

فصل ۴: شکل‌های فضایی

هندسه ۱

۱- هر مکعب مستطیل دارای رأس، وجه، یال و قطر است.

۴-۱۲-۶-۸ (۴)

۲-۱۲-۶-۶ (۳)

۴-۱۴-۴-۸ (۲)

۲-۱۲-۶-۸ (۱)

۲- در مکعبی به اندازه‌ی یال a ، از نقطه‌ی دلخواه M داخل مکعب بر تمام وجوه عمود رسم کرده‌ایم. مجموع تمام این فواصل از وجوه برابر است با:

$6a$ (۴)

$3a$ (۳)

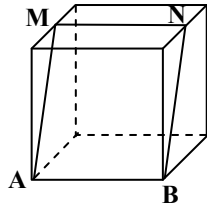
$2a$ (۲)

a (۱)

۳- در یک مکعب مستطیل با ابعاد a و b و c اگر d اندازه‌ی قطر و S مساحت کل مکعب مستطیل باشد، کدام رابطه همواره صحیح است؟

$d^2 + S = (a+b+c)^2$ (۴) $d^2 - S = (a+b+c)^2$ (۳) $d^2 + 2S = (a+b+c)^2$ (۲) $d^2 - 2S = (a+b+c)^2$ (۱)

۴- در مکعب شکل زیر که اندازه‌ی هر یال ۱ می‌باشد، نقاط M و N وسط‌های دو یال می‌باشند. مساحت $AMNB$ برابر است با:



$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳)

۵- در یک منشور با قاعده‌ی ۱۳۸۹ ضلعی، تعداد یال‌ها چند برابر تعداد رأس‌هاست؟

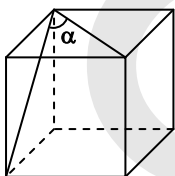
$\frac{2}{3}$ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

۶- در مکعب شکل زیر زاویه‌ی α چند درجه است؟



45° (۱)

60° (۲)

90° (۳)

30° (۴)

۷- محور یک استوانه‌ی مایل با قاعده‌ی آن زاویه 30° می‌سازد. اگر طول محور استوانه برابر ۶ باشد، حجم استوانه چند برابر مساحت قاعده‌ی آن است؟

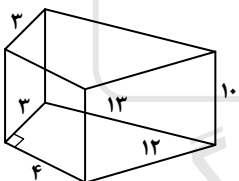
۶ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

۳ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۸- در منشور قائم شکل زیر اندازه‌ی اضلاع قاعده و ارتفاع منشور مشخص شده‌اند. مساحت کل و حجم این منشور به ترتیب عبارتند از:



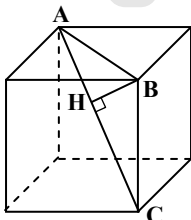
$S = 320$ و $V = 360$ (۱)

$S = 392$ و $V = 120$ (۲)

$S = 320$ و $V = 120$ (۳)

$S = 392$ و $V = 360$ (۴)

۹- در مکعبی به ضلع واحد، اندازه‌ی تصویر قطر یک وجه بر قطر مکعب کدام است؟



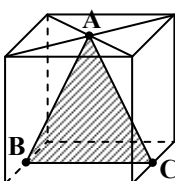
$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳)

۱۰- در مکعب شکل زیر نقطه‌ی A وسط وجه بالا و نقاط B و C وسط‌های دو یال دیگر مکعب می‌باشند. اگر اندازه‌ی هر یال مکعب ۱ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



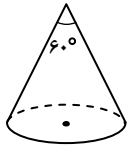
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

۱ (۱)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱۱- اگر حجم مخروط قائم شکل زیر برابر $9\sqrt{3}\pi$ باشد، محیط قاعده ی مخروط کدام است؟



- (۱) 12π (۲) 24π
(۳) 6π (۴) 32π

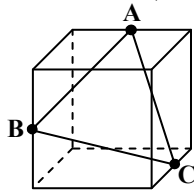
۱۲- در یک هرم منتظم با قاعده ی مربع، وجه های جانبی مثلث های متساوی الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ می باشند. حجم این هرم کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $4\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{6}$ (۴) $8\sqrt{6}$

۱۳- نسبت ارتفاع یک ۴ وجهی منتظم به اندازه ی یال آن کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۴- در مکعب شکل زیر نقاط A و B و C وسط های یال ها می باشند، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت یک وجه مکعب است؟

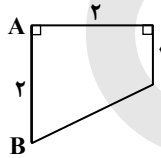


- (۱) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ (۲) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$
(۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

۱۵- نسبت مساحت کل نیم کره ای به شعاع R به حجم نیم کره کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{R}$ (۲) $\frac{3/5}{R}$ (۳) $\frac{4/5}{R}$ (۴) $\frac{6}{R}$

۱۶- اگر شکل زیر حول AB، 360° دوران کند، حجم جسم حاصل کدام است؟

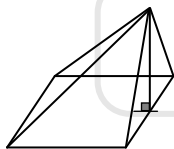


- (۱) $\frac{8\pi}{3}$ (۲) $\frac{4\pi}{3}$
(۳) $\frac{16\pi}{3}$ (۴) 3π

۱۷- مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ را حول وتر آن دوران داده ایم. حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{48\pi}{5}$ (۲) $\frac{36\pi}{5}$ (۳) $\frac{34\pi}{5}$ (۴) $\frac{72\pi}{5}$

۱۸- حجم هرم مربع القاعده مایلی با ضلع قاعده ی $2\sqrt{3}$ که یک وجه آن مثلث متساوی الاضلاعی است که بر قاعده عمود است، برابر کدام است؟



- (۱) ۳۶ (۲) ۲۴
(۳) ۱۲ (۴) ۱۸

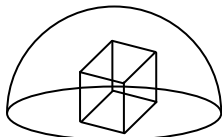
۱۹- دو مکعب مستطیل یکسان به طور کامل در یک مکعب به طول یال ۴ واحد جای گرفته اند. طول قطر هریک از این مکعب مستطیل ها چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{3}$

۲۰- حجم مخروطی با شعاع قاعده ی L و ارتفاع L برابر حجم هرم مربع القاعده ای به قطر قاعده ی L است. ارتفاع هرم چقدر است؟

- (۱) πL (۲) $\frac{\sqrt{L}}{\pi}$ (۳) $2\pi L$ (۴) $\frac{\sqrt{2L}}{\pi}$

۲۱- مکعبی را درون نیم کره ای به شعاع R به گونه ای محاط کرده ایم که چهار رأس مکعب روی نیم کره و یک وجه مکعب بر قاعده ی نیم کره قرار گرفته است. نسبت حجم مکعب به حجم نیم کره چقدر است؟



- (۱) $\frac{12\sqrt{5}}{25\pi}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{6\pi}$
(۳) $\frac{6\sqrt{5}}{25\pi}$ (۴) $\frac{\sqrt{6}}{2\pi}$

۲۲- دوزنقه ی متساوی الساقینی به قاعده های ۲ و ۴ و ساق های $\sqrt{5}$ را حول محور تقارن آن دوران می دهیم. حجم حاصل از دوران چقدر است؟

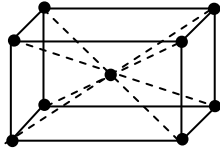
- (۱) 4π (۲) $\frac{14\pi}{3}$ (۳) $\frac{16\pi}{3}$ (۴) 6π

۲۳- مخروطی به ارتفاع ۶ درون کره ای به شعاع ۴ محاط شده است حجم این مخروط چیست؟

- (۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

پاسخ‌های تشریحی فصل ۴

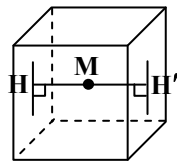
۱- گزینه ۴ پاسخ است.



مطابق شکل مشخص است که هر مکعب مستطیل دارای ۸ رأس، ۶ وجه،

۱۲ یال و ۴ قطر است.

۲- گزینه ۳ پاسخ است.



مطابق شکل مجموع فواصل از هر دو وجه روبه‌رو برابر یک یال مکعب است (a).

چون مکعب ۶ وجه دارد، پس مجموع تمام فواصل برابر است با ۳a.

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

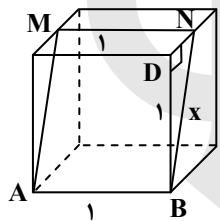
$$S = 2(ab + bc + ac)$$

مساحت کل جمع مساحت شش وجه است که هر وجه یک مستطیل می‌باشد.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = d^2 + S$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

در مثلث قائم‌الزاویه BDN می‌توان x را به‌دست آورد:



$$DN = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بنابراین مساحت مستطیل AMNB برابر است با:

$$S = 1 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

در تعداد رأس‌ها باید دو قاعده‌ی ۱۳۸۹ ضلعی را در نظر بگیریم که در این صورت:

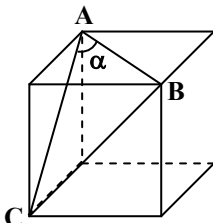
$$\text{تعداد رأس‌ها} = 2 \times 1389$$

در تعداد یال‌ها باید علاوه بر تعداد اضلاع دو قاعده‌ی ۱۳۸۹ ضلعی، یال‌های جانبی را نیز در نظر بگیریم:

$$\text{تعداد یال‌ها} = 2 \times 1389 + 1389 = 3 \times 1389$$

$$\frac{\text{تعداد یال‌ها}}{\text{تعداد رأس‌ها}} = \frac{3 \times 1389}{2 \times 1389} = \frac{3}{2}$$

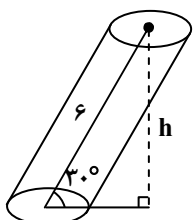
۶- گزینه ۲ پاسخ است.



هر کدام از اضلاع AB و AC و BC در مثلث ABC قطر یک وجه مکعب می‌باشند،

بنابراین هر سه با هم برابرند و لذا مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $\hat{\alpha} = 60^\circ$

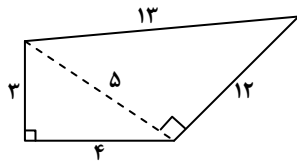
۷- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = r$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{حجم} \quad V = \pi r^2 h = \pi r^3 \\ \text{قاعده} \quad S = \pi r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{V}{S} = r$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.



قاعده ی این منشور مطابق شکل از دو مثلث قائم الزاویه به هم چسبیده

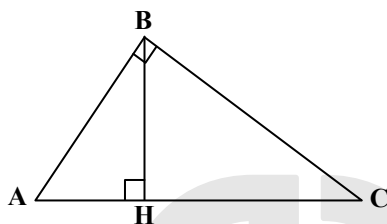
تشکیل شده است:

$$\left. \begin{aligned} \text{قاعده } S &= S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 6 + 30 = 36 \\ \text{جانبی } S &= \text{مستطیل } 4 \times (3 + 12 + 13) = 10(4 + 12 + 13 + 3) = 320 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{کل } S = 2 \times 36 + 320 = 392$$

$$\text{حجم } V = S \cdot h = 36 \times 10 = 360$$

نکته: (۵, ۴, ۳) و (۵, ۱۲, ۱۳) اعداد فیثاغورسی اند.

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

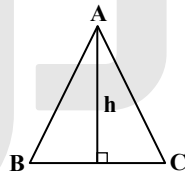
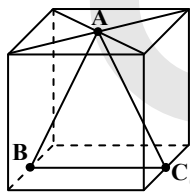


چون قطر AB بر وجه کناری مکعب عمود است، پس AB بر BC نیز عمود است و لذا

مثلث ABC قائم الزاویه است و $AB = \sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{3}$ و $BC = 1$

$$\begin{aligned} \triangle ABH \sim \triangle ABC &\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB^2 = AH \cdot AC \\ \Rightarrow 2 &= AH \times \sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ است.

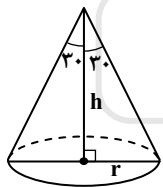


دقت کنید صفحه مثلث ABC موازی وجه مکعب است، برای همین ارتفاع مثلث

همان یال است.

$$S_{ABC} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ است.



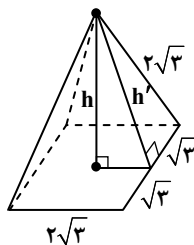
$$\tan 30^\circ = \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \sqrt{3}r$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 (\sqrt{3}r) = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

$$V = 9\sqrt{3}\pi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3 = 9\sqrt{3}\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$\text{محیط قاعده} = 2\pi r = 6\pi$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ است.

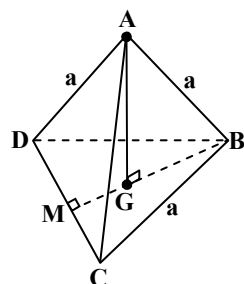


$$h' = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$h'^2 = h^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 9 = h^2 + 3 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \times (2\sqrt{3})^2 \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

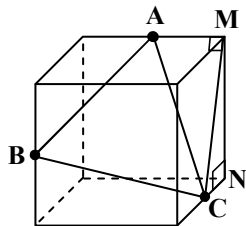
۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.



$$BG = \frac{2}{3} BM = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} a = \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

هر ضلع مکعب را a در نظر می‌گیریم.

$$AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a = \frac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow AB = BC = AC = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\frac{S_{ABC}}{a^2} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}}{a^2} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

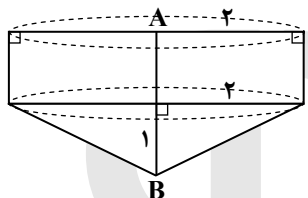
مساحت کل مجموع مساحت جانبی و مساحت قاعده است:

$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت جانبی} &= \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 = 2\pi R^2 \\ \text{مساحت قاعده} &= \pi R^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = 3\pi R^2$$

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{S}{V} = \frac{3\pi R^2}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{9}{2R} = \frac{4}{5}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

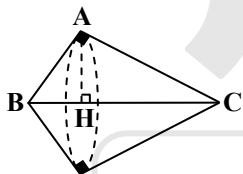
از دوران شکل، یک استوانه و یک مخروط تشکیل می‌شود که حجم آن‌ها بدین ترتیب محاسبه می‌شود:



$$\left. \begin{aligned} \text{استوانه } V &= \pi r^2 h = \pi \times 4 \times 1 = 4\pi \\ \text{مخروط } V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 4 \times 1 = \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_1 + V_2 = 4\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ است.

از دوران هر مثلث حول یکی از اضلاعش دو مخروط حاصل می‌شود که چون مساحت قاعده‌شان یکسان است، حجم آن‌ها برابر است با:



$$V = \frac{1}{3}S \times BH + \frac{1}{3}S \times CH = \frac{S}{3}(BH + CH) = \frac{S \times BC}{3} \rightarrow V = \frac{\pi(AH)^2 \times BC}{3}$$

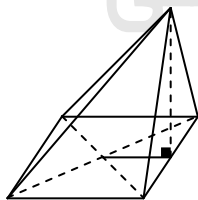
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow 3 \times 4 = AH \times 5 \Rightarrow AH = \frac{12}{5} \rightarrow V = \frac{\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5}{3} = \frac{48\pi}{5}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

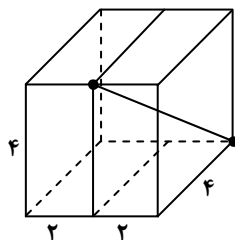
ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع در واقع ارتفاع هرم است و بنابر اصل کواویری حجم این

هرم مایل با حجم هرم مربع‌القاعده منتظم قائمی با همین ارتفاع برابر است. لذا:



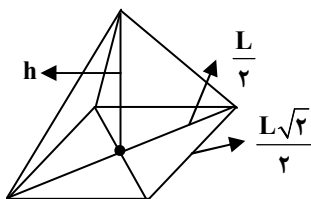
$$V = \frac{1}{3}S \times h = \frac{1}{3}a^2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3})^3}{2\sqrt{3}} = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\text{طول قطر مکعب مستطیل} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

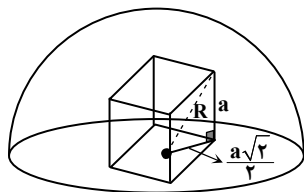
۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.



$$V = \frac{\pi L^2 \times L}{3} = \frac{(\frac{L\sqrt{2}}{2})^2 \times h}{3} \rightarrow \pi L^2 = \frac{L^2 h}{2} \rightarrow h = 2\pi L$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

در مثلث قائم الزاویه حاصل خواهیم داشت:



$$R^2 = a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{مکعب}}}{V_{\text{نیم کره}}} = \frac{a^3}{\frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} R^3}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{3\pi}$$

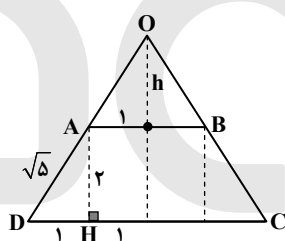
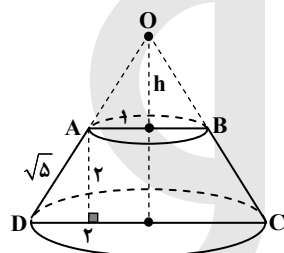
۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر دوزنقه‌ی متساوی الساقین را حول محور آن دوران دهیم، یک مخروط ناقص به دست می آید.

$$AH = \sqrt{5-1} = 2$$

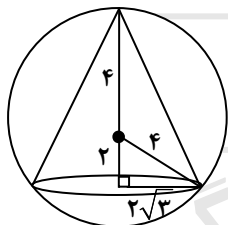
با قضیه‌ی تالس یا با تشابه داریم:

$$\frac{h}{h+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2h = h+2 \Rightarrow h = 2$$



$$V = \frac{1}{3} \pi (2)^2 \times 4 - \frac{1}{3} \pi (1)^2 \times 2 = \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.



$$r = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 6 = \frac{\pi}{3} (12) \times 6 = 24\pi$$