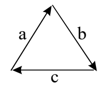
۱۶. گزینه ۴ همان طور که می‌دانیم مختصات تصویر و قرینه‌ی نقطه $A=(x,y,z)$ نسبت به صفحه‌های xy و yz به ترتیب نقاط $A'=(x,y,۰)$ و $A''=(-x,y,z)$ می‌باشد. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{قرینه } A \text{ نسبت}: & A'=(-۱,-۳,-۲) \\ \text{تصویر } A' \text{ روی ص}: & A''=(-۱,-۳,۰)\end{array}\right\} \Rightarrow A''A' \text{ وسط}: M=(-۱,-۳,-۱) \Rightarrow x_M\cdot y_M\cdot z_M=(-۱)(-۳)(-۱)=-۳$$

۱۷. گزینه ۱ سه بردار a ، b و c مطابق شکل، مثلثی متساوی‌الاضلاع ایجاد می‌کنند. از آن جا که انتهای بردار b بر ابتدای بردار c منطبق است پس زاویه‌ی بین دو بردار برابر است با $۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$ و داریم:



$$a+b=-c\Rightarrow |a+b|=|c|$$
$$|b-c|^۲=|b|^۲+|c|^۲-۲|b||c|\cos ۱۲۰^\circ$$
$$=۲|c|^۲-۲|c|^۲(-\frac{۱}{۲})=۳|c|^۲\Rightarrow |b-c|=\sqrt{۳}|c|$$

بنابراین نسبت مورد نظر برابر است با:

$$\frac{|a+b|}{|b-c|}=\frac{|c|}{\sqrt{۳}|c|}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸. گزینه ۱ بردار e_a+e_b ، بردار نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b است. داریم:

$$|a|=۳\Rightarrow e_a=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$
$$|b|=۳\Rightarrow e_b=(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳})$$
$$e_a+e_b=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰)\Rightarrow |e_a+e_b|=\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین برای یافتن بردار جهت نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b، کافی است بردار جهت بردار e_a+e_b را بیابیم پس بردار e_a+e_b را بر اندازه‌ی آن یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ تقسیم کنیم. در نتیجه بردار مورد نظر برابر است با $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$ که مجموع مؤلفه‌های آن برابر $\sqrt{۲}$ است.

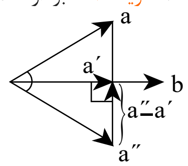
۱۹. گزینه ۱ مختصات نقطه‌ی M را به صورت (x,y,z) می‌گیریم. حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.

$$\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Rightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=۰$$
$$\overrightarrow{MA}=(۱,-۱,۲)-(x,y,z)=(۱-x,-۱-y,۲-z)$$
$$\overrightarrow{MB}=(-۱,۱,-۲)-(x,y,z)=(-۱-x,۱-y,-۲-z)$$
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=۰\Rightarrow(۱-x,-۱-y,۲-z)\cdot(-۱-x,۱-y,-۲-z)=۰$$
$$-(۱+x)(۱-x)-(۱+y)(۱-y)-(۲+z)(۲-z)=۰$$
$$x^۲-۱+y^۲-۱+z^۲-۴=۰\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۶$$

فاصله‌ی M از مبدأ مختصات: $OM=\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\Rightarrow OM=\sqrt{۶}$

۲۰. گزینه ۴ بردار $a'-a''$ بر بردار a' عمود است بنابراین ضرب داخلی آنها صفر می‌شود.

$$a'-a''=(۰,۲,-۲)$$
$$a'\cdot(a'-a'')=۰\Rightarrow ۲-۲m+۲=۰\Rightarrow m=۲\Rightarrow a''=(۲,-۱,۳)$$



بردارهای a و a'' هم اندازه هستند بنابراین:

$$|a|=|a''|=\sqrt{۴+۱+۹}=\sqrt{۱۴}$$

۲۱. گزینه ۳

$$a=(2,-2,1)\Rightarrow \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3},\cos\beta=-\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{1}{3}$$

چون $0\leq\alpha,\beta\leq\pi$ و $\cos\alpha=-\cos\beta$ پس $\alpha+\beta=\pi$ و داریم:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\pi+\gamma)=-\cos\gamma=-\frac{1}{3}$$

۲۲. گزینه ۲

$$a+b+c+d=0\Rightarrow a+c=-b-d\Rightarrow |a+c|=|-b-d|$$
$$\Rightarrow |a+c|^2=|-b-d|^2\Rightarrow |a|^2+|c|^2+2a\cdot c=|b|^2+|d|^2+2b\cdot d$$
$$\Rightarrow 5^2+4^2+2a\cdot c=3^2+6^2+2b\cdot d\Rightarrow 2a\cdot c-2b\cdot d=4\Rightarrow a\cdot c-b\cdot d=2$$

۲۳. گزینه ۲ دو خط L و L' به ترتیب با بردارهای $u=(1,1,1)$ و $u'=(0,1,2)$ مفروضند، خط مورد نظر با بردار $u\times u'$ موازی است. بنابراین:

$$u''=\times u'=(1,1,1)\times(0,1,2)=(1,-2,1)\Rightarrow \text{معادلات متقارن خط مورد نظر}: x=\frac{y}{-2}=z$$
$$0\in L''$$

در بین گزینه‌ها، تنها مختصات نقطه‌ی گزینه‌ی «۲» در معادلات این خط صدق می‌کند.

۲۴. گزینه ۴ بردارهای های دو خط: $u=(1,1,1),\ u'=(2,3,1)$

چون نسبت های هر دو مؤلفه متناظر دو بردار مساوی نیستند، دو خط موازی نمی باشند و چون حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر نیست، دو خط بر هم عمود نیستند. بنابراین، باید تعیین کنیم که دو خط متقاطع هستند یا متنافر. معادلات یکی از دو خط، مثلاً خط D، را پارامتری می کنیم.

$$M=(x=\frac{2t-1}{2},y=t-2,z=t) \text{ نقطه متغیر خط } D$$

مختصات پارامتری این نقطه را در معادلات خط D' قرار می دهیم:

$$D'\Rightarrow \frac{t+1}{2}=\frac{t+2}{3}=t\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{t+1}{2}=t\Rightarrow t=1\\[2mm]\dfrac{t+2}{3}=t\Rightarrow t=1\end{cases}$$

چون دو معادله جواب مشترک $t=1$ دارند، دو خط متقاطع اند و نقطه تلاقی:

$$t=1\Rightarrow M(\frac{1}{2},-1,1)$$

۲۵. گزینه ۴ ابتدا معادله خط گذرا از A,B را می نویسیم.

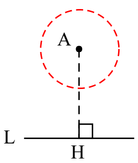
$$u_{d'}=AB=(m-4,2,-4)$$
$$A\in d'\Rightarrow d':\frac{x-3}{m-4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{-4}$$

حالا خط d را پارامتری می کنیم مختصات A برحسب t روی d در d' صدق می کند.

$$d:\begin{cases}x=2t-2\\y=3t+2\\z=t-5\end{cases}\Rightarrow A(2t-2,3t+2,t-5)$$

$$\xrightarrow{A \text{ در } d' \text{ صدق می کند}} d':\frac{2t-5}{m-4}=\frac{3t}{2}=\frac{t-7}{-4}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2t-5}{m-4}=\dfrac{3t}{2}\xrightarrow{t=1}m=2\\[2mm]\dfrac{3t}{2}=\dfrac{t-7}{-4}\Rightarrow t=1\end{cases}$$

۲۶. گزینه ۱



مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ هستند یک کره به مرکز A و به شعاع ۳ است. محل تلاقی این کره و خط L خاصیت مسأله را داراست.

باید فاصله‌ی A را از خط مفروض بیابیم. نقطه‌ی $B=(1,-1,0)$ روی خط L واقع و بردار $u=(1,2,2)$ موازی با آن است.

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB}\times u|}{|u|} = \frac{|(۰,-۳,۳)\times(۱,۲,۲)|}{|(۱,۲,۲)|} = \frac{|(-۱۲,۳,۳)|}{۳} = ۳\sqrt{۲}$$: فاصله A از خط L

چون فاصله‌ی A از خط L، بیش از ۳ واحد است. پس کره و خط همدیگر را قطع نمی‌کنند و در نتیجه نقطه‌ای با شرایط مذکور وجود ندارد.

۲۷. گزینه ۲

$$d' : \begin{cases} x = ۲y-۱ \Rightarrow y = \dfrac{x+۱}{۲} \\ z = ۳y-۱ \Rightarrow y = \dfrac{z+۱}{۳} \end{cases} \Rightarrow d' : \frac{x+۱}{۲} = y = \frac{z+۱}{۳}$$

بردارهای هادی دو خط عبارتند از $u = (۱,-۱,۳)$ و $u' = (۲,۱,۳)$، همچنین دو نقطه ی $M = (۲,-۲,۰)$ و $N = (-۱,۰,-۲)$ را به ترتیب روی دو خط انتخاب می کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{MN} = (-۳,۲,-۲)$$

$$u\times u' = (-۶,۳,۳) \xrightarrow{\div ۳} (-۲,۱,۱)$$

$$L = \frac{|\overrightarrow{MN}\cdot(u\times u')|}{|u\times u'|} = \frac{۶}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۶}$$ طول عمود مشترک

۲۸. گزینه ۳ ابتدا محل برخورد $L_۱$ و $L_۲$ را به دست می‌آوریم: برای این کار خط $L_۱$ را پارامتری کرده و مختصات نقطه برخورد دو خط بر حسب t تعیین و آنرا در $L_۲$ صدق می دهیم.

$$L_۱ : \begin{cases} x = ۲t-۲ \\ y = -t+۵ \\ z = ۲t \end{cases} \Rightarrow A = (۲t-۲,-t+۵,۲t)$$ نقطه برخورد

$$\xrightarrow{\text{را در } L_۲ \text{ صدق می‌دهیم } A} \frac{۲t-۲+۶}{-۴} = \frac{-t+۵-۷}{۲} = \frac{۲t-۱۲}{۴} \Rightarrow t = ۲ \Rightarrow \quad \text{نقطه‌ی برخورد } A = \begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{vmatrix}$$

حال اگر $v_۱$ و $v_۲$ به ترتیب بردارهای هادی دو خط $L_۱$ و $L_۲$ باشند، آنگاه بردار نیمساز بین دو بردار $v_۱$ و $v_۲$ در راستای $ev_۱ + ev_۲$ قرار دارد.

$$ev_۱ = (\frac{۲}{۳},\frac{-۱}{۳},\frac{۲}{۳}) \quad , \quad ev_۲ = (\frac{-۴}{۶},\frac{۲}{۶},\frac{۴}{۶})$$

$$ev_۱ + ev_۲ = (۰,۰,\frac{۴}{۳}) = U_D$$

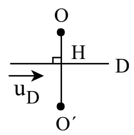
$$A = (۲,۳,۴) \in D \Rightarrow D : \frac{x-۲}{۰} = \frac{y-۳}{۰} = \frac{z-۴}{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow D : \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$$

پس خط $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ که موازی محور zها است همان خط مطلوب است.

۲۹. گزینه ۳ نقطه‌ی متغیر $(۳,۲t-۱,۳-t)$ را روی خط $D : (x = ۳, y = ۲t-۱, z = ۳-t)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $uD = (۰,۲,-۱)$، برای یافتن مختصات H کافی است معادله‌ی برداری زیر را حل کنیم:

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{UD} = ۰ \Rightarrow (۳,۲t-۱,۳-t)\cdot(۰,۲,-۱) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴t-۲-۳+t = ۰ \Rightarrow t = ۱$$



پس $H = (۳,۱,۲)$ و داریم:

$$O' = ۲H - O = (۶,۲,۴) - (۰,۰,۰) = (۶,۲,۴)$$

جمع مختصات این نقطه برابر ۱۲ است.

۳۰. گزینه ۱ ابتدا بردار هادی خط D را محاسبه می‌کنیم:

$$D:\begin{cases} x+۲y-z=۱ : P_۱ \\ ۲x-y=۲ : P_۲ \end{cases} \Rightarrow uD = NP_۱ \times NP_۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{vmatrix} = (-۱,-۲,-۵)$$

$$Np = uD \times \overrightarrow{AB} = (-۱,-۲,-۵) \times (۱,۲,۱) = ۸i - ۴j$$

$$P : ۸(x-۱) - ۴(y+۱) = ۰ \Rightarrow ۲x - ۲ - y - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲x - y = ۳$$

به ازای $y = ۰$ نقطه ی تلاقی صفحه P و محور x ها به دست می آید. $x = \frac{۳}{۲}$