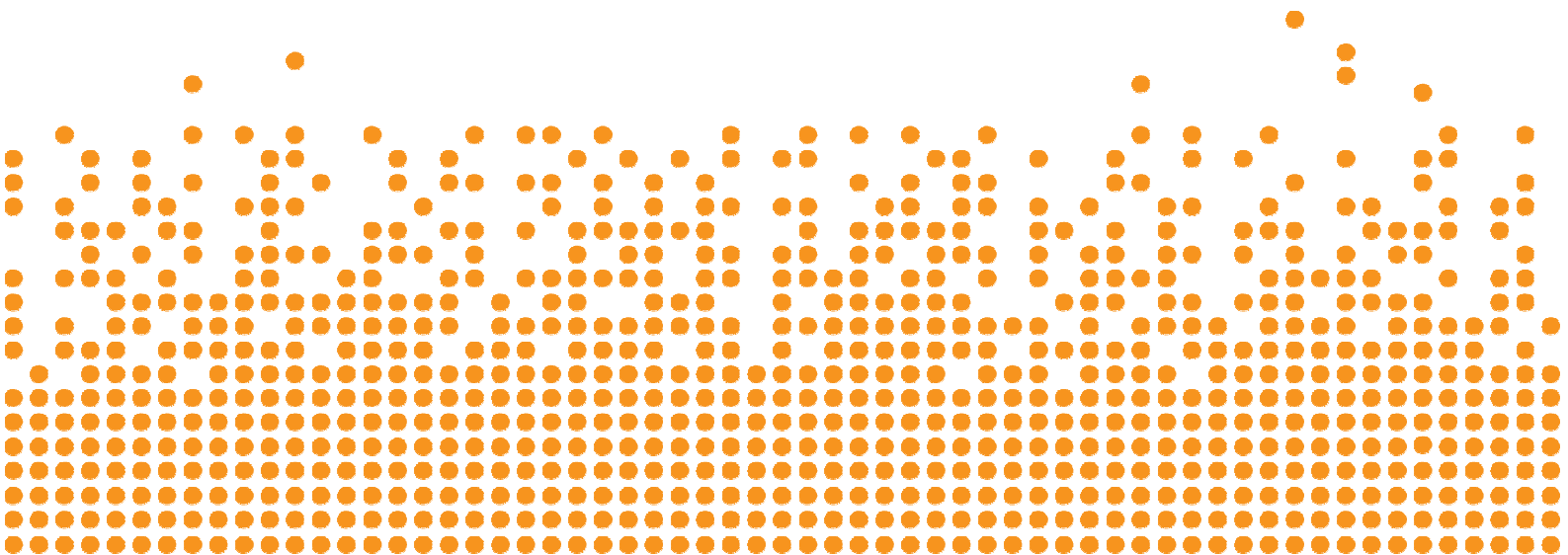
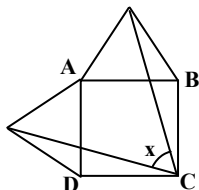


هندسه ۱
● فصل ۱ و ۲

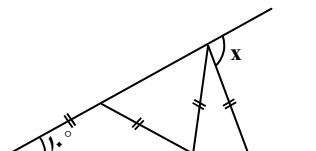


۱- در شکل زیر ABCD یک مربع است که روی دو ضلع آن دو مثلث متساوی الاضلاع بنا شده است، زاویه ی x چند درجه است؟



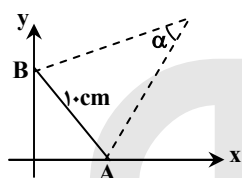
- (۱) 45°
(۲) 60°
(۳) 75°
(۴) 50°

۲- در شکل زیر با توجه به برابری پاره خط‌ها، زاویه ی x چند درجه است؟



- (۱) 30°
(۲) 40°
(۳) 50°
(۴) 60°

۳- یک پاره خط با طول ثابت ۱۰cm روی محورهای دستگاه مختصات قرار گرفته است، اگر نیمسازهای دو زاویه ی $\hat{B}Ax$ و $\hat{A}By$ را رسم کنیم، زاویه α :



- (۱) همواره ثابت و برابر 30° است.
(۲) همواره ثابت و برابر 45° است.
(۳) متغیر و کمتر از 30° است.
(۴) متغیر و کم‌تر از 45° است.

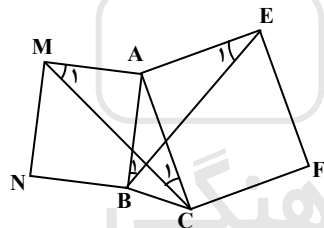
۴- در مثلثی $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ روی ضلع AC نقطه‌ی D را طوری انتخاب کرده‌ایم که $AD=AB$ باشد، زاویه ی $\hat{D}BC$ برابر است با:

- (۱) 30° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 50°

۵- بزرگ‌ترین زاویه ی خارجی یک مثلث $\frac{1}{3}$ مجموع دو زاویه ی خارجی دیگر است، بزرگ‌ترین زاویه ی حاده ی داخلی این مثلث چند درجه است؟

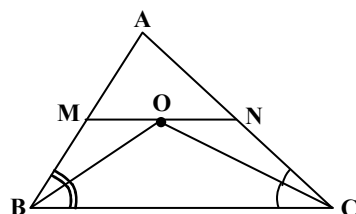
- (۱) 30° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 90°

۶- در شکل زیر روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC دو مربع ساخته‌ایم، کدام دو زاویه لزوماً باهم برابرند؟



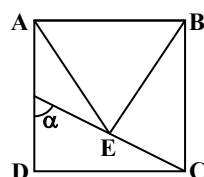
- (۱) \hat{C}_1 و \hat{B}_1
(۲) \hat{M}_1 و \hat{C}_1
(۳) \hat{E}_1 و \hat{C}_1
(۴) \hat{E}_1 و \hat{B}_1

۷- در مثلث ABC از نقطه‌ی O محل تلاقی نیمسازهای داخلی \hat{B} و \hat{C} ، پاره خطی موازی BC رسم کرده‌ایم، اگر محیط مثلث ABC از محیط مثلث AMN، ۴ واحد بیش‌تر باشد، اندازه ی ضلع BC کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۵
(۴) ۲

۸- در شکل زیر ABCD مربع و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است، زاویه ی α در این شکل چند درجه است؟



- (۱) 45°
(۲) 60°
(۳) 75°
(۴) 80°

۹- کدام یک از جملات زیر تعریف مربع نیست؟

(۱) مستطیلی که اقطارش عمود بر هم باشند.

(۳) مستطیلی که اقطارش نیمساز زوایا باشند.

(۲) لوزی که اقطارش با هم برابر باشند.

(۴) لوزی که اقطارش عمودمنصف یکدیگر باشند.

۱۰- در مثلث ABC ، $AB = 4$ ، $AC = 6$ است، از رأس B عمودی بر نیمساز داخلی زاویه A رسم کرده ایم تا AC را در D قطع کند. اندازه DC کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) $\frac{3}{5}$

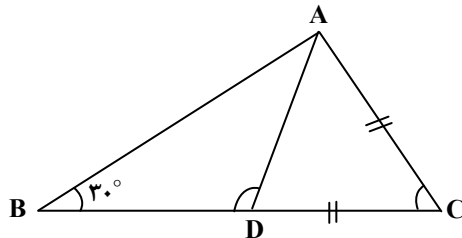
۱۱- در شکل زیر $\hat{BDA} = \hat{BAC}$ زاویه C چند درجه است؟

(۱) 30°

(۲) 40°

(۳) 50°

(۴) 60°



۱۲- در یک شش ضلعی منتظم بزرگ ترین قطر چند برابر کوچک ترین قطر است؟

(۱) ۲

(۲) $\sqrt{3}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

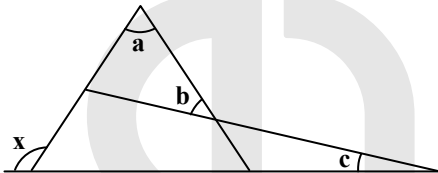
۱۳- در شکل زیر زاویه x بر حسب زوایای a و b و c کدام است؟

(۱) $a + b + c$

(۲) $a + b - c$

(۳) $a - b + c$

(۴) $2a + 2b - c$



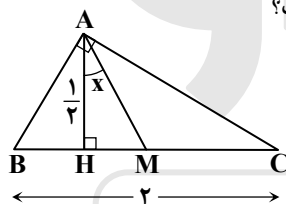
۱۴- در مثلث قائم الزاویه ای شکل زیر $AH = \frac{1}{2}$ و $BC = 2$ ، زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

(۱) 60°

(۲) 30°

(۳) 45°

(۴) 15°



۱۵- زوایای خارجی یک مثلث با اعداد ۳ و ۷ و ۸ متناسب اند. بزرگ ترین زاویه داخلی مثلث کدام است؟

(۱) 100°

(۲) 120°

(۳) 140°

(۴) 160°

۱۶- در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۳ و ۴ و ۵، طول نیمساز داخلی وارد بر وتر کدام است؟

(۱) $\frac{12}{5}$

(۲) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$

(۴) $\frac{12}{5}$

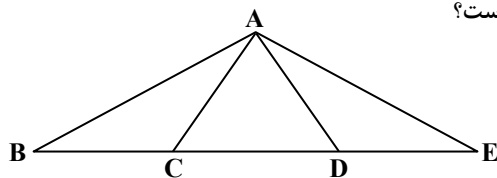
۱۷- در شکل زیر $AC = AD = CD = BC = DE$ می باشد. زاویه \hat{BAE} چقدر است؟

(۱) 120°

(۲) 105°

(۳) 90°

(۴) 135°



۱۸- در دوزنقه متساوی الساقینی با اندازه های دو قاعده ۱ و ۷ و اندازه ی ارتفاع ۴، نسبت محیط دوزنقه به اندازه ی یک قطر آن کدام است؟

(۱) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$

(۲) $\frac{8}{3\sqrt{3}}$

(۳) $\frac{9}{2\sqrt{2}}$

(۴) $\frac{9}{4\sqrt{2}}$

۱۹- کدام گزینه نادرست است؟

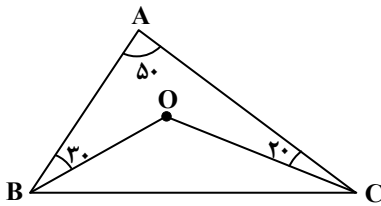
(۱) چهارضلعی ای که اقطار آن مساوی و منصف باشند، مستطیل است.

(۲) اگر چهارضلعی ای چهار ضلع برابر داشته باشد، لوزی است.

(۳) اگر دو ضلع چهارضلعی ای هم مساوی و هم موازی باشند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

(۴) اگر دو ضلع چهارضلعی با هم و دو قطر آن نیز با هم برابر باشند، چهارضلعی مستطیل است.

۲۰- در شکل مقابل زاویه‌ی O چقدر است؟



(۱) ۹۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۱۰

(۴) ۱۲۰

۲۱- زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۲ و ۷ و ۹ می‌باشند. زاویه بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر ضلع بزرگ‌تر چقدر است؟

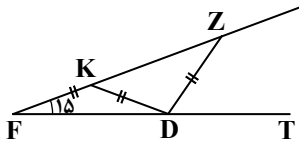
(۴) ۷۰

(۳) ۶۰

(۲) ۵۰

(۱) ۴۰

۲۲- در شکل مقابل اگر $\angle ZFD = 15^\circ$ باشد، نیمساز زاویه‌ی ZDT با امتداد خط FZ چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (اندازه‌های مشخص شده روی شکل با هم برابرند.)

(۲) $82/5^\circ$ (۱) 15° (۴) 75° (۳) $7/5^\circ$

۲۳- در مثلثی با زوایای $\hat{A} = 50^\circ$ و $\hat{B} = 70^\circ$ ، زاویه‌ی حاده بین ارتفاع AH و ارتفاع BH' چقدر است؟

(۴) ۸۰

(۳) ۳۰

(۲) ۴۰

(۱) ۶۰

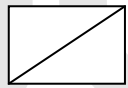
۲۴- در مثلثی با اضلاع ۱۰ و ۱۰ و ۱۲، طول بلندترین ارتفاع چقدر است؟

(۴) ۱۶

(۳) ۸

(۲) $9/6$ (۱) $4/8$

۲۵- چه تعداد از اشکال زیر خم ساده‌ی بسته هستند؟



(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۵

۲۶- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم. سپس نیمساز زوایای $\hat{A}MB$ و $\hat{A}MC$ را رسم کرده‌ایم تا اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط Q و P قطع کند. چهارضلعی APMQ الزاماً کدام است؟

(۴) مربع

(۳) مستطیل

(۲) لوزی

(۱) متوازی‌الاضلاع

۲۷- در مثلث متساوی الساقین ABC ($BA = BC$, $\hat{B} = 80^\circ$) قاعده‌ی AC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم، زاویه‌ی CBD چند درجه است؟

(۴) ۳۵

(۳) ۳۰

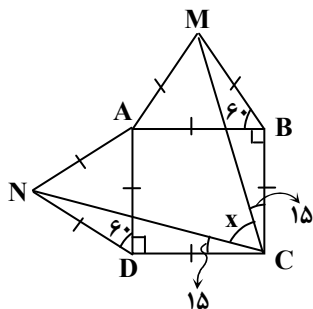
(۲) ۲۵

(۱) ۲۰

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

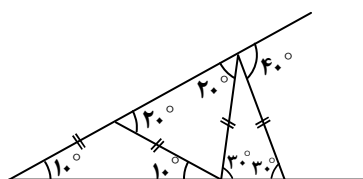
دو مثلث ΔBMC و ΔNDC متساوی الساقین هستند و زاویه‌ی رأس آن‌ها



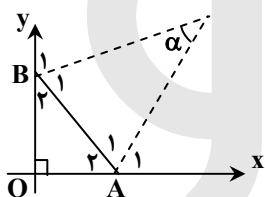
$150^\circ = 90^\circ + 60^\circ$ است پس هر زاویه ی مجاور قاعده 150° می باشد:

$$\hat{x} = 9.0 - 2 \times 15^\circ = 6.0^\circ$$

با توجه به مثلث‌های متساوی الساقین و زاویه‌های خارجی تمام زاویه‌ها به دست می‌آیند.



۳- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\begin{cases} 2\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 1\lambda^\circ \\ 2\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 1\lambda^\circ \end{cases}$$

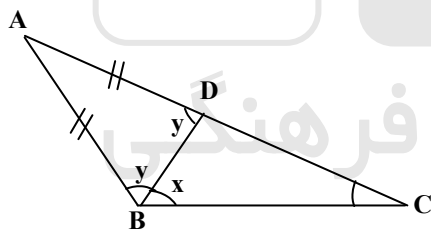
$$r(\hat{A}_1 + \hat{B}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{B}_2) = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \angle(\hat{A}_1 + \hat{B}_1) + 90^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 135^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 45^\circ$$

نکته: زاویه بین نیمسازهای خارجی نظیر دو رأس A و B برابر است با: $\frac{\hat{O}}{2} - 90$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.



مثلاً ABC در رأس B منفرجه الزاویه است:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{q}_0^\circ \\ \text{زاویه خارجی} \end{cases} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{q}_0^\circ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q}_0^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

مجموع زوایای خارجی یک مثلث 360° است و بر طبق فرض: $x = \frac{1}{3}(y + z)$

$$x + y + z = 36.^\circ \Rightarrow x + 3x = 36.^\circ \Rightarrow 4x = 36.^\circ \Rightarrow \hat{x} = 9.^\circ$$

بزرگ‌ترین زاویه ی حادثه‌ی داخلی، مکمل کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی مثلث است پس:

$$\hat{\alpha} = 1\lambda^{\circ} - x = 1\lambda^{\circ} - q^{\circ} = q^{\circ}$$

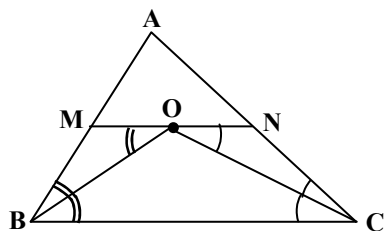
نکته: اگر در مثلثی یک زاویه ی 90° داشته باشیم، این زاویه حتماً بزرگ‌ترین زاویه ی مثلث است.

۶- گز بنه ۳ پاسخ است.

همنهشت هستند، از تساوی دو مثلث اجزای متناظر آنها یعنی زوایای \hat{C}_1 و \hat{E}_1 باهم برابرند.

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

بر طبق قضیه‌ی خطوط موازی مورب و خاصیت نیمساز:



$$\begin{cases} \hat{M}OB = \hat{O}BC = \hat{M}BO \\ \hat{N}OC = \hat{O}CB = \hat{N}CO \end{cases}$$

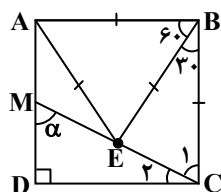
پس دو مثلث OMB و ONC متساوی الساقین هستند و $MO = MB$ و $ON = NC$

$$\begin{cases} \Delta ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC \\ \Delta AMN \text{ محیط} = AM + AN + OM + ON = AM + MB + AN + NC = AB + AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = 4 \text{ : تفاضل}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

مثلث BEC متساوی الساقین است:



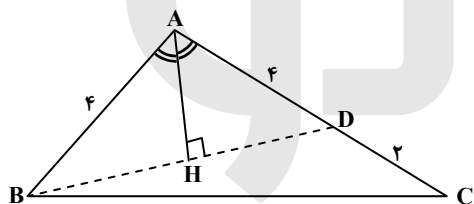
$$\hat{C}_1 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 15^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه DMC: $\hat{\alpha} = 90^\circ - \hat{C}_2 = 75^\circ$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر یک ویژگی خاص مستطیل در کنار ویژگی خاص لوزی قرار گیرد تعریف مربع به دست می‌آید که در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ چنین است، اما در گزینه‌ی ۴ عمود منصف بودن اقطار همان ویژگی لوزی است و این جمله نیز تعریف لوزی است نه مربع.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

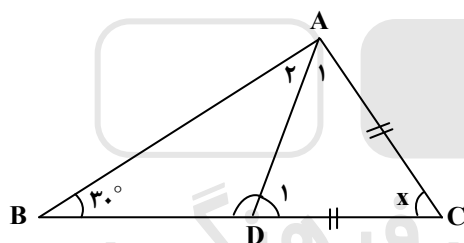


در مثلث ABD ارتفاع AH، نیمساز زاویه‌ی A نیز می‌باشد، چون ارتفاع و

نیمساز بر هم منطبق شده‌اند پس مثلث ABD در رأس A متساوی الساقین است:

$$AB = AD = 4 \Rightarrow DC = AC - AD = 6 - 4 = 2$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\begin{cases} \hat{B}DA = \hat{B}AC = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \\ \hat{B}DA = \hat{A}_1 + \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\hat{A}_2 = \hat{x}}$$

$$\hat{D}_1 = \hat{A}_2 + 30^\circ = \hat{x} + 30^\circ, \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = x + 30^\circ$$

$$\hat{A}DC: \hat{A}_1 + \hat{D}_1 + \hat{x} = 180^\circ \Rightarrow 2(x + 30^\circ) + x = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{x} = 40^\circ}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ است.

در شش ضلعی منتظم با رسم قطرهای رسم شده از رأس‌های روبه‌رو، ۶ مثلث متساوی الاضلاع

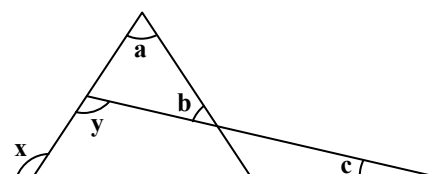
حاصل می‌شود، پس بزرگ‌ترین قطر مطابق شکل ۲a است.

کوچک‌ترین قطر در شکل AB است که اگر ارتفاع یک مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنیم:

$$\frac{AB}{2} = h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow AB = \sqrt{3}a$$

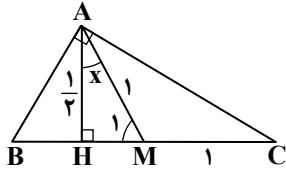
پس نسبت بزرگ‌ترین قطر به کوچک‌ترین قطر برابر $\frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ است.

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\begin{cases} \text{زاویه‌ی خارجی } x = y + c \\ \text{زاویه‌ی خارجی } y = a + b \end{cases} \Rightarrow x = a + b + c$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.



$$AM = \frac{1}{2} BC = 1$$

میانه ی وارد بر وتر نصف وتر است:

در مثلث قائم الزاویه ی AHM ضلع روبه رو به زاویه ی 30° نصف وتر است و برعکس:

$$AH = \frac{1}{2} AM \Rightarrow \hat{M}_1 = 30^\circ \Rightarrow \hat{x} = 60^\circ$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

مجموع زوایای خارجی یک مثلث برابر 360° است و این زوایا بر طبق سؤال $3x$ و $7x$ و $8x$ می باشند:

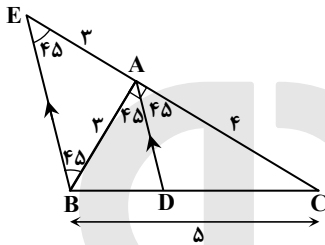
$$\begin{cases} 60^\circ \\ 140^\circ \\ 160^\circ \end{cases} \text{ زوایای خارجی} \Rightarrow 3x + 7x + 8x = 360^\circ = 18x \Rightarrow x = 20^\circ$$

هر زاویه ی داخلی مکمل یک زاویه ی خارجی است، بنابراین بزرگ ترین زاویه ی داخلی، مکمل کوچک ترین زاویه ی خارجی است:

$$\hat{\alpha} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

از نقطه ی B خطی موازی نیم سازه AD رسم می کنیم تا امتداد AC را در E قطع کند. بر طبق خطوط موازی و مورب:



$$\begin{cases} \hat{EBA} = \hat{DAB} = 45^\circ \\ \hat{AEB} = \hat{CAD} = 45^\circ \end{cases}$$

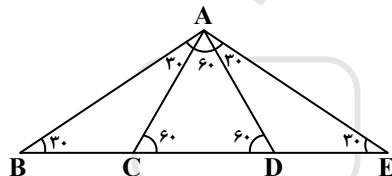
مثلث AEB قائم الزاویه ی متساوی الساقین است:

$$EA = EB = 30^\circ, EB = 3\sqrt{2}$$

بر طبق نتیجه ی تالس در مثلث BEC:

$$\frac{AD}{EB} = \frac{AC}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ است.

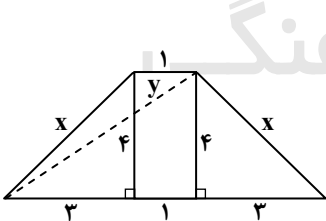


چون مثلث ACD متساوی الاضلاع است، پس زوایا 60° اند و

چون زاویه های C و D زاویه خارجی می باشند پس:

$$\hat{BAE} = 30 + 60 + 30 = 120$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.



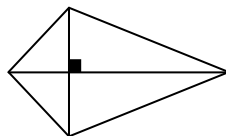
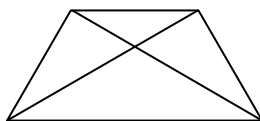
$$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{محیط} = 2x + 1 + 7 = 18$$

$$\text{اندازه ی قطر} = y = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

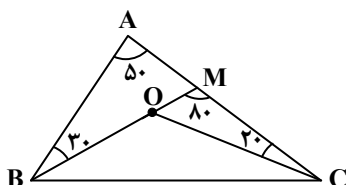
$$\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \frac{18}{4\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ است.



دو زنقه ی متساوی الساقین و بعضی کایت ها نیز همین ویژگی را دارند.

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.



$$M = \hat{A} + 30^\circ = 80^\circ \text{ زاویه خارجی:}$$

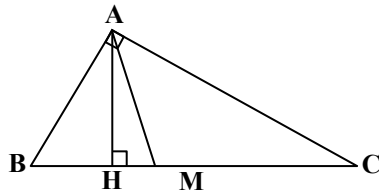
$$O = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ \text{ زاویه خارجی:}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر زوایای مثلث را x ، y و z بنامیم، خواهیم داشت: $\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9}$

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 7k \rightarrow 2k + 7k + 9k = 180 \rightarrow k = 10 \\ z = 9k \end{cases}$$

پس زوایای مثلث ۲۰، ۷۰، ۹۰ اند، لذا مثلث قائم‌الزاویه است.



$$\begin{cases} \hat{HAC} + \hat{HAB} = 90^\circ \\ \hat{HAB} + \hat{B} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{HAC} = \hat{B} \\ \hat{HAB} = \hat{C} \end{cases}$$

چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است. پس: $AM = MB = MC$ لذا:

$$AM = MC \rightarrow \hat{MAC} = \hat{C} \Rightarrow \hat{HAM} = \hat{HAC} - \hat{MAC} = \hat{B} - \hat{C} = 70 - 20 = 50$$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = 90^\circ$)، زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر عبارت است از: $|\hat{B} - \hat{C}|$

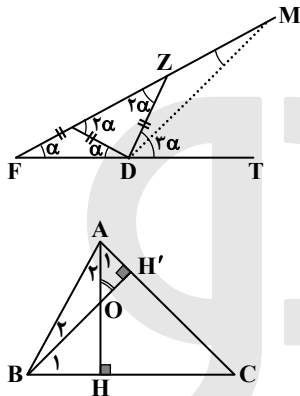
۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

طبق تمرین کتاب درسی می‌دانیم: $\hat{ZDT} = 2\hat{ZFD}$ ، یعنی $\hat{ZDT} = 45^\circ$.

و چون \hat{MDT} زاویه‌ی خارجی مثلث FDM است داریم:

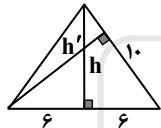
$$\begin{aligned} 22/5^\circ &= \hat{F} + \hat{M} \\ 22/5^\circ &= 15^\circ + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = 7/5^\circ \end{aligned}$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\begin{aligned} \hat{A}_2 + \hat{B} &= 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 = 20^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ \\ \hat{O} &= 90 - \hat{A}_1 = 60^\circ \end{aligned}$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\begin{aligned} h &= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \\ h' \times 10 &= h \times 12 \Rightarrow h' = \frac{12 \times 8}{10} = 9/5 \end{aligned}$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

به ترتیب از چپ به راست:

شماره‌ی (۱) هست.

شماره‌ی (۲) خم نیست، چون بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ نمی‌توان آن را رسم کرد.

شماره‌ی (۳) ساده نیست، چون غیر از نقاط ابتدایی و انتهایی یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شماره‌ی (۴) ساده نیست. شماره‌ی (۵) ساده نیست. شماره‌ی (۶) ساده نیست. شماره‌ی (۷) هست.

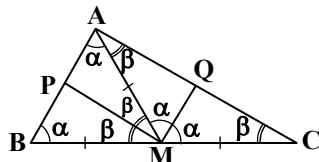
۲۶- گزینه ۳ پاسخ است.

چون میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس مثلث‌های ABM و ACM

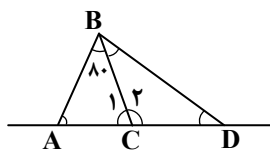
متساوی‌الساقین‌اند. لذا $\hat{AMC} = 2\alpha$ ، پس $\hat{BAM} = \hat{AMQ} = \alpha$ ، لذا $MQ \parallel AB$. به‌دلیل

مشابه $MP \parallel AC$ و چون $AB \perp AC$ است، پس $AQMP$ مستطیل است.

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.



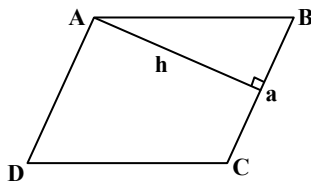
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{C}_1 \\ \hat{A} + \hat{C}_1 = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \end{cases} \Rightarrow 2\hat{C}_1 = 100^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 50^\circ$$



$$\hat{C}_1 = \hat{CBD} + \hat{D} \Rightarrow \hat{C}_1 = 50^\circ \Rightarrow \hat{CBD} = 25^\circ$$

$\hat{CBD} = \hat{D} \Rightarrow$ دو ضلع CB و CD برابرند پس مثلث CBD متساوی‌الساقین است

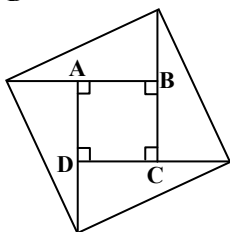
۱- در لوزی ABCD با اندازه های اقطار ۳ و ۴، مطابق شکل حاصل $a.h$ برابر است با:



۱۲ (۱) ۶ (۲)

۲۴ (۳) ۸ (۴)

۲- مربع ABCD مفروض است، مطابق شکل هر ضلع مربع را در جهت معین به اندازه ی K برابر ضلع امتداد



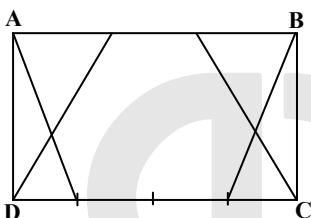
داده ایم، مساحت شکل حاصل چند برابر مساحت مربع ABCD است؟

$K^2 + 1$ (۱) $2K^2 + 1$ (۲)

$2K^2 + 2K + 1$ (۳) $K^2 + K + 1$ (۴)

۳- چهارضلعی ABCD دو قطر عمود بر هم با اندازه های ۴ و ۶ دارد، مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۸ (۱) ۱۶ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

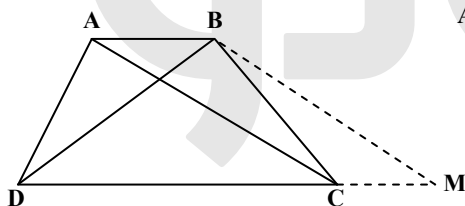


۴- در مستطیل شکل زیر، یک ضلع به سه قسمت مساوی و ضلع روبه رویش به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. مساحت بزرگ ترین دوزنقه شکل چند برابر مساحت کوچک ترین دوزنقه است؟

$\frac{4}{3}$ (۱) $\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{21}{16}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴)

۵- در دوزنقه ی ABCD به مساحت ۱۰ واحد مربع از نقطه ی B خطی موازی قطر AC



رسم نموده ایم تا امتداد DC را در M قطع کند. مساحت مثلث BDM کدام است؟

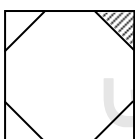
۱۰ (۱) ۱۵ (۲)

۲۰ (۳) $7/5$ (۴)

۶- مساحت یک دوزنقه ی متساوی الساقین با اندازه ی دو قاعده ی ۹ و ۲۱ و طول قطر ۱۷ کدام می باشد؟

۸۱ (۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

۷- در شکل زیر یک هشت ضلعی منتظم در یک مربع محاط شده است، اگر مساحت قسمت هاشورزده $3 - 2\sqrt{2}$ باشد، ضلع مربع کدام است؟



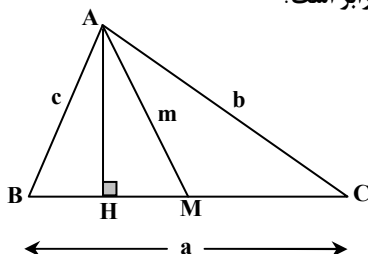
۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۸- در شکل زیر ارتفاع و میانه ی رأس A از مثلث ABC رسم شده است. حاصل $b^2 + c^2$ با کدام برابر است؟



$m^2 + a^2$ (۱)

$2m^2 + \frac{a^2}{2}$ (۲)

$4m^2 + \frac{a^2}{4}$ (۳)

$2m^2 + a^2$ (۴)

۹- اگر دو ضلع زاویه ی قائمه از مثلث قائم الزاویه ای $x + \sqrt{2xy}$ و $y + \sqrt{2xy}$ باشند، ضلع سوم برابر است با:

$x - y + \sqrt{2xy}$ (۱) $2x + y + \sqrt{xy}$ (۲) $x + y + \sqrt{2xy}$ (۳) $x + 2y + \sqrt{xy}$ (۴)

۱۰- مساحت یک مربع با مساحت یک مستطیل برابر است. اگر محیط مربع ۳۶ و محیط مستطیل ۶۰ باشد، تفاضل طول و عرض مستطیل کدام است؟

۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴)

۱۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وتر a ، واسطه‌ی هندسی بین اندازه‌های اضلاع زاویه قائمه $\frac{a}{\sqrt{2}}$ است. یکی از زوایای این مثلث برابر است با:

۲۰° (۴)

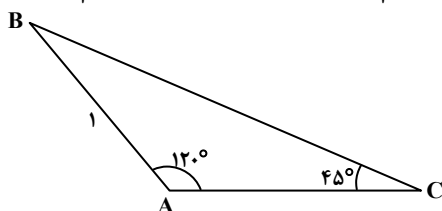
۷۵° (۳)

۴۵° (۲)

۳۰° (۱)

۱۲- مثلث قائم‌الزاویه‌ای به رأس A مفروض است. اگر a و b و c اندازه‌های اضلاع این مثلث باشند، کدام رابطه نشان‌دهنده‌ی مساحت این مثلث است؟

(۱) $\frac{1}{4}(a+b+c)(a+c-b)$ (۲) $\frac{1}{4}(a+c-b)(b+a-c)$ (۳) $\frac{1}{4}(b+c-a)(a+b+c)$ (۴) $\frac{1}{4}(a+c-b)(a+b+c)$



۱۳- در شکل زیر اندازه‌ی ضلع BC کدام است؟

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۲)

$\sqrt{6}$ (۱)

$\frac{\sqrt{6}}{4}$ (۴)

$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۳)

۱۴- اگر S_1 مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقینی به وتر a و S_2 مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\frac{a}{\sqrt{3}}$ باشد، نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ برابر است با:

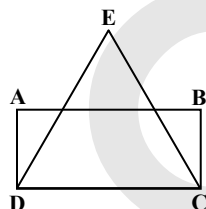
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۱۵- در شکل زیر $ABCD$ یک مستطیل و مثلث ECD متساوی‌الاضلاع است. اگر AB از وسط اضلاع مثلث گذشته باشد، نسبت مساحت مثلث ECD به مساحت مستطیل کدام است؟



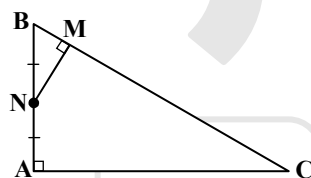
$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۱ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱۶- در شکل زیر N وسط AB و MN عمود بر BC است، اگر a و b و c اضلاع مثلث باشند، $MC^2 - MB^2$ برابر است با:



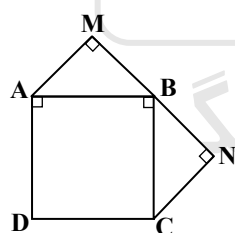
c^2 (۱)

b^2 (۲)

bc (۳)

$\frac{bc}{a}$ (۴)

۱۷- اگر دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین روی دو ضلع مجاور مربع $ABCD$ به ضلع یک واحد بنا کنیم، مساحت مثلث AMN چند واحد مربع است؟



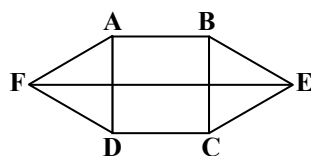
$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۲ (۴)

۱ (۳)

۱۸- در شکل زیر $ABCD$ مربع و دو مثلث AFD و BEC متساوی‌الاضلاع می‌باشند، مساحت دوزنقه‌ی $ABEF$ چند برابر مساحت مربع است؟



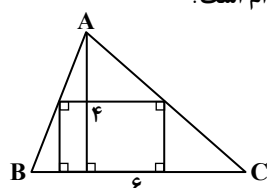
$\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ (۴)

$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ (۳)

۱۹- یک مستطیل با محیط ۱۰ در مثلثی با ضلع $a=6$ و ارتفاع $h_a=4$ محاط است، مساحت این مستطیل کدام است؟



۶ (۱)

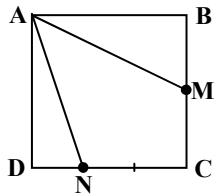
۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

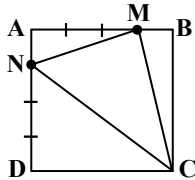
۲۰- نقاط M و N روی اضلاع مربع $ABCD$ به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که: $BM = MC$ و $NC = 2DN$ مساحت چهارضلعی $AMCN$ چه کسری

از مساحت کل مربع است؟



- (۱) $\frac{1}{3}$
(۲) $\frac{5}{12}$
(۳) $\frac{7}{12}$
(۴) $\frac{3}{4}$

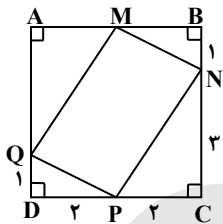
۲۱- اگر اضلاع مربع $ABCD$ را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنیم، مساحت مربع چند برابر مساحت مثلث CMN است؟



- (۱) $\frac{64}{19}$
(۲) $\frac{32}{19}$
(۳) $\frac{64}{13}$
(۴) $\frac{32}{13}$

۲۲- در شکل زیر مربع $ABCD$ مربع و نقاط N و P و Q روی محیط آن ثابت‌اند. اگر M روی محیط مربع

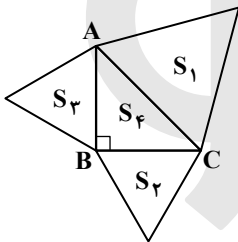
حرکت کند، ماکزیمم مساحت چهارضلعی $MNPQ$ کدام است؟



- (۱) ۸
(۲) ۹
(۳) ۱۰
(۴) ۱۲

۲۳- در شکل زیر مثلث ABC قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین و مثلث‌های دیگر متساوی‌الاضلاع هستند. بین مساحت شکل‌ها کدام رابطه

صحیح نیست؟



- (۱) $2S_2 = 2S_3 = S_1$
(۲) $S_1 = S_2 + S_3$
(۳) $S_1 = \sqrt{3} S_4$
(۴) $S_1^2 = S_2 S_3$



مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ‌های تشریحی فصل ۲

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 \text{ مساحت لوزی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر:}$$

از طرفی مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب هر ضلع در ارتفاع نظیرش پس مساحت این لوزی برابر است با: $S = a.h$ بنابراین: $a.h = 6$

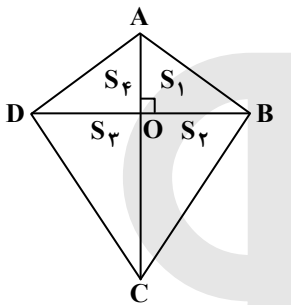
۲- گزینه ۳ پاسخ است.

تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه شکل به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها هستند و مساحت هر مثلث برابر است با:

$$S_1 = \frac{1}{2} Ka(Ka + a) = \frac{1}{2} a^2 K(K+1)$$

$$S_{\text{کل}} = 4 \times \frac{1}{2} a^2 K(K+1) + a^2 = a^2 (2K^2 + 2K + 1)$$

۳- گزینه ۳ پاسخ است.



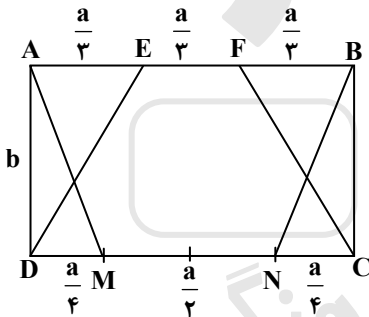
$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$= \frac{1}{2} (OA.OB + OB.OC + OC.OD + OD.OA)$$

$$= \frac{1}{2} (OA + OC).(OB + OD) = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

طول مستطیل را برابر a و عرض آن را برابر b فرض می‌کنیم:



$$S_{EFCD} = \frac{(EF + DC)}{2} \times b = \frac{\frac{a}{3} + a}{2} \times b = \frac{4a}{3} \times b = \frac{4}{3} ab$$

$$S_{ABND} = \frac{(ND + AB)}{2} \times b = \frac{\frac{a}{3} + a}{2} \times b = \frac{4a}{3} \times b = \frac{4}{3} ab$$

$$S_{ABND} = \frac{21}{16} S_{EFCD}$$

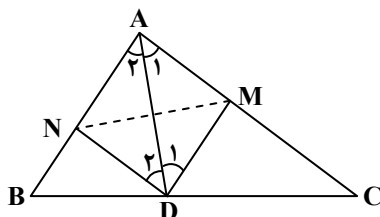
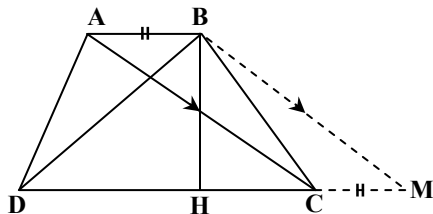
۵- گزینه ۱ پاسخ است.

چهارضلعی ABMC متوازی‌الاضلاع است پس: $AB = CM$

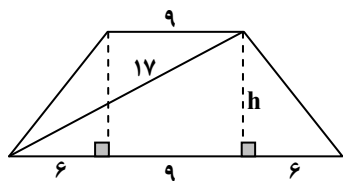
$$\begin{cases} S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} BH.DM = \frac{1}{2} BH.(DC + CM) = \frac{1}{2} BH.(DC + AB) \\ S_{ABCD} = \frac{1}{2} (DC + AB).BH \end{cases}$$

با مقایسه دو رابطه مشخص است که مساحت مثلث BDM با مساحت دوزنقه

$$S_{\triangle BDM} = 10 \text{ برابر است، پس:}$$



۶- گزینه ۳ پاسخ است.

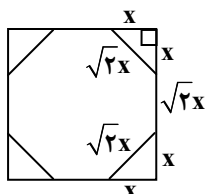


$$h = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$S = \frac{(9+21)}{2} \times h = 4 \times 30 = 120$$

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

چهار مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین اطراف این هشت ضلعی منتظم قرار دارند، اندازه ی هر ضلع این مثلث را x فرض می کنیم:

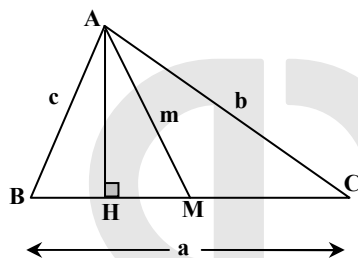


$$S = \frac{1}{2} x^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 6 - 4\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \quad (x > 0)$$

$$\text{ضلع مربع} = 2x + \sqrt{2}x = (2 + \sqrt{2})x = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2 = 2$$

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

رابطه ی فیثاغورث را در دو مثلث AHB و AHC می نویسیم:



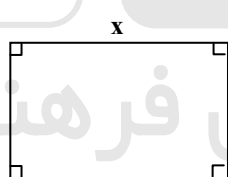
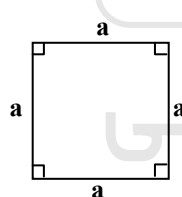
$$\begin{cases} \triangle AHC : b^2 = AH^2 + HC^2 = AH^2 + (MH + MC)^2 = AH^2 + (MH + \frac{a}{2})^2 \\ \triangle AHB : c^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + (MB - MH)^2 = AH^2 + (\frac{a}{2} - MH)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$b^2 + c^2 = 2AH^2 + 2MH^2 + \frac{a^2}{2} = 2(AH^2 + MH^2) + \frac{a^2}{2} = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{aligned} \text{ضلع سوم} &= \sqrt{(x + \sqrt{2xy})^2 + (y + \sqrt{2xy})^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + 2x\sqrt{2xy} + y^2 + 2xy + 2y\sqrt{2xy}} \\ &= \sqrt{(x + y + \sqrt{2xy})^2} = x + y + \sqrt{2xy} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.



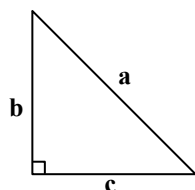
$$a^2 = xy$$

$$4a = 36 \Rightarrow a = 9$$

$$2(x + y) = 60 \Rightarrow x + y = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 81 \end{cases} \Rightarrow x(30 - x) = 81 = 27 \times 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x - y = 24$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.



$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = bc \Rightarrow \frac{a^2}{2} = bc \Rightarrow a^2 = 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 2bc \Rightarrow (b - c)^2 = 0 \Rightarrow b = c$$

پس مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است و $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

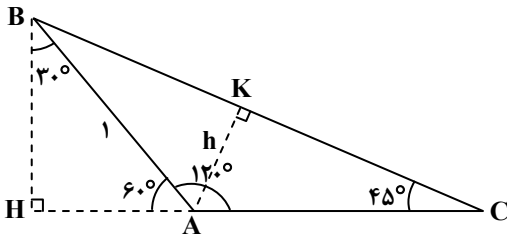
$$\frac{1}{4}(b + c - a)(a + b + c) = \frac{1}{4}[(b + c)^2 - a^2] = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc - a^2)$$

$$\frac{1}{4}(2bc) = \frac{1}{4}bc = S \text{ مساحت}$$

چون مثلث در رأس A قائمه است، پس $b^2 + c^2 = a^2$ و لذا حاصل عبارت برابر است با:

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

از B عمود BH را بر امتداد ضلع AC و از A عمود AK را بر ضلع BC رسم می‌کنیم:



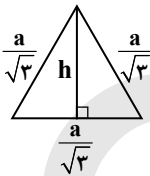
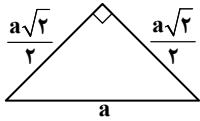
$$\Delta ABH : \hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta AKC : \hat{C} = 45^\circ, \hat{K} = 90^\circ \Rightarrow AK = h, AC = \sqrt{2}h$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BH \times AC = \frac{1}{2} AK \times BC$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}h = h \times BC \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.



$$S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$$

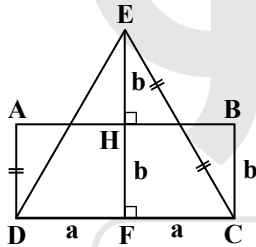
$$h = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{3}} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ است.

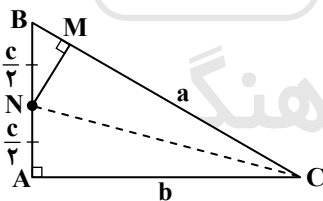
بر طبق قضیه‌ی تالس در مثلث DEC:



$$\frac{HE}{EF} = \frac{1}{2} \Rightarrow EH = HF = b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مثلث} S = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab \\ \text{مستطیل} S = AD \times DC = 2ab \end{array} \right. \Rightarrow \frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{مستطیل}}} = 1$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.



$$MC^2 = NC^2 - MN^2$$

$$NC^2 = b^2 + \frac{c^2}{4}$$

$$MC^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - MN^2 \quad (I)$$

$$MB^2 = \frac{c^2}{4} - MN^2 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow MC^2 - MB^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = b^2$$

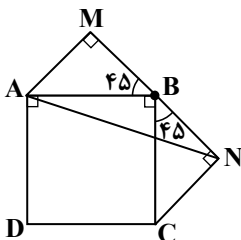
۱۷- گزینه ۱ پاسخ است.

چون زاویه‌ی MBN ۱۸۰° است، پس M و B و N در یک راستا هستند لذا چون مثلث

AMB قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

$$AM = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

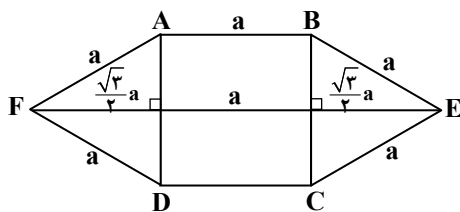
$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \times AM \times MN = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$



۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{cases} AB = a \\ EF = (\sqrt{3} + 1)a \end{cases} \text{ قاعده ها:}$$

$$\frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \text{ ارتفاع:}$$



$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2} [a + (\sqrt{3} + 1)a] \times \frac{a}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} a^2$$

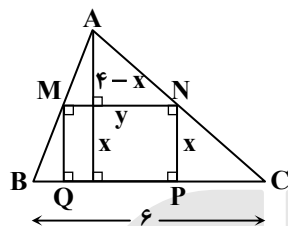
بنابراین مساحت دوزنقه $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$ برابر مساحت مربع است. یا می توان گفت مساحت دوزنقه برابر نصف مساحت مربع به علاوه یک مثلث

متساوی الاضلاع به ضلع a است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

دو مثلث AMN و ABC متشابه اند و نسبت تشابه آنها با نسبت ارتفاع های متناظر،

برابر است:

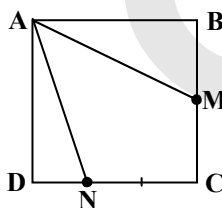


$$\frac{4-x}{4} = \frac{y}{6} \Rightarrow 2y = 3(4-x) \Rightarrow 3x + 2y = 12$$

از طرفی محیط مستطیل برابر ۱۰ است: $2(x+y) = 10$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow xy = 6$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

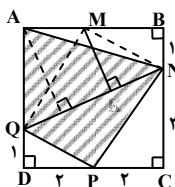


$$\left. \begin{aligned} S_{ABM} &= \frac{1}{2} a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \\ S_{ADN} &= \frac{1}{2} a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{AMCN} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{12-3-3-2}{12} a^2 = \frac{4}{12} a^2 = \frac{1}{3} a^2$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\left. \begin{aligned} S_{NDC} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} x \times x = \frac{3}{8} x^2 \\ S_{MBC} &= \frac{1}{2} \times \frac{x}{4} \times x = \frac{x^2}{8} \\ S_{ANM} &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} x \times \frac{x}{4} = \frac{3x^2}{32} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{CMN} = x^2 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} \right) x^2 = \frac{13}{32} x^2 \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{CMN}} = \frac{x^2}{\frac{13}{32} x^2} = \frac{32}{13}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

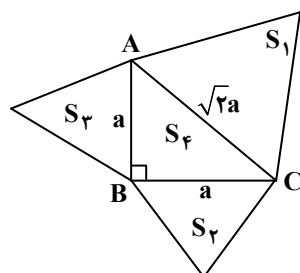


مثلث NPQ ثابت است، برای ماکزیمم شدن مساحت مثلث MQN باید ارتفاع MK ماکزیمم شود که برای

این منظور باید M روی رأس A قرار گیرد:

$$S = ANPQ = S_{\text{مربع}} - S_{\triangle ABN} - S_{\triangle PNC} - S_{\triangle PQD} = 4 \times 4 - \frac{1 \times 4}{2} - \frac{3 \times 2}{2} - \frac{2 \times 1}{2} = 10$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\begin{cases} S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \\ S_2 = S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\ S_f = \frac{1}{2} a^2 \end{cases}$$

بنابراین مشخص است که روابط گزینه های ۱ و ۲ و ۳ صحیح می باشد، ولی رابطه ی گزینه ی ۴ صحیح نیست.