۱. مثلث $ABC$ مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث $ABC$، می‌توان مثلثی متشابه با مثلث مفروض ساخت؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۷ ۳) ۲۵ ۴) ۲۴

۲. در یک ذوزنقه متساوی الساقین، از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟

۱) مستطیل ۲) محاطی ۳) متوازی الاضلاع ۴) لوزی

۳. درمستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، ازتقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می‌شود. مساحت این چهارضلعی چند واحد مربع است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴٫۵ ۳) ۲۸ ۴) ۳۲٫۵

۴. در مستطیلی به اندازه‌ی اضلاع ۴ و ۹ واحد، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهار ضلعی کدام است؟

۱) ۱۲٫۵ ۲) ۱۳٫۵ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۵. در یک متوازی الاضلاع، طول اضلاع ۵ و ۹ واحد و یک زاویه ۶۰ درجه است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

۶. در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و۷ ، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در $D$ قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی $D$ از وسط ضلع بزرگ‌تر چقدر است؟

۱) ۰٫۳ ۲) ۰٫۴ ۳) ۰٫۵ ۴) ۰٫۶

۷. در یک مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. فاصله‌ی دورترین رأس این مثلث از نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۸. در مثلث $ABC$ داریم: $AB = ۹$ ، $AC = ۷$ و $\widehat{A} = ۲\widehat{C}$ . اندازه‌ی $BC$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲٫۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

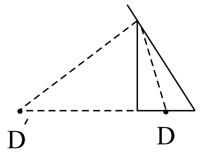
۹. در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیم‌سازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در $N$ و $M$ قطع می‌کنند. اندازه‌ی $MN$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۱۰. در مثلث $ABC$، میانه‌ی $AM$ و نیمسازهای دو زاویه‌ی $AMB$ و $AMC$ را رسم می‌کنیم تا دو ضلع $AB$ و $AC$ رابه ترتیب در $D$ و $E$ قطع کند. نسبت $\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{AM}{BC}$ ۲) $\frac{ME}{MC}$ ۳) $\frac{ME}{CE}$ ۴) $\frac{AD}{AB}$

۱۱. در مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل و امتداد آن را در $D$ و $D'$ قطع می‌کنند. اندازه‌ی $DD'$ چه قدر است؟




۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$

۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

۱۲. در مثلثی به طول اضلاع $۲,۳ - \sqrt{۲}$ و $۳ + \sqrt{۲}$ واحد، نقطه‌ی $M$ داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه ی $M$ از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟

۱) $۵ - \sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

۱۳. در مثلثی به طول اضلاع ۱۳ و ۱۳ و ۱۰ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها از دورترین رأس آن کدام است؟

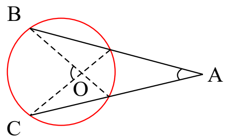
۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۹ ۴) ۸

۱۴. مثلثی با معلوم بودن دو میانه ی $m_a = ۹$ و $m_b = ۱۲$ و ضلع $a$ قابل رسم است. اندازه ی $a$ کدام عدد می تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۲۲

۱۵. از نقطه $M$ واقع در خارج دایره ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس $MB, MA$ بر دایره رسم شده است. اگر فاصله نقطه $M$ تا نزدیکترین نقاط دایره $۴(\sqrt{۲}-۱)$ باشد، فاصله مرکز دایره از وتر $AB$ کدام است؟

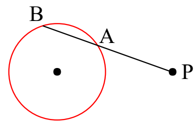
۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲




۱۶. در شکل مقابل $\hat{A} = ۲۷^\circ$ و $\hat{O} = ۷۱^\circ$ کمان $BC$ چند درجه است؟

۱) $۹۸^\circ$ ۲) $۱۰۰^\circ$ ۳) $۱۰۲^\circ$ ۴) $۱۰۴^\circ$

۱۷. بیشترین فاصله‌ی نقطه‌ی $P$ تا یک دایره، سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع $PAB$ نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان $AB$ برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی $PA$ چند برابر شعاع دایره است؟




۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$ ۳) $\sqrt{۱۱}-۲$ ۴) $\sqrt{۱۳}-۲$

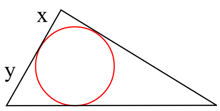
۱۸. دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایره ی بزرگ تر می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹. دو نقطه‌ی ثابت $B$ و $C$ و نقطه متحرک $A$ سه رأس مثلث‌اند، اگر $BC = ۶$ ، $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و نیمساز زاویه‌ی $A$ همواره از نقطه‌ی ثابتی مانند $D$ ، بگذرد فاصله‌ی $D$ از نقطه‌ی $B$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۲۰. دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟




۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۲۱. ذوزنقه متساوی الساقین به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بردایره‌ای محیط است، کوتاهترین فاصله راس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

۲۲. کدام تبدیل زیر ایزومتری است؟

۱) $D(x,y) = (۲x, ۲y)$ ۲) $D(x,y) = (x+y, x-y)$

۳) $D(x,y) = (-y+۲, x-۱)$ ۴) $D(x,y) = (۲x, \frac{۱}{۲}y)$

۲۳. کدام‌یک از تبدیل‌های زیر، ایزومتری است؟

۱) $D(x,y)=(-x,y+3)$　　۲) $D(x,y)=(-y,2x)$

۳) $D(x,y)=(x+1,2y)$　　۴) $D(x,y)=(x,0)$

۲۴. دو خط متقاطع $d$ و $d'$ و پاره‌خط $AB$ در صفحه‌ی آنها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی $AB$ که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب　　۲) انتقال　　۳) دوران　　۴) تجانس

۲۵. بازتاب خط $x-2y=4$ نسبت به نقطه‌ی $(2,a)$ ، خط $x-2y+6=0$ است. $a$ کدام است؟

۱) $1$　　۲) $\frac{3}{2}$　　۳) $2$　　۴) $\frac{5}{2}$

۲۶. در یک صفحه، دو دایره به شعاع‌های متفاوت در نقطه‌ی $A$ متقاطع‌اند. با استفاده از کدام تبدیل می‌توان از نقطه‌ی $A$ خطی گذراند که در این دو دایره، وترهای مساوی ایجاد کند؟

۱) انتقال　　۲) دوران $90$ درجه　　۳) بازتاب نسبت به خط　　۴) بازتاب نسبت به نقطه

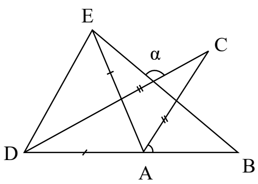
۲۷. در صفحه‌ای خط $d$ و دو نقطه‌ی $A$ و $B$ در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط $d$ که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه‌ی $A$ و $B$ کمترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) بازتاب　　۲) انتقال　　۳) دوران　　۴) تجانس

۲۸. در شکل مقابل $AB=AC$ ، $AD=AE$، $\widehat{CAB}=50^\circ$ و $\widehat{AED}=65^\circ$ زاویه $\alpha$ چنددرجه است؟

۱) $115^\circ$　　۲) $120^\circ$

۳) $125^\circ$　　۴) $130^\circ$




۲۹. دوران یافته‌ی خط $y-2x=3$ تحت زاویه‌ی $90^\circ$ به مرکز دوران $(0,0)$ خط $l_1$ است. معادله‌ی خط تصویر $l_1$ تحت انتقال $T(x,y)=(x+1,y-2)$ کدام است؟

۱) $2y+x+6=0$　　۲) $2y-x+4=0$　　۳) $y-2x+5=0$　　۴) $y+2x+1=0$

۳۰. نقاط $(5,3)$،$(7,1)$و $(1,-1)$ سه راس از مثلث قائم الزاویه‌اند.مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانس مبدا مختصات و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $2$　　۲) $3$　　۳) $4$　　۴) $6$

۳۱. فقط یک جفت صفحه‌ی موازی هم می‌توان یافت به طوری که هر یک از این دو صفحه شامل یکی از خطوط مفروض $d$ یا $d'$ باشد، این دو خط کدام وضع را دارند؟

۱) واقع در یک صفحه　　۲) موازی　　۳) متقاطع　　۴) متنافر

۳۲. خط $\Delta$ در خارج صفحه مثلث $ABC$ است. ضلع $BC$ موازی خط $\Delta$ است. چند صفحه می‌توان بر خط $\Delta$ گذراند که نقاط $A,B,C$ از آن صفحه، به یک فاصله باشند؟

۱) $2$　　۲) $1$　　۳) $3$　　۴) $4$

۳۳. دو خط $d\,,d'$ و نقطه‌ی $O$ خارج آن دو خط مفروض‌اند. صفحه‌ی $P$ گذرنده بر نقطه‌ی $O$ و خط $d$ است، $d'\cap P=\phi$ ، الزاماً کدام نتیجه گیری درست است؟

۱) $d\,,d'$ متنافرند

۲) خطی گذرنده بر $O$ هر دو خط $d$ و $d'$ را قطع نمی کند.

۳) فقط یک خط گذرنده بر $O$ هر دو خط $d\,,d'$ را قطع می‌کند.

۴) $d\,,d'$ موازی اند.

۳۴. هر یک از دو خط متنافر $D$ و $D'$ با صفحه ی $P$ متقاطع اند. صفحه‌ی دوم شامل خط $D$ و موازی خط $D'$ ، صفحه‌ی سوم شامل خط $D'$ و موازی خط $D$ مشخص شده‌اند. تعداد فصل مشترک‌های دو به دوی این سه صفحه کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۵. خط $\Delta$ و صفحه‌ی $P$ حداقل در دو نقطه مشترک اند، فاصله‌ی نقطه‌ی $A$ از صفحه‌ی $P$ و خط $\Delta$ به ترتیب ۲ و۴ واحد است. چند خط از نقطه‌ی $A$ متقاطع با $\Delta$ می‌گذرد که با صفحه‌ی $P$ زاویه‌ی ۳۰ درجه بسازد؟

۱) یک ۲) دو ۳) بی‌شمار ۴) نشدنی

۳۶. خط $\Delta$ صفحه‌ی مثلث $ABC$ را تنها در نقطه‌ی برخورد میانه‌های مثلث قطع می‌کند، چند صفحه می‌توان بر خط $\Delta$ گذراند که رأس های این مثلث از آن صفحه به یک فاصله باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) نشدنی

۳۷. خط $\Delta$ با کدام شرایط می‌تواند موازی صفحه‌ی $P$و عمود بر صفحه‌ی $Q$ باشد؟

۱) $P \perp Q$ ۲) $P \cap Q = \phi$ ۳) $\Delta \perp (P \cap Q)$ ۴) $\Delta \parallel (P \cap Q)$

۳۸. اگر هر سه صفحه‌ی متمایز بر صفحه‌ی $P$ عمود باشند، آن‌گاه فصل مشترک‌های دوبه‌دوی این سه صفحه‌ی متمایز، کدام وضعیت را نمی‌پذیرد؟

۱) فصل مشترک ندارند. ۲) منطبق ۳) موازی ۴) متقاطع

۳۹. دو خط $D$ و $D'$ مفروض‌اند. اگر فقط یک جفت صفحات موازی هم $P$ و $P'$ بتوان یافت، به طوری که $D \subset P$ و $D' \subset P'$ ، آنگاه $D$ و $D'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) متنافر ۲) موازی ۳) متقاطع ۴) عمود بر هم

۴۰. در یک متوازی الاضلاع با زاویه ۶۰ درجه و اندازه اضلاع $۲a, a$ ، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، راس های یک چهارضلعی است، مساحت این چهارضلعی حاصل چند برابر $a^۲\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۱. مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو راس $A$ و $B$ و مماس بر ضلع $CD$ کدام است؟

۱) ۲٫۲۵ ۲) ۲٫۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۴۲. در مثلث $ABC(AB < AC)$ ضلع $BC$ را از هر دو طرف، به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز دایره محیطی مثلث $ADE$ ، بر روی کدام جزء مثلث $ABC$ است؟

۱) عمود منصف BC ۲) میانه نظیر ضلع BC ۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC ۴) نیمساز داخلی زاویه A

۴۳. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ نقطه $O$ در امتداد $AC$ مرکز دایره‌ای است که در نقطه $B$ بر ضلع $AB$ مماس است و امتداد $BC$ این دایره را در $D$ قطع کرده است. مثلث $OCD$ چگونه است؟

۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه

۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیر مشخص

۴۴. در یک مستطیل اندازه اضلاع ۵ و ۱۱ واحد است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۴۵. در مثلث $ABC : (\hat{A} = ۹۰^\circ, AB = ۳, AC = ۴)$ ارتفاع $AH$ و نیمساز داخلی $AD$ رسم شده است. اندازه‌ی $DH$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۴۶. در چهارضلعی $ABCD$، عمودمنصف های دو ضلع مقابل $AB$ و $CD$ در نقطه $M$ متقاطع اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟

۱) $A\widehat{M}B > B\widehat{M}C$ ۲) $C\widehat{A}B > C\widehat{A}D$

۳) $B\widehat{M}C > A\widehat{M}D$ ۴) $C\widehat{M}D > A\widehat{M}B$

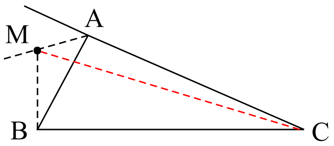
۴۷. در مثلث $ABC$، میانه‌ی $AM$ و نیمساز داخلی $AD$ رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟

۱) $AM < BC$ ۲) $AM < AB$ ۳) $AD < AB$ ۴) $AD < AM$

۴۸. در مثلث $ABC$ زاویه‌ی $\hat{A} > \hat{C}$ ، نیمساز زاویه‌ی $B$ و عمود منصف ضلع $AB$ در نقطه‌ی $D$ متقاطع‌اند. $M$ و $N$ پای عمودهایی است که از نقطه‌ی $D$ به ترتیب بر $BA$ و $BC$ رسم شده‌اند، کدام نابرابری درست است؟

۱) $NC > NB$ ۲) $NC < NB$ ۳) $DA > DC$ ۴) $AM < BN$

۴۹. در شکل روبه‌رو، نقطه M روی نیمساز خارجی زاویه $A$ است. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$، چگونه است؟




۱) بزرگتر از ۱

۲) کمتر از ۱

۳) برابر با ۱

۴) غیر مشخص

۵۰. چهارضلعی $ABCD$ محاط در یک دایره است. اگر $AB$ دورترین وتر و $BC$ نزدیک‌ترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشند، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟

۱) $\widehat{D} > \widehat{C}$ ۲) $\widehat{B} > \widehat{C}$ ۳) $\widehat{A} > \widehat{B}$ ۴) $\widehat{B} > \widehat{D}$

۵۱. چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره است. اگر $AB$ کوچکترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری، همواره درست است؟

۱) $\widehat{C} > \widehat{A}$ ۲) $\widehat{B} < \widehat{A}$ ۳) $\widehat{D} < \widehat{C}$ ۴) $\widehat{D} < \widehat{B}$

۵۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ محیط است. اگر نسبت قاعده‌های این ذوزنقه $\dfrac{۱}{۳}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

۵۳. دو صفحه ی موازی هم و نقطه ی $P$ به فاصله‌های ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد، مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه ی $P$ به فاصله ی ۱۰ واحد باشند، کدام است؟

۱) دایره ای به شعاع ۶ ۲) پاره خط به طول ۶ ۳) دایره ای به شعاع $۴\sqrt{۲}$ ۴) پاره خط به طول $۴\sqrt{۲}$

۵۴. در مثلثی به اضلاع ۶ و ۵ و ۳ واحد نیمساز کوچکترین زاویه‌ی خارجی آن، بزرگترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\dfrac{۳}{۴}$ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\dfrac{۹}{۴}$

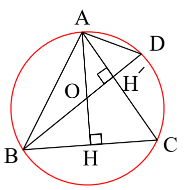
۵۵. در مثلث $ABC$ ، ضلع $AC=۶$ و میانه $BM=۵$، نیمسازهای دو زاویه $AMB$ و $CMB$ دو ضلع دیگر این مثلث را در $P$ و $Q$ قطع می کنند. اندازه $PQ$ کدام است؟

۱) ۳٫۲۵ ۲) ۳٫۵ ۳) ۳٫۷۵ ۴) ۴

۵۶. در مثلث ABC داریم $AB=۳AC$ و $BC=۱۲$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه A است. مقدار $AD^{۲}+AD'^{۲}$ ، کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

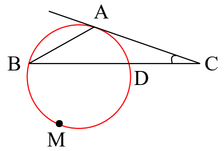
۵۷. در شکل رو به رو، $O$ محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث $ABC$ است. زاویه‌ی $A\widehat{O}D$ برابر کدام است؟




۱) $O\widehat{B}C$ ۲) $C\widehat{A}D$

۳) $O\widehat{A}C$ ۴) $A\widehat{D}O$

۵۸. در شکل مقابل، مماس $AC$ بر دایره با وتر $AB$ از دایره برابرند، اگر کمان $\overset{\frown}{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه ی $C$ چند درجه است؟

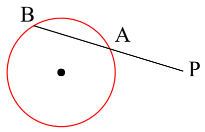



۱) $۲۱^\circ$
۲) $۲۲^\circ$
۳) $۲۳^\circ$
۴) $۲۴^\circ$

۵۹. دو دایره متقاطع در نقطه $A$ مشترک‌اند. خط گذرا بر $A$ دو دایره مفروض را در $B$ و $C$ قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در $B$ و $C$ در نقطه $M$ متقاطع‌اند. در مثلث $MBC$ با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

۱) $MA$
۲) محیط
۳) مساحت
۴) زاویه $\widehat{BMC}$

۶۰. نزدیکترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض $P$ برابر ۸ واحد است. قاطع $PAB$ نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$ اندازه $AB$ چقدر است؟




۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۶۱. دو دایره نامساوی به مرکزهای $O$ و $O'$ مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر $OO'$، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

۱) متقاطع
۲) مماس
۳) متخارج
۴) نامشخص

۶۲. مثلث $ABC$، با معلوم بودن ضلع $BC = ۸$ و ارتفاع $AH = h$ و زاویه‌ی $\widehat{A} = ۸۰^\circ$، قابل رسم است. بیشترین مقدار $h$، کدام است؟

۱) $۴ \sin ۴۰^\circ$
۲) $۴ \cos ۴۰^\circ$
۳) $۴ \tan ۴۰^\circ$
۴) $۴ \cot ۴۰^\circ$

۶۳. در رسم مثلث $ABC$، با معلوم بودن ضلع $BC = ۱۲$، میانه‌ی $AM = ۸$ و زاویه‌ی $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. فاصله‌ی مرکزهای دو دایره‌ی تعیین کننده‌ی راس $A$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۲
۳) ۳
۴) $۲\sqrt{۳}$

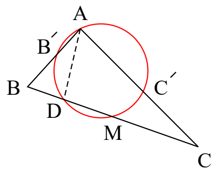
۶۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است، طول قاعده‌ی این مثلث، کدام است؟

۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

۶۵. در مثلث $ABC$ $(AB = AC)$، دایره‌ای در $B$ و $C$ بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = ۶$ و ارتفاع $AH = ۴$ باشد، شعاع این دایره، کدام است؟

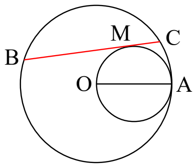
۱) ۳٫۲۵
۲) ۳٫۵
۳) ۳٫۷۵
۴) ۴٫۵

۶۶. در مثلث $ABC$ نقطه $M$ وسط ضلع $BC$ و $AD$ نیمساز زاویه $A$ است. دایره محیطی مثلث $ADM$ رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام است؟




۱) ۱
۲) $\frac{AB}{AC}$
۳) $\frac{AB'}{AC'}$
۴) $\frac{DB}{DM}$

۶۷. در دایره‌ای به شعاع $OA$ وتر $BC$ مماس بر دایره‌ای به قطر $OA$ رسم شده است. مقدار $MC \times MB$، برابر کدام است؟




۱) $MO^۲$
۲) $MA^۲$
۳) $OA^۲$
۴) $MA \cdot MO$

۶۸. اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعا ع های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) $۷\sqrt{۶}$ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۶۹. در دو دایره متقاطع به مراکز O، $O'$ و شعاع های ۳ و ۴ واحد، فاصله نقطه تلاقی دو دایره از وسط $OO'$ برابر $\frac{۱}{۲}OO'$ می باشد، اندازه مماس مشترک محدود به دو نقطه تماس این دو دایره چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۵

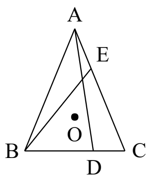
۷۰. دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰٫۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

۱) ۸ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰

۷۱. در یک ذوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۴ ۳) ۴۶ ۴) ۴۸

۷۲. نقطه ی O مرکز ثقل مثلث متساوی الاضلاع ABC است و$BD=CE$ ، کدام بیان نادرست است؟




۱) $OE=OD$ ۲) $OD\perp BE$

۳) $E\widehat{O}D=۱۲۰^\circ$ ۴) $A\widehat{O}C=۱۲۰^\circ$

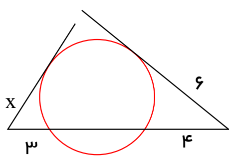
۷۳. دوران یافتهٔ دایرهٔ $C$، به مرکز $(-۲,۳)$ و شعاع $\frac{۵}{۲}$، تحت دوران $\frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ مختصات دایرهٔ $C'$ است. اندازهٔ مماس مشترک داخلی این دو دایره، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۷۴. تصویر دایره‌ی $C$ به مرکز $(۱,۲)$ و شعاع ۱ واحد، تحت تبدیل $T(x,y)=(۳x,۳y)$ دایره‌ی $C'$ است. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۷۵. در شکل مقابل اندازه $x$ چند واحد است؟




۱) $۳\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۵}$

۳) $۲\sqrt{۶}$

۴) ۵

۷۶. تصویر دو نقطه‌ی $A(۲,۴)$ و $B(-۶,۲)$ را تحت تبدیل $D(x,y)=(-\frac{۱}{۲}y,\frac{۱}{۲}x+۱)$ نقاط $A'$ و $B'$ می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط $AB$ و $A'B'$ ، چند درجه است؟

۱) $۳۰^\circ$ ۲) $۶۰^\circ$ ۳) $۹۰^\circ$ ۴) $۱۸۰^\circ$

۷۷. تصویر خط به معادله‌ی $۲x+۳y=۶$، تحت تبدیل $T(x,y)=(۲y-۱,x+۳)$، از نقطه‌ای با کدام مختصات، می‌گذرد؟

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۵,۰)$ ۴) $(۷,۰)$

۷۸. تصویر خط $\Delta$ به معادله‌ی $۳x+۲y=۶$، تحت دوران حول مبدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی خط $\Delta'$ است. معادله‌ی تبدیل یافته‌ی خط $\Delta'$ ، تحت انتقال $T(x,y)=(x-۳,y+۱)$ ، کدام است؟

۱) $۳y-۲x=۱۲$ ۲) $۳y-۲x=۱۵$ ۳) $۲y-۳x=۸$ ۴) $۳y+۲x=۹$

۷۹. تبدیل یافته ی خط به معادله ی $۲y - x = ۵$ ، تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه ی دوران $۹۰^\circ$ در جهت مثلثاتی، خط مفروض را با کدام مختصات قطع می کند؟

۱) $(۵,۵)$ ۲) $(-\frac{۵}{۳}, \frac{۵}{۳})$ ۳) $(۱,۳)$ ۴) $(-۳,۱)$

۸۰. معادله تصویر خط $y + ۲x = ۳$ تحت تجانس به مرکز $(۱,۴)$ و نسبت ۲ به صورت $y + ax = b$ است، $b$ کدام است؟

۱) $-۱$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۵

۸۱. تصویر خط به معادله‌ی $۲x + y = ۶$ را تحت تجانس با نسبت $\frac{۳}{۲}$ و مرکز مبداء مختصات، خط $\Delta$ می‌نامیم. معادله دوران یافته خط $\Delta$، تحت زاویه‌ی $۹۰^\circ$ حول مبداء مختصات، کدام است؟

۱) $۲y - x = ۹$ ۲) $۲y - x = ۴$ ۳) $۲y - x = -۹$ ۴) $۲y - x = -۴$

۸۲. نقطه‌ی $A(۴,۰)$ را حول نقطه‌ی $O'(۲,-۱)$ به اندازه‌ی $\frac{۳\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. مختصات دوران یافته‌ی نقطه‌ی $A$، کدام است؟

۱) $(۳,-۳)$ ۲) $(۳,-۲)$ ۳) $(۲,-۳)$ ۴) $(۲,-۴)$

۸۳. با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد. که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

۱) دوران ۲) بازتاب ۳) انتقال ۴) تجانس

۸۴. در یک مکعب مستطیل، با امتداد تمام یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر، متنافر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۵. عکس کدام قضیه در فضا برقرار است؟

۱) اگر دو خط $d$ و $d'$ موازی باشند، آنگاه هر خط عمود بر $d$ بر خط $d'$عمود است.

۲) اگر خطی لااقل با یک خط از صفحه‌ای موازی باشد، آنگاه آن خط با صفحه‌ی مفروض موازی است.

۳) اگر دو صفحه‌ی $P$ و $Q$ موازی باشند، آنگاه فصل مشترک‌های صفحه‌ی $R$ با آن دو صفحه موازی‌اند.

۴) اگر دو صفحه $P$ و $Q$ موازی باشند، آنگاه بر روی دو خط متقاطع پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کنند.

۸۶. دو صفحهٔ متقاطع $P$ و $Q$ و نقطهٔ $A$ در خارج هر دو صفحه مفروض‌اند. تعداد صفحات $R$ گذرا بر نقطهٔ $A$ و متقاطع با صفحه‌های $P$ و $Q$، فاقد نقطهٔ مشترک این سه صفحه، کدام است؟

۱) یک ۲) دو ۳) نشدنی ۴) بی‌شمار

۸۷. اگر دو خط $\Delta$ و $\Delta'$ بر خط $D$ عمود باشند، $\Delta$ و $\Delta'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) غیر مشخص ۲) موازی ۳) عمود بر هم ۴) داخل یک صفحه

۸۸. نقطه‌ی $A$ در خارج صفحه مثلث $BCD$ است. صفحه‌ی گذرا بر $A$ را طوری تعیین کنید، که نقاط $D$ و $C$ و $B$ از آن به یک فاصله باشند. تعداد این نوع صفحات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۹. نقطه‌ی $O$ و خط $d$ در خارج صفحه‌ی $P$ مفروض‌اند، در کدام حالت فقط یک خط گذرنده بر نقطه‌ی $O$ موازی صفحه‌ی $P$ و متقاطع با خط $d$، وجود دارد؟

۱) $d \subset P$ ۲) $d || P$

۳) $d \cap P \neq \varnothing$ ۴) صفحه‌ی گذرنده بر $O$ و $d$ موازی صفحه‌ی $P$

۹۰. صفحه‌ی $P$ و خط $d$ و نقطه‌ی $A$ مفروض هستند. اگر صفحه‌ی گذرا بر نقطه‌ی $A$ و خط $d$ را $Q$ بنامیم، در کدام حالت، رسم خط گذرا از نقطه‌ی $A$ و متقاطع با خط $d$ و موازی صفحه‌ی $P$، غیرممکن است؟

۱) $Q \cap P \neq \phi, d \parallel P$ ۲) $Q \cap P = \phi, d \parallel P$

۳) $Q \cap P \neq \phi, d \nparallel P$ ۴) $Q \cap P = \phi, d \nparallel P$

۹۱. سه نقطه‌ی $A$، $B$ و $C$ غیر واقع در یک راستا و خط $\Delta$ غیرموازی با صفحه این سه نقطه مفروض هستند. تعداد صفحات موازی $\Delta$ که هر سه نقطه‌ی مفروض از آن به یک فاصله باشند، کدام است؟

۱) **۱** ۲) **۲** ۳) **۳** ۴) **۴**

۹۲. اگر خط d با صفحه ی P موازی باشد، هر صفحه ی غیرموازی با P و گذرنده از d :

۱) می تواند عمود بر d باشد.
۲) الزاماً عمود بر P می‌باشد.
۳) الزاماً فصل مشترکی با P و عمود بر d دارد.
۴) الزاماً فصل مشترکی با P و موازی با d دارد.

۹۳. نقطه‌ی $M$ به فاصله‌ی **۴** واحد از صفحه‌ی مفروض $P$ داده شده است. چند خط راست داخل صفحه‌ی $P$ می‌توان رسم کرد که فاصله‌ی $M$ از آن خطوط برابر **۵** باشد؟

۱) **۱** ۲) **۲** ۳) **۴** ۴) بی‌شمار

۹۴. دو نقطه‌ی $A$ و $B$ و خط $d$ غیر واقع بر یک صفحه‌ی مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای بر خط $d$ طوری بیابیم، که از دو نقطه‌ی مفروض $A$ و $B$ به یک فاصله باشند. در حالت $d \perp AB$ تعداد جواب‌ها چگونه است؟

۱) جواب منحصر به فرد
۲) الزاماً فاقد جواب
۳) الزاماً بیشمار جواب
۴) فاقد جواب یا بیشمار جواب

۹۵. چهار نقطه غیر واقع در یک صفحه مفروض‌اند. صفحه‌ای غیر موازی با صفحات گذرا بر سه نقطه‌ی مفروض، چنان بیابید که هر **۴** نقطه از آن صفحه به یک فاصله باشند، تعداد این صفحات کدام است؟

۱) **۱** ۲) **۲** ۳) **۳** ۴) **۴**

۹۶. نقطه‌ی $A$ و خط $d$ و صفحه‌ی $P$ مفروض‌اند، در رسم خطی گذرا بر $A$ و عمود بر $d$ و موازی صفحه‌ی $P$، در کدام حالت، بی‌شمار جواب دارد؟

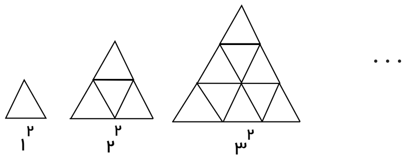
۱) $d \in P$ ۲) $d \parallel P$ ۳) $d \perp P$ ۴) $d \cap P \neq \phi$

۹۷. دو خط متنافر $d$ و $d'$ و نقطه‌ی $A$ مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطه‌ی $A$ خطی بگذرد و بر هر دو خط $d$ و $d'$ عمود باشد. تعداد جواب، کدام است؟

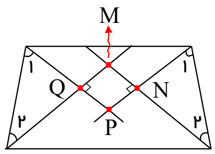
۱) فاقد جواب ۲) همواره یک جواب ۳) بی‌شمار جواب ۴) یک جواب یا فاقد جواب

۱.گزینه ۳

با توجه به اشکال زیر و استدلال استقرایی ، تعداد مثلث‌های مورد نظر برابر عدد مربع کامل است. پس فقط با $۵^۲ = ۲۵$ مثلث می‌توان چنین کاری کرد.

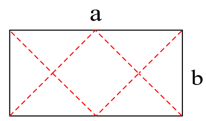



۲.گزینه ۲




با توجه به شکل داریم $\hat{Q} = \hat{N} = ۹۰^\circ$، زیرا بنابر قضیه‌ی خطوط موازی $\hat{۱} + \hat{۲} = ۹۰$ می‌باشد. پس $\hat{Q} + \hat{N} = ۱۸۰^\circ$ در نتیجه چهارضلعی $MNPQ$ محاطی است.

۳.گزینه ۲ از تلاقی نیمسازهای داخلی مستطیل به اضلاع $a$ و $b$ مربعی به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}|b-a|$ ایجاد می‌شود.




$$\text{ضلع مربع} = \frac{|b-a|}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۵-۸}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{۷}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۲} = ۲۴/۵$$

۴.گزینه ۱ در مستطیلی به اضلاع $a$ و $b$ ، محل تلاقی نیمسازهای داخلی ، مربعی به ضلع $\frac{|b-a|}{\sqrt{۲}}$ است که مساحت آن برابر است با:

$$S = \left(\frac{۹-۴}{\sqrt{۲}}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵$$

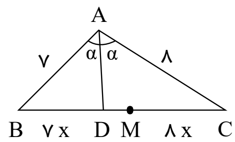
۵.گزینه ۲

می دانیم از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی الاضلاع به اضلاع $b$ و $a$ $(a \neq b)$ ، همواره یک مستطیل به وجود می آید. اگر $\theta$ زاویه ی بین دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع باشد، طول و عرض مستطیل از رابطه ی $|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}$ و $|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}$ به دست می آید. داریم:

$$a = ۹ \ , \ b = ۵ \ , \ \theta = ۶۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} |۹-۵|\sin\frac{۶۰^\circ}{۲} = ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۲ \ \text{عرض مستطیل} \\ |۹-۵|\cos\frac{۶۰^\circ}{۲} = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳} \ \text{طول مستطیل} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = ۲ \times ۲\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

۶.گزینه ۲ توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = ۷x$ و $DC = ۸x$ می‌باشد و در نتیجه:

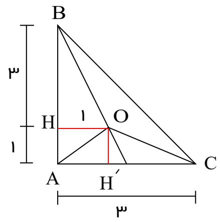



$$۷x + ۸x = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{۲۸}{۵} \\ DC = \frac{۳۲}{۵} \end{cases}$$

و از طرفی $BM = MC = ۶$ می‌باشد، پس:

$$MD = BM - BD = ۶ - \frac{۲۸}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۷.گزینه ۳ می‌دانیم در هر مثلث، نیمساز داخلی یک رأس، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کند. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای سه رأس یک مثلث همرأس‌اند. با توجه به شکل، به وضوح دیده می‌شود که بلندترین نیمساز، بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود. بنابراین مطلوب سؤال طول $OB$ است، داریم:

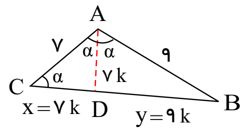



$$\star : OH = r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2}(3)(4)}{\frac{3+4+5}{2}} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\overset{\Delta}{OBH} : OB^2 = BH^2 + OH^2 = 9 + 1 = 10 \Rightarrow OB = \sqrt{10}$$

$(\star)$ : می‌دانیم نقطه تلاقی نیمسازهای مثلث یعنی $O$ از اضلاع مثلث به یک فاصله است و این فاصله برابر شعاع دایره محاطی مثلث است.

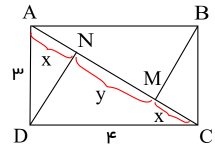
۸. گزینه ۱ اگر نیمساز زاویه‌ی $A$ را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع $BC$، $x$ و $y$ باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x = 7k$ و $x = 9k$. از طرفی چون مثلث $ADC$ متساوی الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد. هم‌چنین می‌دانیم اگر $AD$ نیمساز زاویه‌ی $A$ در مثلث $ABC$ باشد، آن‌گاه:




$$AD^2 = AC \cdot AB - CD \cdot DB \Rightarrow (7k)^2 = 7 \times 9 - (7k)(9k) \Rightarrow 49k^2 + 63k^2 = 63$$

$$\Rightarrow 112k^2 = 63 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow k = \frac{3}{4} \Rightarrow BC = x + y = 16k = 16\left(\frac{3}{4}\right) = 12$$

۹. گزینه ۲ $DN$ نیمساز زاویه ی $D$ در مثلث $ADC$ است و در نتیجه ضلع $AC$ را به نسبت اضلاعِ زاویه ی $D$ تقسیم می کند، یعنی داریم:



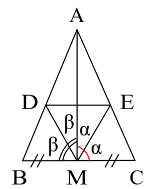

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DA}{DC} \Rightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{y+x+x} = \frac{3}{4+3} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{y+2x=AC=5\ (\star)} \frac{x}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow x = \frac{15}{7}$$

$$MN = y = AC - 2x = 5 - 2\left(\frac{15}{7}\right) \Rightarrow MN = \frac{5}{7}$$

$(\star)$ : توجه کنید:

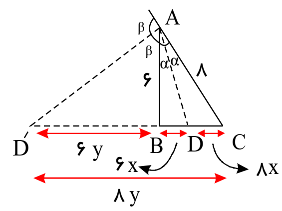
$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

۱۰. گزینه ۴




$$\left.\begin{array}{l} \frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC} \\ \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{MB} \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow DE \| BC \xrightarrow{\text{عکس قضیه‌ی تالس}} \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

۱۱. گزینه ۳ همواره در یک مثلث کوچک‌ترین زاویه روبروی کوچک‌ترین ضلع است. از طرفی نیمسازهای داخلی و خارجی، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری تقسیم می‌کنند (مطابق شکل). بنابراین:




$$\begin{cases} 6x + 8x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{14} \\ 8y - 6y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$DD' = 6y + 6x = 6\left(\frac{5}{2}\right) + 6\left(\frac{5}{14}\right) = 15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$$

۱۲. گزینه ۳ اگر $M$ نقطه‌ای دلخواه درون مثلث به طول اضلاع $a, b, c$ باشد، مجموع فواصل نقطه‌ی دلخواه $M$ از سه رأس آن، در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{a+b+c}{2} < MA + MB + MC < a + b + c$$

بنابراین با توجه به اضلاع مثلث ارائه شده، یعنی $3, 3-\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{2}$، داریم:

$$\frac{3+2+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}}{2}<MA+MB+MC<3+2+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 4<MA+MB+MC<8$$

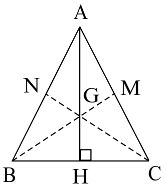
که از بین اعداد ارائه شده، فقط $4\sqrt{2}$ در این نامساوی صدق می‌کند.

۱۳.گزینه ۴

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\Rightarrow AG=\frac{2}{3}AH=8$$

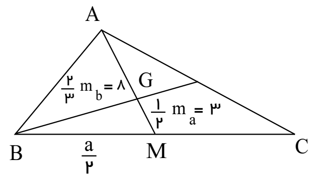
دورترین رأس نسبت به نقطه ی $G$، رأس $A$ است و در نتیجه جواب مسأله $AG=8$ است. برای اطمینان اندازه ی $BG=CG$ را نیز به دست می آوریم. می دانیم $GH=\frac{1}{3}AH=4$، بنابراین:

$$BG=\sqrt{BH^2+GH^2}=\sqrt{5^2+4^2}\Rightarrow BG=CG=\sqrt{41}<8$$




۱۴.گزینه ۳ مثلث $BGM$ با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است، پس باید:

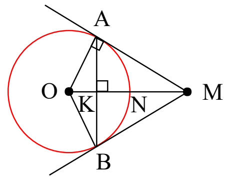
$$GM=\frac{1}{3}m_a=3,BG=\frac{2}{3}m_b=8$$
$$8-3<\frac{a}{2}<8+3\Rightarrow 10<a<22$$




در گزینه ها تنها $a=15$ قابل قبول است.

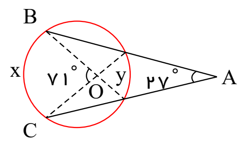
۱۵.گزینه ۳ از $M$ به مرکز $O$ وصل می کنیم تا دایره را در $N$ قطع کند در این صورت $N$ نزدیکترین نقطه دایره تا $M$ است.

$$MN=4\sqrt{2}-4$$
$$MO=MN+R=4\sqrt{2}-4+4=4\sqrt{2}$$
$$\overset{\triangle}{OAM}:OA^2=OK\times OM\Rightarrow 4^2=OK\times 4\sqrt{2}\Rightarrow OK=2\sqrt{2}$$



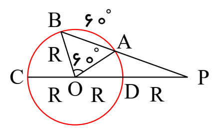

۱۶.گزینه ۱ با توجه به اندازه های روی شکل داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=71^\circ\\ \dfrac{x-y}{2}=27^\circ\end{cases}\Rightarrow x=98^\circ$$




۱۷.گزینه ۲ از $P$ به مرکز $O$ وصل می کنیم تا دایره را در نقاط $D$ و $C$ قطع کند در این صورت $PC$ بیشترین فاصله نقاط دایره تا $P$ است، داریم:

$$\begin{cases}PC=3R\Rightarrow PD+2R=3R\Rightarrow PD=R\\ PA\cdot PB=PD\cdot PC\Rightarrow PA(PA+AB)=(R)(3R)\end{cases}$$

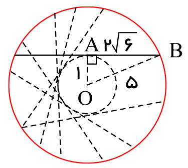



از طرفی مثلث $OAB$ متساوی الساقین است و زاویه ی رأس آن $60^\circ$ است، پس متساوی الاضلاع نیز هست یعنی $AB=R$، بنابراین:

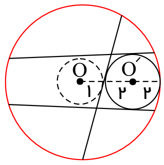
$$PA(PA+R)=3R^2\Rightarrow PA^2+PA(R)-3R^2=0$$
$$\Delta=R^2+12R^2=13R^2\Rightarrow PA=\frac{-R+\sqrt{13}R}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)R$$

۱۸.گزینه ۳ وترهای به طول $4\sqrt{6}$ که در درون دایره ای به شعاع ۵ رسم می شوند، همگی بر دایره ای به شعاع ۱ و هم مرکز با دایره ی فوق مماس اند، زیرا در مثلث قائم الزاویه ی $OAB$ داریم:

$$OA^۲ = OB^۲ - AB^۲ \Rightarrow OA^۲ = ۲۵ - ۲۴ = ۱ \Rightarrow OA = ۱$$



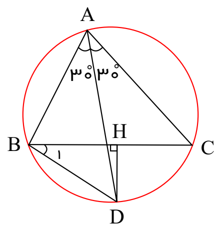

حال این دایره ی به شعاع ۱ بر دایره به شعاع ۲ مماس خارج خواهد شد. چون این دو دایره مماس خارج هستند، سه مماس مشترک دارند که جواب های مسأله می باشند.




۱۹.گزینه ۳

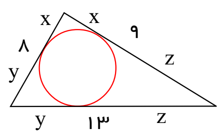
رأس $A$ روی کمان در خور $۶۰^\circ$ وابسته به ضلع $BC$ است نیمساز زاویه ی $A$ همواره از وسط کمان $BC$ می گذرد.
پس نقطه ثابت مورد نظر $(D)$ وسط کمان $BC$ است.
اگر از $D$ عمود $DH$ را بر $BC$ وارد کنیم آنگاه $BC$ نصف می شود پس $BH = ۳$ از طرفی $\hat{B}_۱ = D\hat{A}C = ۳۰^\circ$ داریم:

$$\overset{\Delta}{BDH} : B\hat{D}H = ۶۰^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BD \Rightarrow ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BD \Rightarrow BD = ۲\sqrt{۳}$$




۲۰.گزینه ۱ می‌دانیم مماس‌های رسم شده از هر نقطه بر دایره با هم برابرند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۸ \\ x+z=۹ \\ y+z=۱۳ \end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Rightarrow} ۲(x+y+z)=۳۰ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$



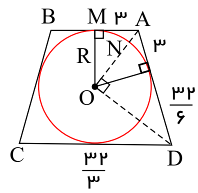

بنابراین $x = ۲$ ، $y = ۶$ و $z = ۷$ می باشد. در نتیجه

$$\frac{x}{y} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲۱.گزینه ۳

درذوزنقه متساوی الساقین محیط بردایره به شعاع $R$ قطر دایره واسطه هندسی بین دو قاعده است. یعنی $۴R^۲ = AB \times CD$ داریم:

$$R^۲ = ۳ \times \frac{۳۲}{۶} \Rightarrow R = ۴$$




از طرفی اگر از $A$ به مرکز $O$ وصل کنیم تا دایره را در $N$ قطع کند آنگاه $AN$ کوتاهترین فاصله ی $A$ تا دایره است.
در مثلث $OMA$ داریم $OA^۲ = R^۲ + ۳^۲ \Rightarrow OA = ۵$ پس:

$$AN = OA - R = ۱$$

۲۲.گزینه ۳

$$T(x,y) = (-y+۲, x-۱)$$

تبدیل فوق ترکیب یک دوران ($۹۰^\circ$) و انتقال در امتداد بردار $(۲, -۱)$ است چون هر دو تبدیل ایزومتری است لذا ترکیب آن‌ها ایزومتری است.

۲۳.گزینه ۱ روش اول:

می‌توان دو نقطه‌ی فرضی مانند $A(۰,۰)$ و $B(۱,۱)$ که فاصله‌ی آن‌ها اکنون $\sqrt{۲}$ است را تحت اثر این نگاشت‌ها تبدیل نمود و فاصله‌ی آن‌ها را بعد از تبدیل بررسی کرد:

$$۱)\begin{cases} D(۰,۰)=(۰,۳) \\ D(۱,۱)=(-۱,۴) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۲} \text{ ق ق}$$

$$۲)\begin{cases} D(۰,۰)=(۰,۰) \\ D(۱,۱)=(-۱,۲) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵} \text{ غ ق ق}$$

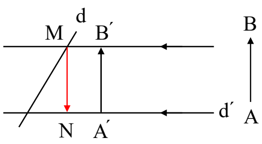
$$۳)\begin{cases} D(۰,۰)=(۱,۰) \\ D(۱,۱)=(۲,۲) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵} \text{ غ ق ق}$$

$$۴)\begin{cases} D(۰,۰)=(۰,۰) \\ D(۱,۱)=(۱,۰) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{۱^۲+۰^۲}=۱ \text{ غ ق ق}$$

روش دوم:

نکته: هرگاه در تبدیل، $x$ یا $y$ (یا هر دو) ضریب عددی غیر از ۱ بپذیرند، تبدیل ایزومتری نیست.

۲۴.گزینه ۲




مطابق شکل یک نقطه از خط $d'$ مثل $A'$ را با بردار $AB$ انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی $B'$ برسیم و از آن جا خطی موازی $d'$ رسم می‌کنیم تا خط $d$ را در نقطه‌ی $M$ قطع کند. حال نقطه‌ی $M$ را با بردار $BA$ انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی $N$ واقع بر خط $d'$ حاصل می‌شود. اکنون پاره‌خط $MN$ همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع $d$ و $d'$ واقع است و موازی و مساوی $AB$ نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خط‌ها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و ۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.

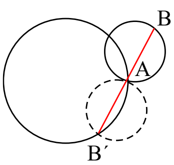
۲۵.گزینه ۲ می‌دانیم فاصله‌ی مرکز تقارن از دو خط یکسان است.

از طرفی فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر $\dfrac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است. پس:

$$\left.\begin{array}{l} x-۲y-۴=۰ \\ x-۲y+۶=۰ \\ A(x_۰,y_۰)=A(۲,a) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{|۲-۲a-۴|}{\cancel{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}}=\frac{|۲-۲a+۶|}{\cancel{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}}$$

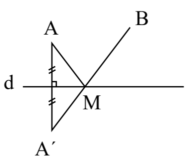
$$\rightarrow \begin{cases} -۲\cancel{-۲a}=۸\cancel{-۲a} \rightarrow -۲=۸ \text{ غ ق} \\ -۲-۲a=-(۸-۲a) \rightarrow ۴a=۶ \rightarrow \boxed{a=\frac{۳}{۲}} \end{cases}$$

۲۶.گزینه ۴




اگر دایره ی کوچک تر را نسبت به نقطه ی $A$ (نقطه ی تقاطع دو دایره ی کوچک و بزرگ) بازتاب دهیم، دایره ی خط چین به دست می آید. واضح است که $AB=AB'$ زیرا نقطه ی $B'$ بازتاب نقطه ی $B$ نسبت به مرکز $A$ است. از طرفی $AB'$ وتری از دایره ی بزرگ تر است. بنابراین از نقطه ی $A$ خطی گذشته (خط $BB'$) که در دو دایره ی بزرگ و کوچک، وترهای مساوی جدا کرده است (وتر $AB$ در دایره ی کوچک = وتر $AB'$ در دایره ی بزرگ). پس گزینه ی (۴) (یعنی بازتاب نسبت به نقطه ی $A$) ما را به مقصود رسانده است.

۲۷.گزینه ۱




ابتدا بازتاب $A$ را نسبت به خط $d$ به دست مي‌آوريم تا $A'$ به دست آيد سپس $A'$ را به $B$ وصل مي كنيم تا $d$ را در $M$ قطع كند. در اين صورت $MA+MB$ مينيمم است.

نکته: این مسأله یک سؤال تاریخی و قدیمی است به نام مسأله هرون در صفحه.

۲۸.گزینه ۴ نقطه‌ی $C$ دوران یافته‌ی نقطه‌ی $B$ حول نقطه‌ی $A$ است (زاویه دوران $۵۰^\circ$)

نقطه‌ی $D$ دوران یافته‌ی نقطه‌ی $E$ حول نقطه‌ی $A$ است (زاویه دوران $۵۰^\circ$)
پس پاره خط $CD$ دوران یافته‌ی $BE$ حول نقطه‌ی $A$ است. (زاویه دوران $۵۰^\circ$) بنابراین زاویه‌ی بین $BE$ و $CD$ برابر $۵۰^\circ$ است بنابراین $\alpha = ۱۳۰^\circ$ است.

۲۹.گزینه ۱

ضابطه‌ی دوران $۹۰^\circ$ درجه به مرکز مبدأ به صورت $R(x,y) = (-y,x)$ است.

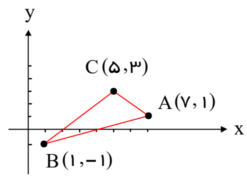
$$\begin{cases} -y = x' \\ x = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = y' \end{cases}$$

$$y - ۲x = ۳ \xrightarrow{\text{تحت دوران}} (-x') - ۲y' = ۳ \Rightarrow x' + ۲y' + ۳ = ۰$$

$$x' + ۲y' + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{تحت انتقال}} (x'' - ۱) + ۲(y'' + ۲) + ۳ = ۰ \Rightarrow x'' + ۲y'' + ۶ = ۰$$

۳۰.گزینه ۱ باید مساحت مثلث را بدست آورده در $\frac{۱}{۴}$ آن را ضرب کنیم

مثلث $ABC$ در رأس $C$ قائمه است زیرا شیب $BC, AC$ عکس قرینه‌ی یکدیگرند.



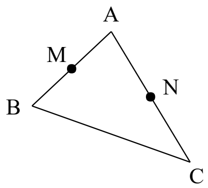

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AC \times BC = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۸})(\sqrt{۳۲}) = ۸$$

$$S_{\overset{\Delta}{A'B'C'}} = \frac{۱}{۴} \times ۸ = ۲$$

۳۱.گزینه ۴

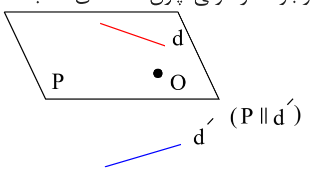
دو خط متنافر هستند. در غیر این صورت فقط یک جفت صفحه موازی هم شامل هر کدام از آنها وجود ندارد.

۳۲.گزینه ۱ دو صفحه جواب است یکی صفحه‌ای که موازی مثلث $ABC$ و شامل خط $\Delta$ است. یکی صفحه‌ای که از اوساط دو ضلع $AC, AB$ گذشته و شامل خط $\Delta$ است.

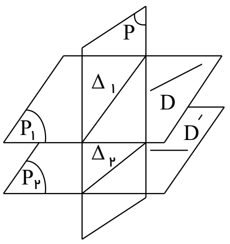



۳۳.گزینه ۲

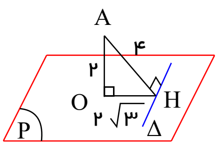
صفحه‌ی گذرنده از $d$ و $O$ یعنی صفحه‌ی $P$ اگر خط $d'$ را در یک نقطه قطع کند یک خط با این شرایط وجود دارد ولی چون صفحه‌ی $P$ با خط $d'$ موازی است پس خطی با این شرایط وجود ندارد.



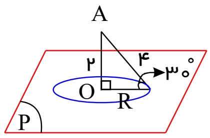

۳۴.گزینه ۳ صفحات دوم و سوم یعنی $P_۲$ و $P_۳$ موازی هم خواهند شد و در نتیجه این سه صفحه کلاً دوبه دو دارای ۲ فصل مشترک $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$خواهند شد.




۳۵.گزینه ۱ وقتی خط $\Delta$ و صفحه‌ی $P$ حداقل در دو نقطه مشترک‌اند یعنی خط $\Delta$بر صفحه‌ی $P$ منطبق است و مطابق شکل فاصله‌ی پای دو عمود $۲\sqrt{۳}$ است.

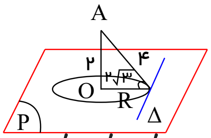



از طرفی خطوطی که از $A$ می‌گذرند و با صفحه‌ی $P$ زاویه‌ی $۳۰^\circ$ می‌سازند، صفحه‌ی $P$ را در دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۳}$ قطع می‌کنند که مرکز آن دایره، نقطه‌ی $O$ پای عمودی است که از $A$ بر صفحه‌ی $P$ رسم می‌شود.




$R=\sqrt{۱۶-۴}=۲\sqrt{۳}$

بنابراین خطوطی که از $A$ می‌گذرند و با صفحه‌ی $P$ زاویه‌ی $۳۰^\circ$ می‌سازند در یک نقطه خط $\Delta$ را قطع خواهند کرد.

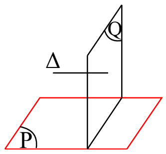



۳۶.گزینه ۴ چهار دسته صفحه وجود دارد که فاصله‌ی آن صفحات از سه رأس مثلث دلخواه $ABC$ به یک اندازه است. اگر $A'$ و $B'$ و $C'$ به ترتیب وسط‌های اضلاع $BC$ و $AC$ و $AB$ باشند، دسته صفحات گذرنده از خطوط $A'B'$ و $B'C'$ و $A'C'$ دارای فاصله‌ی یکسان از سه رأس مثلث هستند. با توجه به این که نقطه‌ی $G$، محل تلاقی میانه‌ها از هیچ یک از سه دسته صفحه‌ی بیان شده نمی‌گذرد، بنابراین این سه دسته صفحه دارای شرایط لازم نیستند.

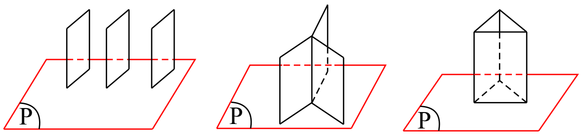
دسته‌ی چهارم که در آن، فاصله‌ی سه رأس مثلث از آن صفحات برابر باشد، صفحات موازی با صفحه‌ی شامل مثلث $ABC$ است. این صفحات موازی نیز نمی‌توانند شامل خط $\Delta$ باشند، چون آن صفحات را قطع می‌کند. بنابراین هیچ صفحه‌ای با شرایط این مسأله وجود ندارد.

۳۷.گزینه ۱

اگر دو صفحه‌ی $P, Q$ بر هم عمود باشند هر خط عمود بر $Q$ با $P$ موازی است.

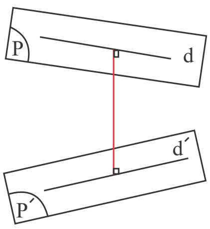



۳۸.گزینه ۴ مطابق شکل‌های زیر فقط گزینه‌ی (۴) ممکن نیست و در نتیجه پاسخ تست است.

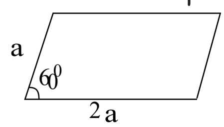



گزینه‌ی (۱) گزینه‌ی (۲) گزینه‌ی (۳)

۳۹.گزینه ۱ مطابق شکل مقابل اگر $D$ و $D'$ متنافر باشند، فقط یک جفت صفحه می‌توان از $D$ و $D'$ عبور داد که با هم موازی باشند. توجه کنید که اگر دو خط موازی هم باشند، بیشمار جفت صفحه موازی هم و اگر دو خط متقاطع (یا عمود برهم) باشند، فقط یک صفحه منحصر به فرد (و نه جفت صفحه) از خطوط $D$ و $D'$ می‌گذرد.



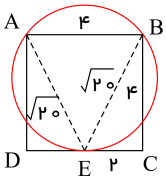

۴۰.گزینه ۲ نکته: در حالت کلی نیم‌سازهای داخلی متوازی الاضلاعی به اضلاع $a$ و $b$ و زاویه‌ی بین $\theta$، مستطیلی به اضلاع $|a-b|\cos\frac{\theta}{۲}$ و $|a-b|\sin\frac{\theta}{۲}$ می‌سازند.




$$S=(۲a-a)^۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$$

$$S=a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow\frac{S}{a^۲\sqrt{۳}}=\frac{a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}}{a^۲\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۴}$$

۴۱.گزینه ۲ مثلث $ABE$ محاط در دایره است، لذا مجهول شعاع دایره‌ی محیطی مثلث $ABE$ است.




$$R=\frac{AB}{۲\sin\widehat{E}}$$

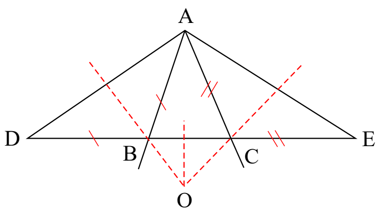
نکته: شعاع دایره‌ی محیطی مثلثی که یک ضلع و زاویه‌ی مقابل آن معلوم است، از رابطه‌ی $R=\dfrac{a}{۲\sin\alpha}$ قابل محاسبه است.

$$\overset{\Delta}{ABE}\xrightarrow{\text{طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها}}۱۶=۲۰+۲۰-۲(۲۰)\cos\widehat{E}\Rightarrow\cos\widehat{E}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\widehat{E}=\frac{۴}{۵}$$

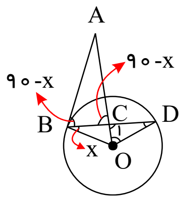
$$R=\frac{AB}{۲\sin\widehat{E}}=\frac{۴}{۲\left(\frac{۴}{۵}\right)}=۲/۵$$

۴۲.گزینه ۴

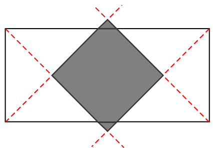
دو مثلث ABD و $ACE$ متساوی‌الساقین هستند در ضمن می‌دانیم مرکز دایره محیطی مثلث $ADE$ نقطه تلاقی عمود منصف‌های اضلاع آن می‌باشد. فرض کنیم عمود منصف های اضلاع AD و AE همدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. در این صورت نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC نیز می‌باشد. بنابراین O روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A قرار دارد.




۴۳.گزینه ۲ شعاع $OB$ بر ضلع $AB$ عمود است از طرفی مثلث $OBD$ متساوی‌الساقین می‌باشد $(OB=OD)$ پس اگر $O\hat{D}B=O\hat{B}D=x$ آنگاه $C\hat{B}A=B\hat{C}A=۹۰^\circ-x$ در نتیجه $\hat{C}_۱=۹۰^\circ-x$ بنابراین مثلث $OCD$ قائم‌الزاویه است و $\hat{O}_۱=۹۰^\circ$



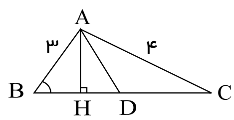

۴۴.گزینه ۴



مطابق شکل از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل به اضلاع a و b، یک مربع به ضلع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}|a-b|$ به دست می آید. مساحت این مربع برابر $S=\dfrac{(a-b)^۲}{۲}$ است. باتوجه به داده‌های سؤال، مساحت مربع پدید آمده برابر است با:

$$S=\frac{(۱۱-۵)^۲}{۲}=\frac{۳۶}{۲}=۱۸$$

۴۵.گزینه ۱ بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم الزاویه‌ی $ABC$ داریم:



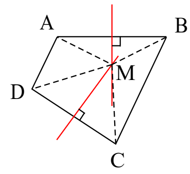

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۹+۱۶=۲۵\Rightarrow BC=۵$$

$$AB^۲=BH\cdot BC\Rightarrow ۳^۲=۵BH\Rightarrow BH=\frac{۹}{۵}$$

$$\text{نیمساز } AD\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{BD}{BC}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{BD}{۵}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow BD=\frac{۱۵}{۷}$$

$$HD=BD-BH=\frac{۱۵}{۷}-\frac{۹}{۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

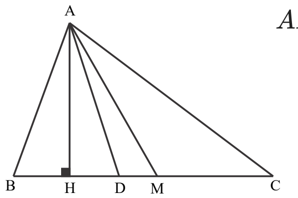
۴۶.گزینه ۳ اگر $M$ نقطه ی تلاقی عمود منصف های $AB$ و $DC$ باشد با توجه به عکس قضیه ی لولا داریم :




$$\overset{\Delta}{BMC},\overset{\Delta}{AMD}:\begin{cases}MB=MA\\ MC=MD\Rightarrow B\hat{M}C>A\hat{M}D\\ BC>AD\end{cases}$$

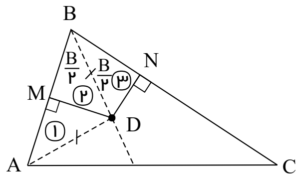
۴۷.گزینه ۴

در هر مثلث $ABC$ اگر $AH$ ارتفاع و $AD$ نیمساز و $AM$ میانه باشد آنگاه همواره $AH<AD<AM$ .




۴۸.گزینه ۱

ابتدا مثلثی رسم می کنیم که $\hat{C}<\hat{A}$ باشد:




۱ - $MD$ عمود منصف ضلع $AB$ است پس $(I)$ $\boxed{MA=MB}$ است.

۲ - $BD$ نیمساز درونی $B$ است پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $NBD$ و $MBD$ همنهشت هستند. پس:

$\boxed{BN=BM}$ $(II)$

از مقایسه‌ی $(I)$ و $(II)$ نتیجه می گیریم که:

$\boxed{AM=BM=BN}$ $(*)$

از طرفی $\hat{C}<\hat{A}$ است، پس حتما ضلع مقابل $\hat{A}$ بزرگتر از ضلع مقابل $\hat{C}$ می باشد:

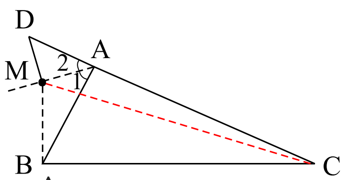
$$\hat{C}<\hat{A}\Rightarrow \underbrace{AB}_{۲BM}<\underbrace{BC}_{BN+CN}$$

با توجه به رابطه‌ی $*$ به جای $BM$ ، $BN$ می گذاریم:

$$۲BN<BN+CN\rightarrow BN<CN$$

۴۹.گزینه ۱

در امتداد ضلع $AC$ نقطه‌ی $D$ را طوری انتخاب می‌کنیم تا $AD=AB$ باشد در این صورت دو مثلث $AMD$ و $AMB$ به حالت (ض‌زض) همنهشت می‌شوند پس $MD=MB$ داریم.

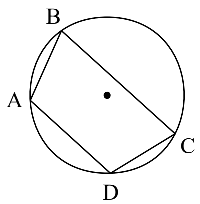



$$\overset{\Delta}{CMD}:CD<MD+MC\Rightarrow CA+AD<MD+MC\xrightarrow[AD=AB]{MD=MB}CA+AB<MB+MC$$

بنابراین: $\dfrac{MB+MC}{CA+AB}>۱$

۵۰.گزینه ۴ می‌دانیم وتری که از مرکز دایره دورتر باشد بزرگتر است و بالعکس. داریم:

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:




$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}>\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲}=\hat{C}$$

پس گزینه‌ی **۱** صحیح است.

$$\widehat{B}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}}{۲}>\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲}=\widehat{C}$$

پس گزینه‌ی **۲** صحیح است.

$$\widehat{A}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}}{۲}>\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}=\widehat{B}$$

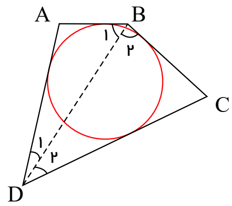
پس گزینه‌ی **۳** صحیح است.

.۵۱ گزینه ۴ $AB+DC=BC+AD$ در چهار ضلعی محیطی وقتی $AB<AD$ لذا برای برقراری شرط بالا باید $BC<DC$

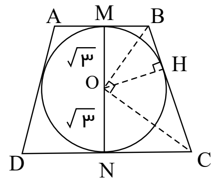
$$DC-BC=\underbrace{AD-AB}_{>۰}\Rightarrow DC-BC>۰$$

$$\Rightarrow DC>BC$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}:AB<AD\Rightarrow \widehat{D}_۱<\widehat{B}_۱\\ \overset{\Delta}{BDC}:BC<DC\Rightarrow \widehat{D}_۲<\widehat{B}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{D}_۱+\widehat{D}_۲<\widehat{B}_۱+\widehat{B}_۲\to \widehat{D}<\widehat{B}$$




.۵۲ گزینه ۴




$$\frac{AB}{CD}=\frac{۱}{۳}\ ,\ r=\sqrt{۳}$$

$$B\hat{O}C=۹۰^\circ\ ,\ BH=\frac{AB}{۲}\ ,\ CH=\frac{CD}{۲}\ ,\ H=۹۰^\circ$$

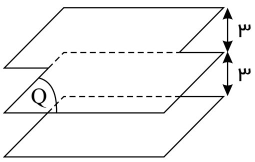
$$\Rightarrow OH^۲=BH\times CH\Rightarrow(\sqrt{۳})^۲=\frac{AB}{۲}\times\frac{CD}{۲}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AB\times CD=۱۲\\ \frac{AB}{CD}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow CD=۳AB\end{array}\right.\Rightarrow AB\times ۳AB=۱۲$$

$$\Rightarrow AB=۲\ ,\ CD=۶\Rightarrow S=\frac{(AB+CD)\times MN}{۲}=\frac{(۲+۶)\times ۲\sqrt{۳}}{۲}=۸\sqrt{۳}$$

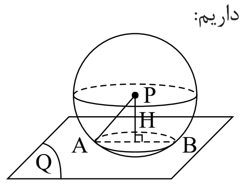
.۵۳ گزینه ۱

با توجه به فرض مسئله، دو صفحه‌ی مورد نظر به فاصله ی **۶** واحد از هم قرار دارند. مکان هندسی نقاطی که از این دو صفحه به یک فاصله باشند، صفحه‌ای مانند $Q$ موازی آن دو صفحه و به فاصله‌ی **۳** از آن‌هاست.




هم چنین مکان هندسی نقاطی از فضا که به فاصله ی ۱۰ از نقطه ی $P$ قرار دارند، کره‌ای به مرکز $P$ و شعاع ۱۰ است. با توجه به شکل پایین از تقاطع صفحه ی $Q$ و این کره، دایره‌ای به دست می‌آید. اگر $AB$ قطر و $H$ مرکز این دایره باشد، آن‌گاه در مثلث قائم الزاویه‌ی $PAH$ داریم:

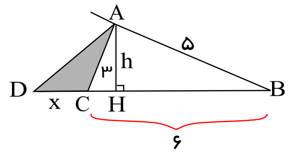
$$PA=۱۰\ ,\ PH=۵+۳=۸\ \to\ AH=\sqrt{PA^۲-PH^۲}=۶$$




پس مکان هندسی مورد نظر، دایره ای به شعاع **۶** است.

۵۴.گزینه ۲

بزرگترین زاویه روبه‌رو به بزرگترین ضلع است و زاویه‌ی خارجی آن از همه کوچک تر است.

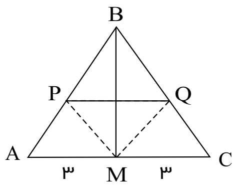



نیمساز خارجی $AD \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow x = ۹$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH \times DC}{\frac{۱}{۲}AH \times BC} = \frac{DC}{CB} = \frac{۹}{۶} = \frac{۳}{۲}$$

۵۵.گزینه ۳

شکل زیر را در نظر بگیرید.




در مثلث $AMB$ ، پاره خط $PM$ نیم ساز زاویه ی $M$ است، پس

$$\frac{BP}{AP} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{۵}{۳} \qquad (۱)$$

در مثلث $BMC$ ، پاره خط $QM$ نیم ساز زاویه ی $M$ است، پس

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BM}{CM} \Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{۵}{۳} \qquad (۲)$$

از روابط ( ۱ ) و ( ۲ ) نتیجه می شود که:

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BQ}{QC} = \frac{۵}{۳} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ||AC$$

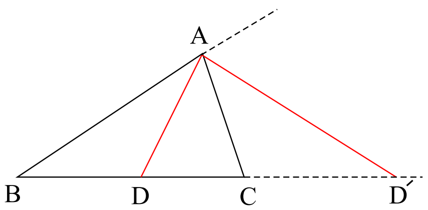
چون $PQ||AC$ ، پس با توجه به نتیجه ی قضیه ی تالس داریم:

$$\frac{BA}{BP} = \frac{BC}{BQ} = \frac{AC}{PQ} \quad \text{یا} \quad \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{PQ}{AC}$$

در نتیجه

$$\frac{AC}{PQ} = \frac{BA}{BP} = \frac{AP+BP}{BP} = \frac{AP}{BP} + \frac{BP}{BP} = \frac{AP}{BP} + ۱ = \frac{۳}{۵} + ۱ = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{AC}{PQ} = \frac{۸}{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{۶}{PQ} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow PQ = \frac{۳۰}{۸} = ۳/۷۵$$

۵۶.گزینه ۳




مطابق شکل، نیمسازهای داخلی و خارجی $\hat{A}$ در نقاط D و 'D ضلع BC (و امتدادش) را قطع می‌کنند. در ضمن نیمسازهای داخلی و خارجی $\hat{A}$ بر هم عمودند و در نتیجه در مثلث قائم الزاویه 'ADD رابطه $AD^۲ + AD'^۲ = DD'^۲$ برقرار است.

قضیه نیمسازها را برای نیمسازهای داخلی و خارجی $\hat{A}$ به کار می‌گیریم:

$$\hat{A} \text{ نیمساز داخلی : } AD \rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{DC}{\underbrace{DB+DC}_{BC=۱۲}} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow DC = ۳$$

$\hat{A}$ نیمساز خارجی $AD' \to \dfrac{D'C}{D'B}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{3} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \dfrac{D'C}{\underbrace{D'B-D'C}_{BC=12}}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow D'C=6$

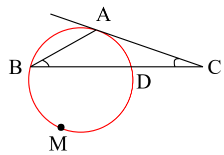
$$\Rightarrow DD'=DC+D'C=9 \Rightarrow AD^2+AD'^2=DD'^2=81$$

۵۷.گزینه ۴ در چهار ضلعی $HOH'C$ دو زاویه مقابل مکمل یکدیگر هستند، پس داریم :

$$\left.\begin{array}{r} H\hat{O}H'+\hat{C}=180^\circ \\ A\hat{O}D+H\hat{O}H'=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A\hat{O}D=\hat{C} \\ \hat{C}=A\hat{D}O=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}D=A\hat{D}O$$

۵۸.گزینه ۳ با توجه به فرض، مثلث $ABC$ متساوی الساقین است، پس $\widehat{B}=\widehat{C}$، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \quad \text{محاطی} \\ \widehat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\widehat{B}=\widehat{C}} \overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{AD} \ (*)$$



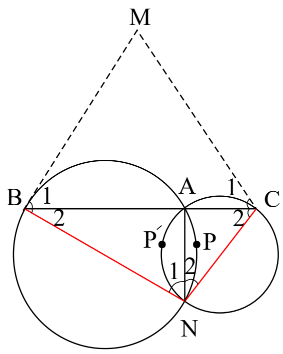

کمان $D\overset{\frown}{M}B$ برابر $222^\circ$ است، پس:

$$B\overset{\frown}{A}D=360^\circ-222^\circ=138^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}=138^\circ \xrightarrow{(*)} 3\overset{\frown}{AD}=138^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=46^\circ \Rightarrow \widehat{C}=\widehat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}=23^\circ$$

۵۹.گزینه ۴

از نقاط $B$ و $C$ به نقطه‌ی تلاقی دوم دو دایره یعنی $N$ وصل می‌کنیم.




$$\hat{N}_1+\hat{N}_2=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}+\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\hat{B}_1+\hat{C}_1=180^\circ-\hat{M} \quad (1)$$

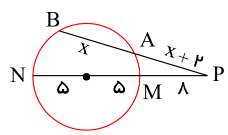
از طرفی در مثلث $BNC$ داریم:

$$\hat{N}_1+\hat{N}_2=180^\circ-(\hat{B}_2+\hat{C}_2)=180^\circ-\left(\dfrac{\overset{\frown}{APN}}{2}+\dfrac{\overset{\frown}{AP'N}}{2}\right)=180^\circ-\text{مقدار ثابت}$$

$(2),(1)$ از $\Rightarrow 180^\circ-\hat{M}=180^\circ-\text{مقدار ثابت} \Rightarrow \hat{M}=$ مقدار ثابت

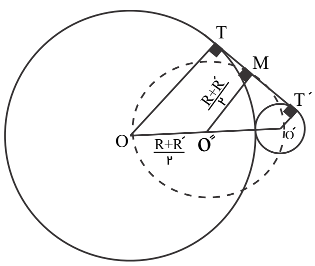
۶۰.گزینه ۳ اگر $AB$ را $x$ در نظر بگیریم آنگاه از فرض نتیجه می گیریم $PA=x+2$ حال از رابطه طولی در دایره استفاده کرده، داریم:

$$(2x+2)(x+2)=8\times 18$$
$$(x+1)(x+2)=8\times 9$$




$$x^2+3x-70=0 \Rightarrow (x-7)(x+10)=0 \Rightarrow x=7 \Rightarrow AB=7$$

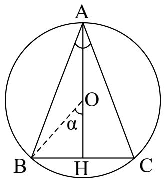
۶۱.گزینه ۲




فرض کنیم دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس بیرونی باشند و $R>R'$ باشد دایره به مرکز $O''$ و شعاع $\dfrac{R+R'}{2}$ را رسم می‌کنیم اگر $TT'$ مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی $C$ و $C'$ باشد از $O''$ به نقطه‌ی $M$ وسط $TT'$وصل می‌کنیم.

در ذوزنقه‌ی $OTT'O'$ باتوجه به قضیه‌ی میان خط نتیجه می‌گیریم $O''M$موازی $OT$ و $O''M=\dfrac{R+R'}{2}$ پس $O''M$ شعاع دایره به مرکز $O''$ است و بر $TT'$ عمود است بنابراین $TT'$ بر دایره به قطر $OO'$ مماس می‌باشد.

۶۲.گزینه ۴

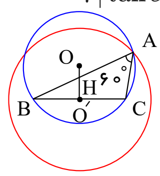



نکته: هر مثلث قابل محاط شدن در دایره است و بیشترین ارتفاع $AH$ در این مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره محیطی و فاصله‌ی مرکز تا ضلع $BC$.

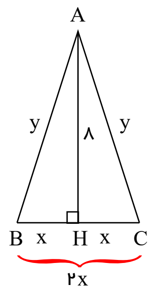
$$h_{max} = OH + R = \frac{a}{۲\tan\alpha} + \frac{a}{۲\sin\alpha} = \frac{a}{۲}\cot\frac{\alpha}{۲} = ۴\cot ۴۰^\circ$$

۶۳.گزینه ۴ فاصله ی مرکزهای دو دایره، در واقع فاصله‌ی مرکز دایره‌ی کمان در خور تا وسط پاره خط $BC$ است که از رابطه‌ی $OH = \frac{a}{۲|\tan\alpha|}$ قابل محاسبه است.

$$OO' = OH = \frac{BC}{۲|\tan ۶۰^\circ|} = \frac{۱۲}{۲\times\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$




۶۴.گزینه ۲



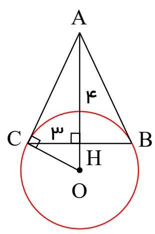

$$\text{می‌دانیم}: r = \frac{S}{P} \to ۳ = \frac{\frac{۱}{۲}\times ۲x \times ۸}{\frac{۱}{۲}(۲x+۲y)}$$

$$\to \frac{۸x}{x+y} = ۳ \to ۵x = ۳y \to \frac{x}{y} = \frac{۳}{۵}$$

و این یعنی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{ABH}$، اعداد فیثاغورسی هستند. پس:

$$x = ۶\ ,\quad y = ۱۰ \quad\to\quad \text{قاعده} = ۲x = ۱۲$$

۶۵.گزینه ۳




$$CH^۲ = OH \times AH$$
$$۹ = OH \times ۴ \Rightarrow OH = \frac{۹}{۴}$$
$$OC^۲ = OH \times OA$$
$$R^۲ = \frac{۹}{۴}\times(۴+\frac{۹}{۴}) = \frac{۲۲۵}{۱۶} \to R = ۳/۷۵$$

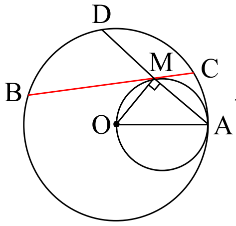
۶۶.گزینه ۱ باتوجه به رابطه‌ی طولی در دایره داریم.

$$\left.\begin{array}{l} BB' \times BA = BD \times BM \\ CC' \times CA = CM \times CD \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=CM} \frac{BB' \times BA}{CC' \times CA} = \frac{BD}{CD} \quad (۱)$$

$$\text{نیمساز} \quad AD \xrightarrow{\text{قضیه نیمساز}} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (۲)$$

$$(۲)\,,\,(۱) \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} = ۱$$

۶۷.گزینه ۲




اگر از نقطه‌ی $M$ به نقاط $O$ و $A$ وصل کنیم در این صورت زاویه‌ی M قائمه خواهد بود زیرا محاطی روبرو به قطر می‌باشد چون $OM$ عمود بر وتر $AD$ است پس $MA = MD$ داریم:

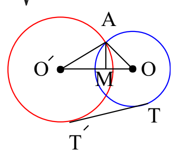
$$MB \times MC = MA \times MD \xrightarrow{MA=MD} MB \times MC = MA^۲$$

۶۸.گزینه ۳

$$TT' = \sqrt{d^۲ - (r - r')^۲}$$

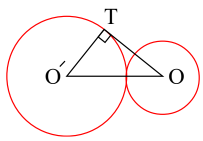
$$۱۵ = \sqrt{d^۲ - (۱۴ - ۶)^۲} \Rightarrow ۲۲۵ = d^۲ - ۶۴ \Rightarrow d^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow d = ۱۷$$

۶۹.گزینه ۳ بنابر فرض $AM = \frac{۱}{۲}OO'$ پس مثلث $OAO'$ قائم الزاویه است، پس وتر $OO'$ در این مثلث قائم الزاویه برابر $\sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$ می باشد. اندازه ی مماس مشترک خارجی در این دو دایره برابر است با:




$$TT' = \sqrt{OO'^۲ - (R - R')^۲} = \sqrt{۲۵ - ۱} = ۲\sqrt{۶}$$

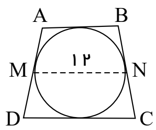
۷۰.گزینه ۴ دو دایره مماس بیرونی هستند پس $OO' = ۱۰/۵ + ۴ = ۱۴/۵$ و در مثلث قائم الزاویه $OO'T$ داریم:




$$\overset{\triangle}{OO'T}: OT^۲ = OO'^۲ - O'T^۲ = ۱۴/۵^۲ - ۱۰/۵^۲ = (۱۴/۵ - ۱۰/۵)(۱۴/۵ + ۱۰/۵)$$

$$\Rightarrow OT^۲ = ۴ \times ۲۵ \Rightarrow OT = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

۷۱.گزینه ۴




۱- در هر ذوزنقه می‌دانیم پاره خطی که اوساط ساق‌ها را به هم وصل می کند، میانگین دو قاعده است (با توجه به تالس)

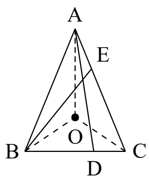
$$MN = \frac{AB + CD}{۲} = ۱۲ \Rightarrow AB + CD = ۲۴$$

۲- در هر ۴ ضلعی محیطی می‌دانیم مجموع دو ضلع مقابل با هم برابر است:

$$AD + BC = AB + CD = ۲۴$$

پس محیط ذوزنقه برابر $۲ \times ۲۴ = ۴۸$ است.

۷۲.گزینه ۲




اولاً $OA = OB = OC$ ، ثانیاً $A\widehat{O}B = A\widehat{O}C$ ، پس می توان نتیجه گرفت که نقاط A و B به ترتیب دوران یافته ی نقاط C و A نسبت به نقطه ی O و زاویه ی $۱۲۰^\circ$ هستند. یعنی پاره خط $AB$ دوران یافته ی پاره خط CA نسبت به نقطه ی O و زاویه ی $۱۲۰^\circ$ است چون دو مثلث ABE و CAD همنهشت بوده و جهت آن ها یکی است، می توان نتیجه گرفت که دوران یافته ی هم نسبت به نقطه ی O و زاویه ی $۱۲۰^\circ$ هستند و لذا $OE = OD$ و $E\widehat{O}D = ۱۲۰^\circ$ .

۷۳.گزینه ۱ دوران حول مبدأ و به زاویهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$:

$$(x,y)\xrightarrow{\alpha=\frac{۳\pi}{۲}}(y,-x)$$

تصویر مرکز دایره $O(-۲,۳)\rightarrow O'(۳,۲)$ مرکز دایره

همچنین در دوران که یک تبدیل ایزومتریست، شعاع دایره و تصویر یکسان است. پس:

$$R^{۱}=R=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow OO'=\sqrt{(۳-(-۲))^{۲}+(۳-۲)^{۲}}=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶}$$

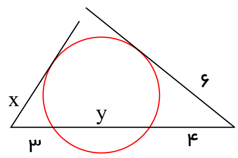
مماس مشترک داخلی $TT'=\sqrt{OO'^{۲}-(R+R^{۱})^{۲}}=\sqrt{۲۶-(\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۲})^{۲}}=\sqrt{۲۶-۲۵}=۱$

۷۴.گزینه ۳ تبدیل داده شده یک تجانس است. پس دایره‌ی $C$ به مرکز $(۱,۲)$ و شعاع ۱ واحد به دایره‌ی $C'$ به مرکز $(۳,۶)$ و شعاع ۳ واحد تبدیل می‌شود. داریم:

$$d=OO'=\sqrt{(۳-۱)^{۲}+(۶-۲)^{۲}}=\sqrt{۴+۱۶}=۲\sqrt{۵}$$

مماس مشترک خارجی $TT'=\sqrt{d^{۲}-(r-r')^{۲}}=\sqrt{(۲\sqrt{۵})^{۲}-(۳-۱)^{۲}}=۴$

۷۵.گزینه ۳




$$۶^{۲}=۴(۴+y)\Rightarrow ۳۶=۴(۴+y)\Rightarrow y=۵$$
$$x^{۲}=۳(۳+۵)\Rightarrow x=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

۷۶.گزینه ۳ ابتدا مختصات دو نقطه‌ی $A'$ و $B'$ را به دست می‌آوریم .

$$\begin{cases}A'=D(A)=(-۲,۲)\\ B'=D(B)=(-۱,-۲)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_{A'B'}=\dfrac{۲+۲}{-۲+۱}=-۴\\ mAB=\dfrac{۴-۲}{۲+۶}=\dfrac{۲}{۸}=\dfrac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\Rightarrow mAB\times m_{A'B'}=-۱\Rightarrow AB\perp A'B'$$

۷۷.گزینه ۴

$$\begin{cases}x'=۲y-۱\Rightarrow y=\dfrac{x'+۱}{۲}\\ y'=x+۳\Rightarrow x=y'-۳\end{cases}$$

در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$۲y'-۶+\frac{۳x'+۳}{۲}=۶\Rightarrow ۴y'-۱۲+۳x'+۳=۱۲\Rightarrow ۴y'+۳x'=۲۱$$

که فقط گزینه‌ی (۴) روی این خط قرار دارد.

۷۸.گزینه ۲ می‌توانیم مختصات دو نقطه از خط $۳x+۲y=۶$ را انتخاب کرده، دوران $\frac{\pi}{۲}$ و انتقال را اعمال کنیم و سپس تصویر نقاط را در گزینه‌ها امتحان کنیم.

$$A(۰,۳)\xrightarrow{R_{\frac{\pi}{۲}}}(-۳,۰)\xrightarrow{T}A'(-۶,۱)$$
$$A(۲,۰)\xrightarrow{R_{\frac{\pi}{۲}}}(۰,۲)\xrightarrow{T}B'(-۳,۳)$$

$A'$ و $B'$ در خط $۳y-۲x=۱۵$ صدق می کنند.

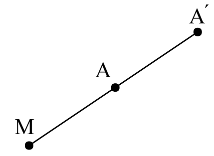
۷۹.گزینه ۴ ضابطه ی دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه ی $۹۰^{\circ}$ به صورت $R(x,y)=(-y,x)$ است، داریم:

$$R(x,y)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}-y=x'\Rightarrow y=-x'\\ x=y'\end{cases}$$

$\Rightarrow$ جایگذاری در معادله $\Rightarrow ۲(-x')-y'=۵\Rightarrow ۲x'+y'=-۵\quad(*)$

در بین گزینه ها، تنها نقطه ی $(-۳,۱)$ روی خط (*) قرار دارد.

۸۰.گزینه ۲ اگر $A'\left|\begin{matrix}x'\\y'\end{matrix}\right.$ تجانس یافته $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ با نسبت ۲ و مرکز $M\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$ باشد داریم:




$$\overrightarrow{MA'}=۲\overrightarrow{MA}\Rightarrow A'-M=۲(A-M)$$
$$\Rightarrow A'=۲A-M=۲(x,y)-(۱,۴)\Rightarrow A'=(۲x-۱,۲y-۴)$$
$$\begin{cases}۲x-۱=x'\\ ۲y-۴=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x'+۱}{۲}\\ y=\dfrac{y'+۴}{۲}\end{cases}\Rightarrow d':\frac{y'+۴}{۲}+۲(\frac{x'+۱}{۲})=۳$$
$$\Rightarrow y'+۲x'=۰\xrightarrow{\text{مقایسه با } y+ax=b}\begin{cases}a=۲\\ b=۰\end{cases}$$

۸۱.گزینه ۱

ضابطه تجانس با نسبت $k=\frac{۳}{۲}$ و مرکز مبدأ مختصات : $T_۱(x,y)=(\frac{۳}{۲}x,\frac{۳}{۲}y)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۲}{۳}x'\\ y=\frac{۲}{۳}y'\end{cases}$

تبدیل یافته‌ی خط $d:۲x+y=۶$ تحت تبدیل $T_۱$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۲(\frac{۲}{۳}x')+(\frac{۲}{۳}y')=۶\Rightarrow ۲x'+y'=۹\Rightarrow\Delta:۲x+y=۹$$

ضابطه دوران تحت زاویه $۹۰^\circ$ حول مبدأ مختصات : $T_۲(x,y)=(-y,x)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}x=y'\\ y=-x'\end{cases}$

تبدیل یافته‌ی خط $\Delta:۲x+y=۹$ تحت تبدیل $T_۲$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۲(y')+(-x')=۹\Rightarrow ۲y'-x'=۹\Rightarrow d_۲:۲y-x=۹$$

۸۲.گزینه ۱ ابتدا مختصات نقطه‌ی $A$ را در دستگاه جدید (با مبداء $O'$ ) بازنویسی می‌کنیم.

$$A':\begin{matrix}X=x-\alpha=۴-۲=۲\\ Y=y-\beta=۰-(-۱)=۱\end{matrix}\quad\rightarrow A'(۲,۱)$$

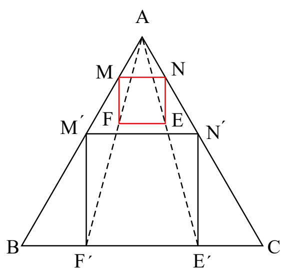
تصویر $A'$ را تحت دوران $\frac{۳\pi}{۲}$ بدست می آوریم.

$$\begin{bmatrix}۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$$

مجددا مختصات $(۱,-۲)$ را در دستگاه قدیم بازنویسی می‌کنیم.

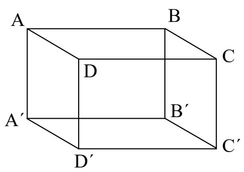
$$\begin{matrix}x=X+\alpha=۱+۲=۳\\ y=Y+\beta=-۲+(-۱)=-۳\end{matrix}\quad\rightarrow(۳,-۳)$$

۸۳.گزینه ۴ پاره خط $MN$ را موازی $BC$ رسم می‌کنیم روی $MN$ مربع $MNEF$ را بنا می‌کنیم. از $A$ به نقاط $E$ و $F$ وصل کرده امتداد می‌دهیم تا $BC$ را در $E'$ و $F'$ قطع کنند.




در نقاط $E'$ و $F'$ عمودهایی بر $BC$ خارج می‌کنیم تا $AC$ و $AB$ را در $N'$ و $M'$ قطع کنند. در این صورت $M'N'E'F'$ مجانس مربع $MNEF$ بمرکز $A$ خواهد بود پس $M'N'E'F'$ مربع مورد نظر است.

۸۴.گزینه ۳



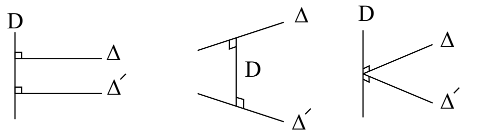

مطابق شکل می‌توان گفت که هر یال مانند $AD$ با ۴ یال مانند $BB'$ و $CC'$ و $A'B'$ و $C'D'$ متنافر است.

۸۵.گزینه ۱

۸۶.گزینه ۴

باتوجه به ویژگی‌های سؤال، صفحهٔ $R$ از $A$ می‌گذرد و $P$ , $Q$ را قطع می‌کند و نباید سه صفحه نقطهٔ مشترک داشته باشند. به این ترتیب باید $P$ , $Q$ , $R$ دو به دو متقاطع باشند. پس بی‌شمار صفحه از $A$ می‌گذرد که با $P$ , $Q$ دو به دو متقاطع باشند.

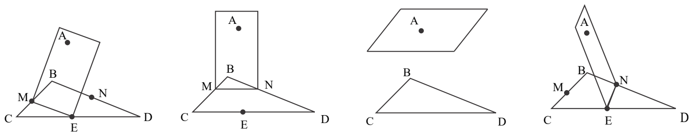
۸۷.گزینه ۱




دو خط موازیند　　دو خط متنافرند　　دو خط متقاطعند

پس وضعیت دو خط نامشخص است.

۸۸.گزینه ۴　صفحه‌ای که از $A$ موازی صفحه مثلث $BCD$ رسم می‌شود جواب است و در مرحله‌ی بعد صفحه‌هایی که از نقطه‌ی $A$ و وسط های دو ضلع مثلث $BCD$ می‌گذرند، جواب هستند که تعداد آنها سه می‌باشد و در مجموع چهار صفحه وجود دارد.

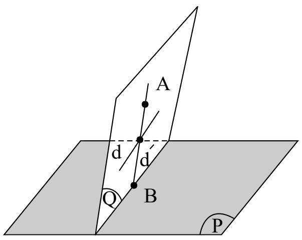



۱　۲　۳　۴

۸۹.گزینه ۳　اگر خط $d$ با صفحه‌ی $P$ متقاطع باشد، آن گاه از $O$ صفحه‌ی $P'$ را موازی $P$ رسم می‌کنیم تا خط $d$ را فقط در نقطه‌ی $A$ قطع کند. در این صورت $OA$ تنها خطی است که از $O$ گذشته و خط $d$ را قطع کرده و با $P$ موازی است.

بررسی سایر گزینه‌ها: گزینه (۱) با فرض در تناقض است و گزینه‌ی (۲) اگر صفحه شامل $O$ و $d$ موازی $P$ باشد، مسأله بی‌شمار جواب دارد و در غیر این صورت جواب ندارد و در گزینه‌ی (۴) مسأله همواره بی‌شمار جواب دارد.

۹۰.گزینه ۱




در حالتی که دو صفحه‌ی $Q$ و $P$ متقاطع باشند، فصل مشترک این دو صفحه را $d'$ می‌نامیم. اگر خط $d$ موازی صفحه‌ی $P$ باشد حتما با خط $d'$ هم موازی است.

در این حالت هر خطی که از نقطه‌ی $A$ بگذرد و خط $d$ راقطع کند حتما صفحه‌ی $P$ را روی نقطه‌ای واقع بر خط $d'$ مانند $B$ قطع خواهد کرد و حالت موازی بودن این خط با صفحه‌ی $P$ غیر ممکن است.

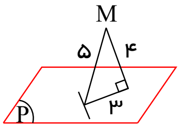
تذکر: در گزینه‌ی **۴** شرایطی نوشته شده که یکدیگر را نقض می‌کنند چرا که می‌دانیم وقتی دو صفحه‌ی $P$ و $Q$ با هم موازی باشند هر خطی که در $Q$ باشد حتما با $P$ موازی است و نمی‌تواند آن را قطع کند.

پس گزینه‌ی **۴** نمی‌تواند شرایط مناسب یک فرض را فراهم کند.

۹۱.گزینه ۳　با انتخاب نقاط وسط دو ضلع مثلث، می‌توان از آنها صفحه‌ای به موازات $\Delta$ گذراند. این صفحه پاسخ مسأله است. اما به سه طریق می‌توان وسط دو ضلع از مثلث را انتخاب کرد. (یعنی در مثلث $ABC$ وسط اضلاع $AB$ و $AC$ یا $AB$ و $BC$ یا $AC$ و $BC$ را می‌توان انتخاب نمود) بنابراین مسأله **۳** جواب دارد.

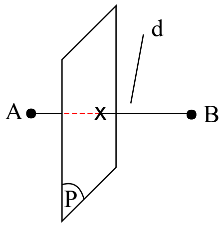
۹۲.گزینه ۴　چون صفحه ی گذرا از $d$ (صفحه ی $Q$) غیرموازی با صفحه ی $P$ است. پس حتماً با آن متقاطع است. اگر $\Delta$ فصل مشترک صفحات $P$ و $Q$ باشد، طبق یکی از قضایای کتاب درسی، چون $d||P$، لذا صفحه ی $Q$ که از $d$ گذشته و با صفحه ی $P$ متقاطع است، $P$ را در یک خط موازی $d$ قطع می کند، پس $\Delta||d$ ، یعنی گزینه ی (۴) درست است.

۹۳.گزینه ۴ فرض کنید $D$ یکی از خطوط باشد، پس مثلث $MDO$ قائم‌الزاویه است. حال به مرکز $O$ و شعاع **۳** واحد در صفحه‌ی دایره‌ای رسم کرده، حال هر خط در صفحه که بر این دایره مماس باشد، جواب است.

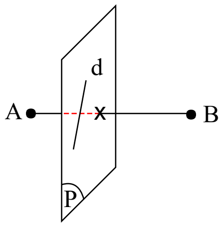



۹۴.گزینه ۴

می‌دانیم مجموعه نقاطی که از دو نقطه مفروض $A$ و $B$ به یک فاصله‌اند، صفحه عمود منصف پاره‌خط $AB$ است که هم از نقطه وسط $AB$ می‌گذرد و هم بر پاره خط $AB$ عمود است.




فاقد جواب (d ⊄ P,  d || P)



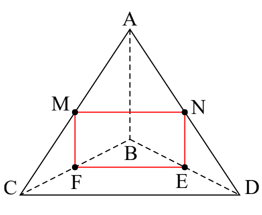

بی شمار جواب (d ⊂ P)

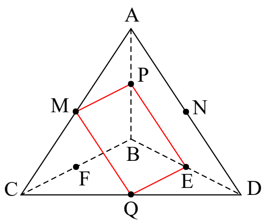
از آنجا که تمام خطوط این صفحه عمود منصف بر $AB$ عمود است و $d\perp AB$، در نتیجه خط $d$ یا به تمامی در این صفحه قرار دارد و یا در خارج این صفحه بوده و با آن موازی است. پس این سؤال یا بی‌شمار جواب دارد یا فاقد جواب است.

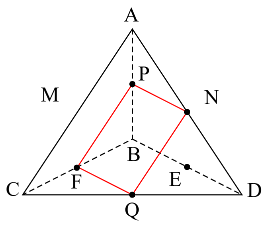
۹۵.گزینه ۳

با این چهار نقطه یک هرم مثلث‌القاعده ایجاد می‌شود.

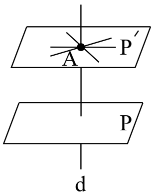
می‌دانیم اگر صفحه‌ای از وسط یک پاره‌خط عبور کند دو سر پاره‌خط از آن صفحه به یک فاصله هستند مطابق شکل صفحه‌هایی که از وسطهای چهار یال این هرم به صورت زیر عبور می‌کنند جواب های این تست هستند که تعداد آنها **۳** می‌باشد.




۹۶.گزینه ۳ برای آنکه از نقطه‌ی $A$ بی‌شمار خط موازی صفحه بگذرانیم باید صفحه‌ای موازی $P$ از نقطه‌ی $A$ بگذرانیم.




خط $d$ را بر صفحه‌ی $P'$ در نظر می‌گیریم تا بر تمام خطوط این صفحه عمود باشد.

$$\begin{matrix} d\perp P' \\ P \parallel P' \end{matrix} \Rightarrow d\perp P$$

۹۷.گزینه ۲ دو صفحه‌ی موازی $P$ و $P'$ که به ترتیب هر یک شامل خطوط $d$ و $d'$ است، نقطه‌ی $A$ خارج از این دو صفحه را در نظر می گیریم. تنها یک خط از نقطه‌ی $A$ عمود بر این دو صفحه می‌گذرد این خط بر دو خط $d$ و $d'$ عمود است زیرا می‌دانیم هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام خطوط آن صفحه عمود است.

**پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۲۳۴۱۷۶**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱- ۳ | ۲- ۲ | ۳- ۲ | ۴- ۱ | ۵- ۲ |
| ۶- ۲ | ۷- ۳ | ۸- ۱ | ۹- ۲ | ۱۰- ۴ |
| ۱۱- ۳ | ۱۲- ۳ | ۱۳- ۴ | ۱۴- ۳ | ۱۵- ۳ |
| ۱۶- ۱ | ۱۷- ۲ | ۱۸- ۳ | ۱۹- ۳ | ۲۰- ۱ |
| ۲۱- ۳ | ۲۲- ۳ | ۲۳- ۱ | ۲۴- ۲ | ۲۵- ۲ |
| ۲۶- ۴ | ۲۷- ۱ | ۲۸- ۴ | ۲۹- ۱ | ۳۰- ۱ |
| ۳۱- ۴ | ۳۲- ۱ | ۳۳- ۲ | ۳۴- ۳ | ۳۵- ۱ |
| ۳۶- ۴ | ۳۷- ۱ | ۳۸- ۴ | ۳۹- ۱ | ۴۰- ۲ |
| ۴۱- ۲ | ۴۲- ۴ | ۴۳- ۲ | ۴۴- ۴ | ۴۵- ۱ |
| ۴۶- ۳ | ۴۷- ۴ | ۴۸- ۱ | ۴۹- ۱ | ۵۰- ۴ |
| ۵۱- ۴ | ۵۲- ۴ | ۵۳- ۱ | ۵۴- ۲ | ۵۵- ۳ |
| ۵۶- ۳ | ۵۷- ۴ | ۵۸- ۳ | ۵۹- ۴ | ۶۰- ۳ |
| ۶۱- ۲ | ۶۲- ۴ | ۶۳- ۴ | ۶۴- ۲ | ۶۵- ۳ |
| ۶۶- ۱ | ۶۷- ۲ | ۶۸- ۳ | ۶۹- ۳ | ۷۰- ۴ |
| ۷۱- ۴ | ۷۲- ۲ | ۷۳- ۱ | ۷۴- ۳ | ۷۵- ۳ |
| ۷۶- ۳ | ۷۷- ۴ | ۷۸- ۲ | ۷۹- ۴ | ۸۰- ۲ |
| ۸۱- ۱ | ۸۲- ۱ | ۸۳- ۴ | ۸۴- ۳ | ۸۵- ۱ |
| ۸۶- ۴ | ۸۷- ۱ | ۸۸- ۴ | ۸۹- ۳ | ۹۰- ۱ |
| ۹۱- ۳ | ۹۲- ۴ | ۹۳- ۴ | ۹۴- ۴ | ۹۵- ۳ |
| ۹۶- ۳ | ۹۷- ۲ | | | |