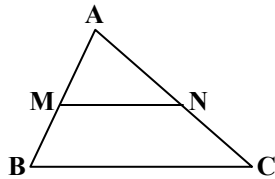


فصل ۳: تشابه

هندسه ۱

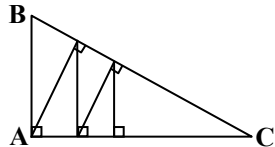
۱- در مثلث شکل مقابل $MN \parallel BC$ می‌باشد. کدام رابطه صحیح نیست؟



$$\frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC} \quad (2) \quad \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \quad (1)$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \quad (4) \quad \frac{MB}{AB} = \frac{BC}{MN} \quad (3)$$

۲- در شکل زیر چند مثلث متشابه با $\triangle ABC$ وجود دارد؟



(۱) ۶

(۲) ۸

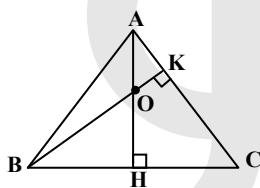
(۳) ۷

(۴) ۴

۳- در مثلث ABC با اضلاع a و b و c زاویه‌ی A قائمه است. روی ضلع AC و خارج مثلث، مربع ACEF را رسم نموده‌ایم. اگر BE ضلع AC را در M قطع کند، اندازه‌ی AM برابر است با:

$$\frac{abc}{a+b+c} \quad (4) \quad \frac{ac}{a+c} \quad (3) \quad \frac{bc}{b+c} \quad (2) \quad \frac{ab}{b+a} \quad (1)$$

۴- در شکل مقابل دو ارتفاع AH و BK رسم شده‌اند. اگر $AO = 1$ ، $OH = 2$ و $AC = 5$ باشند، اندازه‌ی BH کدام است؟



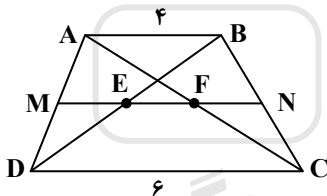
(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۴

۵- در دوزنقه‌ی ABCD با اندازه‌های دو قاعده‌ی ۴ و ۶، نقاط M و N وسط‌های دو ساق می‌باشند که MN موازی قاعده‌ها شده است. اندازه‌ی



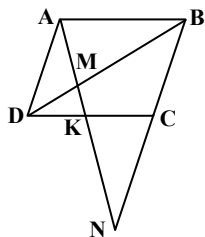
پاره‌خط EF برابر است با:

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶- در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل، AN طوری رسم شده که $MK = 4$ و $KN = 5$ است، در این صورت اندازه‌ی AM کدام می‌باشد؟

(۱) $\frac{4}{5}$

(۲) ۵

(۳) $\frac{5}{5}$

(۴) ۶

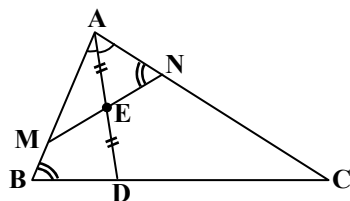
۷- بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اضلاع یک مثلث برابر ۶ و ۳ می‌باشند. اگر این مثلث با مثلثی به اضلاع $a^2 + 1$ ، $a^2 + 2$ و $a^2 + 3$ متشابه باشد، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مثلث کوچک‌تر کدام است؟

$$\frac{9}{4} \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۸- در مثلث ABC: $\hat{A} = 120^\circ$ ، $AB = 6$ و $AC = 9$ ، طول نیمساز داخلی AD در این مثلث برابر است با:

$$\frac{6}{4} \quad (4) \quad \frac{4}{8} \quad (3) \quad \frac{3}{6} \quad (2) \quad \frac{2}{4} \quad (1)$$

۹- در شکل زیر $\hat{B} = \hat{N}$ و نیمساز AD رسم شده و $AE = ED$ است. نسبت محیط مثلث AMN به محیط مثلث ABC کدام است؟



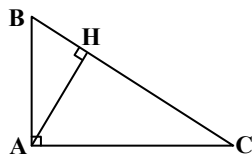
(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰- کوچک ترین ضلع مثلثی برابر a و کوچک ترین ضلع مثلث دیگری متشابه با مثلث اول برابر b است. در این صورت نسبت محیط مثلث اول به دوم و نسبت مساحت مثلث اول به دوم به ترتیب برابر است با:

(۱) $\frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b}$ (۲) $\frac{a^2}{b^2}$ و $\frac{a^2}{b^2}$ (۳) $\frac{a}{b^2}$ و $\frac{a}{b}$ (۴) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ و $\frac{a}{b}$

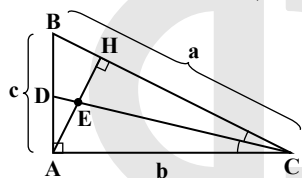
۱۱- در مثلث قائم الزاویه ABC، ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. اگر محیط های سه مثلث ABH، ACH و ABC به ترتیب P_1 و P_2 و P_3 باشند، کدام رابطه بین آن ها صحیح است؟



(۱) $P_3 = P_1 + P_2$ (۲) $P_3^2 = P_1 P_2$

(۳) $P_3^2 = P_1^2 + P_2^2$ (۴) $P_3 = \frac{P_1 + P_2}{2}$

۱۲- در مثلث قائم الزاویه ABC با اضلاع a و b و c نیمساز زاویه C رسم شده است. نسبت $\frac{CE}{CD}$ برابر است با:



(۱) $\frac{c}{a}$ (۲) $\frac{b}{a}$

(۳) $\frac{b+c}{a}$ (۴) $\frac{b+c}{bc}$

۱۳- دو مستطیل در کدام حالت متشابه اند؟

(۱) در هر حالتی متشابه اند.

(۲) در حالتی که نسبت طول به عرض یکی با نسبت طول به عرض دیگری برابر باشد.

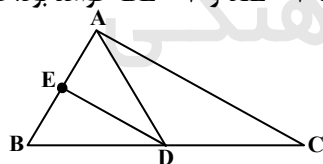
(۳) در حالتی که زاویه های بین دو قطر در دو مستطیل مساوی باشد.

(۴) گزینه ی ۲ و ۳ صحیح می باشند.

۱۴- در یک مثلث قائم الزاویه، از وسط وتر عمودی بر ضلع قائمه فرود می آوریم تا مثلث به یک مثلث کوچک و یک چهارضلعی تفکیک شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت چهارضلعی حاصل است؟

(۱) ۴ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۲

۱۵- اگر در مثلث ABC نیمساز AD را رسم کنیم و پاره خط DE را موازی ضلع AC در مثلث رسم کنیم، $AE = 4$ و $BE = 2$ خواهد بود. طول DE کدام است؟



(۱) ۳ (۲) ۴

(۳) ۶ (۴) $\frac{7}{5}$

۱۶- در مثلث ABC می دانیم $a > b > c$ است. اگر از سه رأس مثلث به موازات اضلاع خطوطی رسم کنیم تا مثلث MNP حاصل شود، طول کوچک ترین ضلع مثلث MNP کدام است؟

(۱) $a + b + c$ (۲) ۲a (۳) ۲b (۴) ۲c

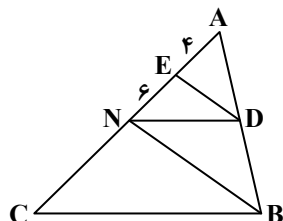
۱۷- در مربعی به ضلع ۸ واحد، فاصله ی وسط یک ضلع از قطر مربع کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

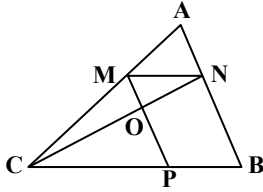
۱۸- در شکل مقابل، می دانیم $DE \parallel BN$ و $DN \parallel BC$. اندازه ی AC کدام است؟

(۱) ۱۵ (۲) ۲۱

(۳) ۲۴ (۴) ۲۵



۱۹- در شکل مقابل، $\frac{NA}{NB} = \frac{1}{2}$ و چهارضلعی MNBP متوازی‌الاضلاع است. نسبت مساحت مثلث MNO به مساحت مثلث AMN چقدر است؟



$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{9} \quad (3)$$

۲۰- در مثلث ABC اگر $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 25^\circ$ و $AC = 6$ و $BC = 9$ باشد، فاصله‌ی رأس B از پای نیمساز وارد از رأس A بر ضلع BC چقدر است؟

$$6 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

خریدار



مؤسسه آموزشی فرهنگی

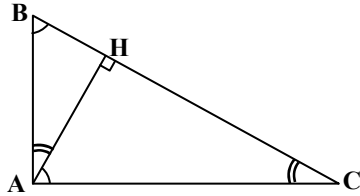
پاسخ های تشریحی فصل ۳

۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

رابطه ی گزینه ی ۳ نادرست است. با توجه به تشابه مثلث ABC و AMN :

۲- گزینه ۲ پاسخ است.



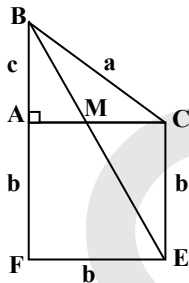
در هر مثلث قائم الزاویه اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث ABH و ACH با

مثلث ABC متشابه اند، زیرا:

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \text{ و } \hat{HAC} + \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{HAC} = \hat{B} \text{ و } \hat{HAB} = \hat{C}$$

بنابراین تمام مثلث های قائم الزاویه ای که در صورت سؤال دیده می شوند با مثلث ABC متشابه اند، که ۸ مثلث می باشند.

۳- گزینه ۲ پاسخ است.



طبق تشابه دو مثلث ABM و BEF :

$$\frac{AM}{EF} = \frac{AB}{BF} \Rightarrow \frac{AM}{b} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow AM = \frac{bc}{b+c}$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

در دو مثلث متشابه AOK و OBH دو زاویه ی OAK و OBH با هم برابرند. با توجه به برابری این دو زاویه دو مثلث قائم الزاویه OBH و AHC نیز با هم متشابه می شوند:

$$\frac{AC}{OB} = \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{OH} \Rightarrow \frac{1+2}{BH} = \frac{HC}{2} \Rightarrow BH.HC = 6$$

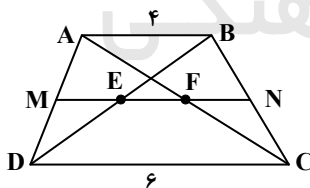
در مثلث قائم الزاویه AHC بر طبق قضیه ی فیثاغورث:

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$BH \times 4 = 6 \Rightarrow BH = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

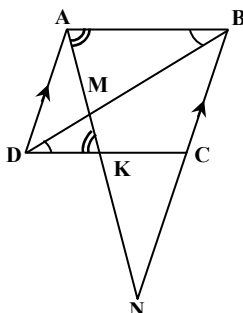
۵- گزینه ۱ پاسخ است.

بر طبق قضیه تالس در هر یک از مثلث های ABC و BDC چون N وسط BC است، پس F وسط AC و E نیز وسط BD است:



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC: \frac{FN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FN}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow FN = 2 \\ \triangle BDC: \frac{EN}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EN}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow EF = 1$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB \sim \triangle MCK \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{AM}{MK} \\ \triangle ADM \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{MD}{MB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{MK} = \frac{MN}{AM}$$

$$\Rightarrow AM^2 = MN.MK = (4+5) \times 4 = 36 \Rightarrow \boxed{AM = 6}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\frac{3}{a^2+1} = \frac{\text{ضلع وسط}}{a^2+2} = \frac{6}{a^2+3}$$

از تساوی اول و آخر:

$$3a^2+9=6a^2+6 \Rightarrow 3a^2=3 \Rightarrow a^2=1$$

پس اضلاع مثلث دوم برابرند با: ۲ و ۳ و ۴

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \text{نسبت مساحت‌ها} \Rightarrow \frac{3}{2} = \text{نسبت تشابه}$$

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

از نقطه‌ی B خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AC را در نقطه‌ی E قطع کند. با توجه به خطوط موازی و مورب: $\hat{EBA} = 60^\circ$ و $\hat{AEB} = 60^\circ$ و لذا مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است و $EA = 6$

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AD}{EB} \Rightarrow \frac{9}{9+6} = \frac{AD}{6} \Rightarrow AD = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

دو مثلث AMN و ABC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها با نسبت نیمسازهای متناظر برابر است، پس نسبت تشابه

$$\frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$$

آن‌ها برابر است با:

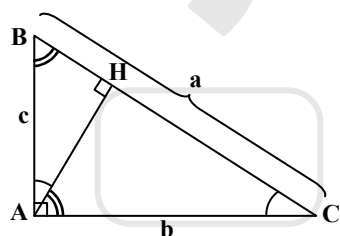
نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها با نسبت ضلع‌های متناظر آن‌ها برابر است، پس: $k = \frac{a}{b}$

اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت محیط آن‌ها با نسبت تشابه برابر است، ولی نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است. (k^2)

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.



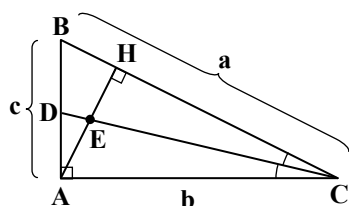
$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \\ \hat{C} + \hat{HAC} = 90^\circ \\ \hat{B} + \hat{HAB} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{HAC} = \hat{B} \\ \hat{HAB} = \hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \triangle ABH \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{P_1}{P_3} = \frac{c}{a} \\ \triangle ACH \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{P_2}{P_3} = \frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_1^2}{P_3^2} = \frac{c^2}{a^2} \\ \frac{P_2^2}{P_3^2} = \frac{b^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{P_1^2 + P_2^2}{P_3^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1 \Rightarrow P_1^2 + P_2^2 = P_3^2$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

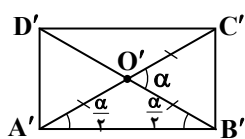
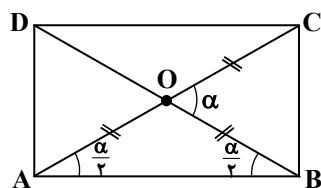


دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و AHC به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند. نسبت اجزاء متناظر در دو مثلث متشابه با نسبت تشابه برابر است، بنابراین نسبت نیمسازهای دو زاویه‌ی برابر (زاویه‌ی C در هر دو مثلث) با نسبت تشابه آن‌ها (نسبت وترها) برابر است:

$$\frac{CE}{CD} = \frac{b}{a}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

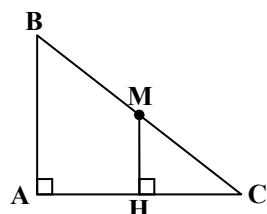
دو شکل را متشابه گویند هرگاه زوایای برابر و اضلاع متناسب داشته باشند. در دو مستطیل چون زوایا برابرند لذا اگر نسبت طول به عرض یک مستطیل با نسبت طول به عرض مستطیل دیگر برابر باشد، دو مستطیل متشابه‌اند.



اگر زاویه های بین دو قطر در دو مستطیل برابر باشند مطابق شکل ها دو مثلث OAB و $O'A'B'$ متشابه اند و با توجه به برابری زاویه ها در دو مثلث متساوی الساقین OCB و $O'C'B'$ این دو مثلث نیز متشابه اند و با نوشتن نسبت تناسب ها در مثلث های عنوان شده، دو مستطیل متشابه می شوند.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به رابطه ی تالس داریم:

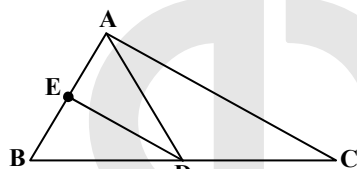


$$MH = \frac{AB}{2}, \quad CH = \frac{AC}{2}$$

$$S_{\triangle CHM} = \frac{MH \cdot CH}{2} = \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{AC}{2}}{2} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle ABM} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} S_{\triangle ABM}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

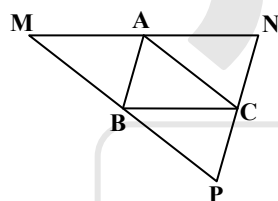


$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel AC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BE}{EA} = \frac{BD}{DC} \\ \text{قضیه نیمساز: } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \end{array} \right\} \xrightarrow{AB=AE+EB} \frac{BE}{EA} = \frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{6}{AC} \rightarrow AC = 12$$

$$DE \parallel AC \xrightarrow{\text{تشابه}} \frac{DE}{AC} = \frac{EB}{AB} = \frac{2}{6} \rightarrow DE = \frac{1}{3} AC = \frac{12}{3} = 4$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ است.

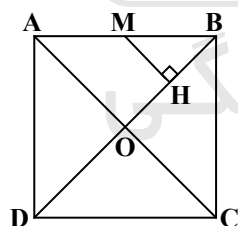
با توجه به رابطه ی تالس داریم:



$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{AB}{PN} = \frac{1}{2}$$

از آن جایی که طول کوچک ترین ضلع مثلث ABC برابر c است، لذا طول کوچک ترین ضلع مثلث MNP نیز ۲c خواهد بود.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ است.



هدف سؤال، محاسبه ی طول MH است.

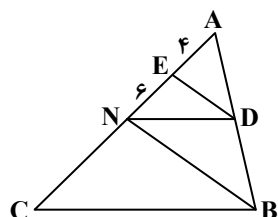
با توجه به آن که قطرهای مربع بر هم عمودند، لذا $AO \parallel MH$ است.

از این رو با توجه به آن که نقطه ی M وسط AB است، طبق رابطه ی تالس در $\triangle AOB$ خواهیم داشت:

$$MH = \frac{OA}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = 8 \\ \triangle AOB : \text{قائم الزاویه متساوی الساقین} \end{array} \right\} \Rightarrow OA = 4\sqrt{2} \Rightarrow MH = 2\sqrt{2}$$

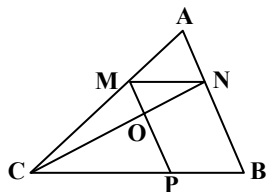
۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABN : DE \parallel BN \Rightarrow \frac{AE}{EN} = \frac{AD}{BD} \text{ تالس} \\ \triangle ABC : DN \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{AD}{BD} \text{ تالس} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EN} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{10}{NC}$$

$$\Rightarrow NC = 15 \Rightarrow AC = 25$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\left. \begin{aligned} \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{CM} = \frac{1}{2} &\rightarrow \frac{CM}{AC} = \frac{2}{3} \\ CMO \sim ACN &\rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{CMO}}{S_{ACN}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$MNO \sim POC \rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{MN}{BC - BP} = \frac{1}{3-1}$$

$$\rightarrow \frac{MN}{PC} = \frac{1}{2} = \frac{NO}{OC} \rightarrow \frac{S_{MNO}}{S_{MOC}} = \frac{ON}{OC} = \frac{1}{2} \rightarrow S_{MNO} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} S_{ACN} \right)$$

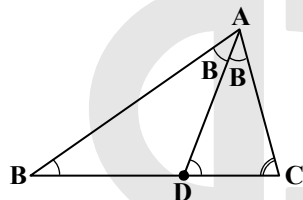
$$S_{MNO} = \frac{2}{9} S_{ACN}$$

$$S_{AMON} = S_{ACN} - \frac{4}{9} S_{ACN} = \frac{5}{9} S_{ACN} \rightarrow S_{AMN} = S_{AMON} - S_{OMN} = \frac{5}{9} S_{ACN} - \frac{2}{9} S_{ACN} = \frac{1}{3} S_{ACN}$$

$$\frac{S_{MNO}}{S_{AMN}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

نیمساز A را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} \hat{C} &= \hat{C} \\ \hat{DAC} &= \hat{ABC} \end{aligned} \right\} \rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{AC^2}{BC} = \frac{6^2}{9} = 4 \Rightarrow BD = 5$$

مؤسسه آموزشی فرهنگی