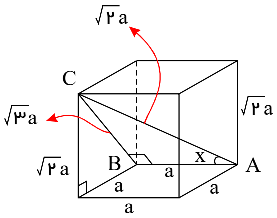
$$\text{مساحت}=\text{طول}\times\text{عرض}\rightarrow 9\sqrt{2}=a\sqrt{2}\times a\rightarrow 9=a^2\rightarrow a=3$$

طول قطر مکعب برابر $a\sqrt{3}$ و در نتیجه $3\sqrt{3}$ است.

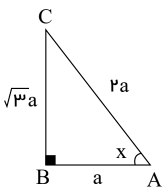
۱۳۴. گزینه ۴ برای اینکه در داخل مکعب، دو مکعب‌مستطیل به‌طور کامل جا بگیرد قاعده‌های این دو مکعب‌مستطیل با قاعده‌ی مکعب برابر بوده و ارتفاع آن دو، نصف ارتفاع مکعب است. بنابراین ابعاد این دو مکعب مستطیل $6,6,3$ است.

$$\text{طول قطر مکعب مستطیل}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6^2+6^2+3^2}=\sqrt{81}=9$$

۱۳۵. گزینه ۲ قاعده‌ی مکعب‌مستطیل به شکل مربع است اگر ضلع مربع را a در نظر بگیریم قطر مربع برابر $\sqrt{2}a$ است و چون ارتفاع مکعب مستطیل برابر قطر قاعده‌ی مربع‌شکل آن است پس ارتفاع مکعب‌مستطیل نیز $\sqrt{2}a$ است و می‌توان این شکل را در نظر گرفت:

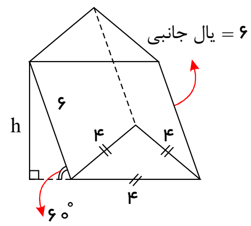


اکنون برای تعیین زاویه‌ی بین قطر مکعب‌مستطیل با یال کوچک‌تر آن (زاویه‌ی x) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC اندازه‌ی اضلاع را مشخص می کنیم.



$$\rightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}\rightarrow \hat{x}=60^\circ$$

۱۳۶. گزینه ۴

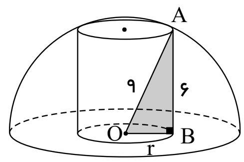


ارتفاع منشور : $h = 6 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$V_{\text{منشور}} =$ ارتفاع × مساحت قاعده $= (\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2) \times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 36$

دقت کنید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه‌ی $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ به‌دست می‌آید.

۱۳۷. گزینه ۴



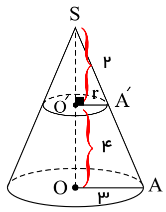
$\overset{\Delta}{ABD} : 9^2 = 6^2 + r^2 \to 81 = 36 + r^2 \to r^2 = 45$

$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h = (\pi)(45)(6) = 270\pi$

۱۳۸. گزینه ۱ مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه‌ی قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن قطع می‌دهیم. داریم:

$OO' = 4 \to O'S = OS - OO' = 6 - 4 = 2$

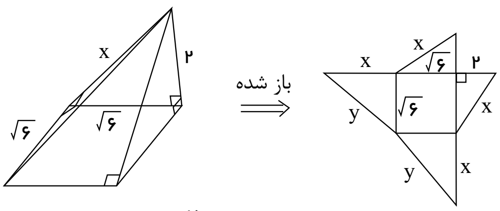
در مثلث AOS باتوجه به قضیه‌ی تالس داریم:



$\frac{O'S}{OS} = \frac{O'A'}{OA} \to \frac{2}{6} = \frac{r}{3} \to r = O'A' = 1$

$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (1)^2 (O'S) = \frac{2\pi}{3}$

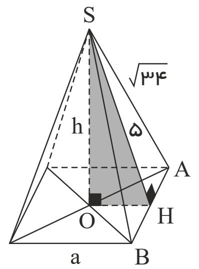
۱۳۹. گزینه ۱



$x^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 = 4 + 6 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$

$y^2 = x^2 + (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{6})^2 = 10 + 6 = 16 \Rightarrow y = 4$

۱۴۰. گزینه ۱



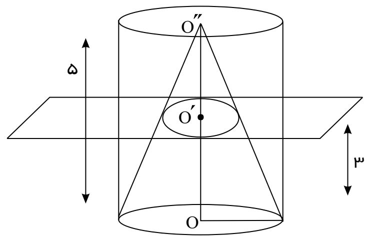
$$\overset{\Delta}{SAH} : SA^{۲} = AH^{۲} + SH^{۲} \to ۳۴ = AH^{۲} + ۲۵ \to AH^{۲} = ۹$$

$$\to AH = ۳ \to \text{ضلع قاعده} = a = ۲ \times ۳ = ۶$$

$$\overset{\Delta}{SOH} : SH^{۲} = OS^{۲} + \underbrace{OH^{۲}}_{\text{نصف ضلع قاعده}} \to ۲۵ = h^{۲} + ۹ \to h^{۲} = ۱۶ \to h = ۴$$

$$V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} a^{۲} \cdot h = \frac{۱}{۳}(۳۶)(۴) = ۴۸$$

۱۴۱. گزینه ۴



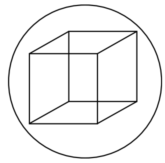
$$\frac{S_{o' \text{ دایره به مرکز}}}{S_{o \text{ دایره به مرکز}}} = (\frac{o''o'}{o''o})^{۲} = (\frac{۲}{۵})^{۲} = \frac{۴}{۲۵} \quad \boxed{۱}$$

$$S_{o \text{ دایره به مرکز}} = \pi(۴)^{۲} = ۱۶\pi$$

$$\boxed{۱} : S_{o \text{ دایره به مرکز}} = \frac{۴}{۲۵} \times ۱۶\pi = \frac{۶۴\pi}{۲۵} = ۲{,}۵۶\pi$$

$$\text{مساحت مقطع از برخورد صفحه} = S_{o \text{ دایره به مرکز}} - S_{o' \text{ دایره به مرکز}} = ۱۶\pi - ۲{,}۵۶\pi = ۱۳{,}۴۴\pi$$

۱۴۲. گزینه ۱ وقتی مکعب درون کره محاط می‌شود، آن‌گاه قطر مکعب برابر قطر کره خواهد بود.



$$\underbrace{\text{قطر مکعب}}_{a\sqrt{۳}} = \underbrace{\text{قطر کره}}_{۲R} \to ۲\sqrt{۳} = ۲R \to R = \sqrt{۲}$$

$$S_{\text{کره}} = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(\sqrt{۲})^{۲} = ۸\pi$$

۱۴۳. گزینه ۲ چون مکعب مستطیل در کره محاط شده است، لذا قطر مکعب مستطیل با قطر کره برابر است، پس داریم:

$$\text{قطر کره} = \sqrt{۶^{۲} + ۵^{۲} + (۲\sqrt{۵})^{۲}} = \sqrt{۳۶ + ۲۵ + ۲۰} = \sqrt{۸۱} = ۹$$

قطره کره برابر با **۹** و در نتیجه شعاع آن برابر با $r = \frac{۹}{۲}$ می باشد، بنابراین:

$$\text{مساحت کره} = ۴\pi r^{۲} = ۴ \times \pi \times \frac{۸۱}{۴} = ۸۱\pi$$

بنابراین سطح این کره، **۸۱** برابر π است.

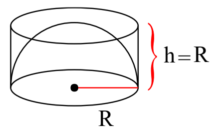
۱۴۴. گزینه ۴ قطر مکعب مستطیل برابر قطر کره است.

$$\text{قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{۴^{۲} + ۳^{۲} + ۵^{۲}} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

$$\text{قطر کره } ۲R = ۵\sqrt{۲} \Rightarrow R = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{مساحت کره} = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(\frac{۵\sqrt{۲}}{۲})^{۲} = ۵۰\pi$$

۱۴۵. گزینه ۴ چون نیمکره درون استوانه قرار دارد پس شعاع قاعده‌ی استوانه برابر شعاع نیمکره و ارتفاع آن برابر شعاع نیمکره است.
حجم محدود به این نیمکره و استوانه، برابر با تفاضل حجم های آنها است. پس داریم:

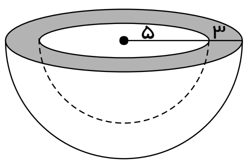


$$\begin{cases} V_۱ = V_{\text{استوانه}} = \pi R^۲ h \xlongequal{h=R} \pi R^۳ \\ V_۲ = V_{\text{نیمکره}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲}{۳}\pi R^۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حجم بین نیمکره و استوانه} = V_۱ - V_۲ = \pi R^۳ - \frac{۲}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۳ \xlongequal{R=۶} ۷۲\pi$$

پس حجم بین نیمکره و استوانه، **۷۲** برابر π می‌باشد.

۱۴۶. گزینه ۱ طبق صورت مسأله ضخامت قسمت تیره برابر **۳** واحد و شعاع نیم کره‌ی بزرگ‌تر برابر $R = \frac{۱۶}{۲} = ۸$ و شعاع نیم کره‌ی کوچک‌تر برابر $r = ۸ - ۳ = ۵$ است.



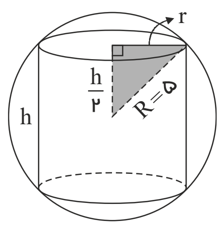
مساحت لبه‌ی ظرف + مساحت نیم کره‌ی درونی ظرف + مساحت نیم کره‌ی ظرف بیرونی = مساحت کل ظرف

$$\to S_{\text{کل}} = ۲\pi R^۲ + ۲\pi r^۲ + \pi(R^۲ - r^۲)$$

$$\to S_{\text{کلی}} = (۲\pi)(۶۴) + (۳\pi)(۲۵) + \pi(۶۴ - ۲۵) = ۲۱۷\pi$$

پس سطح کل این ظرف **۲۱۷** برابر π است.

۱۴۷. گزینه ۱



$$\to \begin{cases} S_{\text{جانبی}} = ۲\pi r h = ۴۸\pi \to rh = ۲۴ \\ r^۲ + (\frac{h}{۲})^۲ = R^۲ = ۲۵ \end{cases} \to \begin{cases} rh = ۲۴ \to \frac{h}{۲} = \frac{۱۲}{r} \to \frac{h^۲}{۴} = \frac{۱۴۴}{r^۲} \\ r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = ۲۵ : * \end{cases}$$

$$* : r^۲ + \frac{۱۴۴}{r^۲} = ۲۵ \to (r^۲)^۲ - ۲۵r^۲ + ۱۴۴ = ۰ \to (r^۲ - ۱۶)(r^۲ - ۹) = ۰$$

$$\to \begin{cases} r^۲ = ۱۶ \to h = ۶ \to V = \pi r^۲ h = ۹۶\pi \\ r^۲ = ۹ \to h = ۸ \to V = \pi r^۲ h = ۷۲\pi \end{cases}$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۳۴۱۵۴

۱- ۱	۲- ۲	۳- ۳	۴- ۴	۵- ۳
۶- ۴	۷- ۳	۸- ۳	۹- ۴	۱۰- ۳
۱۱- ۲	۱۲- ۲	۱۳- ۲	۱۴- ۲	۱۵- ۱
۱۶- ۱	۱۷- ۴	۱۸- ۳	۱۹- ۴	۲۰- ۲
۲۱- ۳	۲۲- ۲	۲۳- ۴	۲۴- ۱	۲۵- ۱
۲۶- ۱	۲۷- ۲	۲۸- ۳	۲۹- ۳	۳۰- ۳
۳۱- ۳	۳۲- ۳	۳۳- ۲	۳۴- ۳	۳۵- ۳
۳۶- ۱	۳۷- ۴	۳۸- ۲	۳۹- ۱	۴۰- ۱
۴۱- ۳	۴۲- ۲	۴۳- ۱	۴۴- ۲	۴۵- ۱
۴۶- ۴	۴۷- ۳	۴۸- ۴	۴۹- ۳	۵۰- ۴
۵۱- ۲	۵۲- ۲	۵۳- ۲	۵۴- ۳	۵۵- ۲
۵۶- ۱	۵۷- ۳	۵۸- ۲	۵۹- ۴	۶۰- ۲
۶۱- ۴	۶۲- ۳	۶۳- ۲	۶۴- ۱	۶۵- ۴
۶۶- ۱	۶۷- ۲	۶۸- ۱	۶۹- ۱	۷۰- ۳
۷۱- ۲	۷۲- ۲	۷۳- ۴	۷۴- ۴	۷۵- ۱
۷۶- ۳	۷۷- ۳	۷۸- ۳	۷۹- ۲	۸۰- ۱
۸۱- ۲	۸۲- ۳	۸۳- ۴	۸۴- ۱	۸۵- ۴
۸۶- ۴	۸۷- ۴	۸۸- ۴	۸۹- ۳	۹۰- ۲
۹۱- ۴	۹۲- ۳	۹۳- ۱	۹۴- ۴	۹۵- ۳
۹۶- ۴	۹۷- ۱	۹۸- ۳	۹۹- ۳	۱۰۰- ۴
۱۰۱- ۲	۱۰۲- ۲	۱۰۳- ۳	۱۰۴- ۲	۱۰۵- ۲
۱۰۶- ۱	۱۰۷- ۱	۱۰۸- ۳	۱۰۹- ۳	۱۱۰- ۱
۱۱۱- ۲	۱۱۲- ۴	۱۱۳- ۴	۱۱۴- ۱	۱۱۵- ۳
۱۱۶- ۱	۱۱۷- ۱	۱۱۸- ۱	۱۱۹- ۳	۱۲۰- ۳
۱۲۱- ۲	۱۲۲- ۴	۱۲۳- ۲	۱۲۴- ۲	۱۲۵- ۲
۱۲۶- ۳	۱۲۷- ۴	۱۲۸- ۴	۱۲۹- ۴	۱۳۰- ۳
۱۳۱- ۴	۱۳۲- ۳	۱۳۳- ۴	۱۳۴- ۴	۱۳۵- ۲
۱۳۶- ۴	۱۳۷- ۴	۱۳۸- ۱	۱۳۹- ۱	۱۴۰- ۱
۱۴۱- ۴	۱۴۲- ۱	۱۴۳- ۲	۱۴۴- ۴	۱۴۵- ۴
۱۴۶- ۱	۱۴۷- ۱			