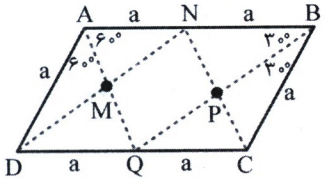
۱ـ ۱ ■ ۳ ۴

با توجه به این‌که ضلع بزرگ متوازی‌الاضلاع دو برابر ضلع کوچک آن است پس دو رأس از مستطیل، روی ضلع‌های بزرگ از متوازی‌الاضلاع قرار دارد. به زاویه‌های 30° و 60° توجه کنید.



$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AN = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

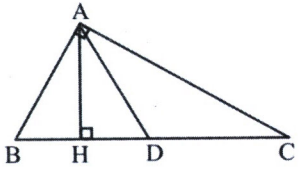
$$NP = \frac{1}{2}BN = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

۲ـ ■ ۲ ۳ ۴

طول پاره‌خط‌های BH و BD را به دست می‌آوریم. سپس به کمک آن‌ها می‌توانیم طول DH را محاسبه کنیم.

ابتدا با رابطه‌ی فیثاغورس ضلع BC را حساب می‌کنیم.



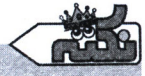
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$$

قضیه‌ی نیمساز $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{5 - BD} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$

به کمک روابطی که برای ارتفاع وارد بر وتر داریم می‌توانیم طول BH را به دست آوریم.

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



اگر AH ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC باشد داریم

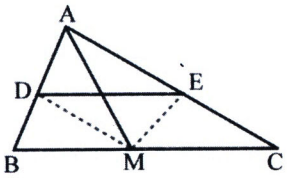
$$AH^2 = BH.HC$$

$$AH.BC = AB.AC$$

$$AB^2 = BH.BC \, , \, AC^2 = CH.BC$$

۳ـ ۱ ۲ ۳ ۴

در این شکل با توجه به قضیه‌ی نیمساز داریم



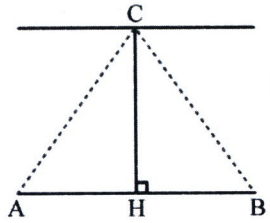
$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{DB}=\frac{AM}{MB}\\ \frac{AE}{EC}=\frac{AM}{MC}\end{array}\right\} \quad \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

پس دو خط DE و BC موازیند.

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۴ـ ۱ ۲ ۴

مساحت مثلث را به صورت $S_{ABC}=\frac{AB.CH}{2}$ می‌نویسیم پس داریم: $۴۸=\frac{۱۶\times CH}{2} \Rightarrow CH=۶$



با معلوم بودن CH مکان هندسی رأس C دو خط موازی با AB و به فاصله‌ی ۶ واحد از آن است.

کمترین محیط برای مثلث ABC زمانی است که BC=AC در مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع وارد بر ضلع AB میانه نیز می‌باشد یعنی

$$AH=HB=۸\ ,\ CH=۶ \Rightarrow BC=AC=۱۰$$

$$\text{حداقل مقدار محیط}=AB+AC+BC=۱۶+۱۰+۱۰=۳۶$$

۵ـ ۱ ۳ ۴

$$\text{ضلع مربع نیمساز داخلی}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)=\frac{\sqrt{2}}{2}(۱۵-۸)=\frac{۷\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{مساحت مربع}=(\frac{۷\sqrt{2}}{2})^{2}=\frac{۴۹}{2}=۲۴/۵$$

۶ـ ۲ ۳ ۴

با قضیه‌ی لولا در مثلث‌های ABC و ADC نابرابری $A_2>A_1$ به دست می‌آید.

در مثلث BDC با توجه به $BC>CD$ نابرابری $\hat{D}_1>\hat{B}_1$ به دست می‌آید و می‌توانیم زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین ABD را به این نابرابری اضافه کنیم تا به نابرابری $\hat{D}>\hat{B}$ برسیم یعنی گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ در چهارضلعی داده شده به دست می‌آید ولی گزینه‌ی یک لزوماً درست نیست.

۷ـ ۲ ۳ ۴

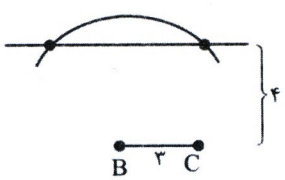
می‌دانیم مجموع فاصله‌های یک نقطه تا رأس مثلث از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط مثلث بیشتر است پس

$$۸ > \text{مجموع فاصه‌های نقطه‌ی M تا سه رأس} > ۴$$

و فقط گزینه‌ی یک در این بازه قرار می‌گیرد.

۸ـ ۲ ۳ ۴

ارتفاع حتماً باید از ضلع جانبی کوچک‌تر باشد پس ارتفاع باید وارد بر ضلع ۳ باشد و با دو ضلع و یک ارتفاع ۲ مثلث رسم می‌شود. برای این کار ابتدا ضلع را رسم می‌کنیم. خطی موازی با آن، به فاصله‌ی ۴ رسم می‌کنیم و کمانی به رأس B و شعاع ۵ واحد رسم می‌کنیم تا خط موازی را در ۲ نقطه قطع کند. پس دو جواب به دست می‌آید.

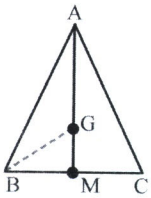


۹- ۱ ۲ ۳ ۴

ارتفاع h نمی‌تواند از اضلاع مجاورش بزرگ‌تر باشد.

۱۰- ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به ارتفاع در مثلث متساوی‌الساقین که میانه و نیمساز نیز می‌باشد داریم



$$BM = MC = ۵ \Rightarrow AM = \sqrt{AB^۲ - BM^۲} = ۱۲$$

نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌ها است و $AG = \frac{۲}{۳}AM = ۸$

طول BG را نیز با فیثاغورس به دست می آوریم.

$$BG = \sqrt{BM^۲ + GM^۲} = \sqrt{۲۵ + ۱۶} = \sqrt{۴۱}$$

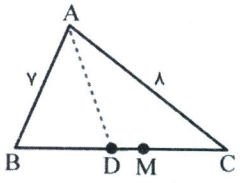
با توجه به $AG > BG$ فاصله تا دورترین رأس برابر ۸ است.

۱۱- ۱ ۳ ۴

این سؤال تمرین ۱۱ است.

۱۲- ۱ ۳ ۴

طبق قضیه‌ی نیمساز داریم:



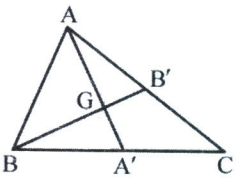
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{۱۲ - BD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow BD = \frac{۲۸}{۵} = ۵/۶$$

اگر M وسط ضلع بزرگ‌تر باشد داریم:

$$DM = BM - DM = ۶ - ۵/۶ = ۰/۴$$

۱۳- ۱ ۲ ۴

اگر G محل برخورد میانه‌ها باشد آنگاه



$$BG = \frac{۲}{۳}BB' = \frac{۲}{۳}m_b = ۸$$

$$GA' = \frac{۱}{۳}AA' = \frac{۱}{۳}m_a = ۳$$

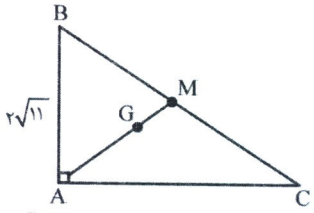
پاره‌خط BA' ضلع سوم از این مثلث است بنابراین

$$۸ - ۳ < BA' < ۸ + ۳$$

$$۵ < \frac{a}{۲} < ۱۱ \Rightarrow ۱۰ < a < ۲۲$$

۱۴- ۱ ۳ ۴

اگر G محل برخورد میانه‌ها باشد روی میانه‌ی AM نسبت ۱ به ۲ ایجاد می‌کند. ضلع BC را محاسبه می‌کنیم تا میانه که نصف آن است به دست آید

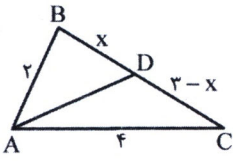


$$BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = ۶\sqrt{۳}$$

$$GM = \frac{۱}{۳}AM = \frac{۱}{۳}(\frac{BC}{۲}) = \sqrt{۳}$$

۱۵- ۱ ۲ ■ ۴

چون مثلث‌های درون شکل ارتفاع مشترک دارند پس کافی است نسبت قاعده‌ها را به دست آوریم که برای این کار از قضیه‌ی نیمساز استفاده می‌کنیم.



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{x}{۳-x}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow x=۱$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{BD}{BC}=\frac{۱}{۳}$$

۱۶- ■ ۲ ۳ ۴

باز یادآوری می‌کنیم که چون طول مستطیل دو برابر عرض آن است پس دو رأس از مربع MNPQ روی اضلاع AB و CD قرار می‌گیرند. با توجه به زاویه‌های ۴۵° داریم

$$MN=\frac{\sqrt{۲}}{۲}AN=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{محیط مربع}=۴MN=۲\sqrt{۲}a$$

$$\text{محیط مستطیل}=۶a$$

$$\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{محیط مربع}}=\frac{۶a}{۲\sqrt{۲}a}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۷- ۱ ۲ ■ ۴

چون $\hat{C}=\hat{A}+۲\hat{B}$ پس $\hat{C}>\hat{A}+\hat{B}$ یعنی زاویه‌ی C منفرجه است و محل برخورد ارتفاع‌ها خارج از مثلث قرار می‌گیرد.

۱۸- ۱ ۲ ■ ۴

چهارضلعی حاصل از رسم نیمسازهای داخلی مربع است.

$$\text{ضلع مربع ABCD}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۴-۱)=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

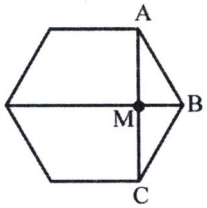
$$\text{مساحت مربع ABCD}=(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^{۲}=\frac{۹}{۲}$$

$$\text{مساحت لوزی حاصل از وسط‌های اضلاع}=\text{مساحت مستطیل}=\frac{۴\times۱}{۲}=۲$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{MNPQ}}=\frac{\text{محیط مستطیل}}{\text{محیط مربع}}=\frac{\frac{۹}{۲}}{۲}=\frac{۹}{۴}$$

۱۹- ۱ ■ ۳ ۴

دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\sqrt{۵}$ رسم می‌کنیم. (البته در شکل رسم نکردیم)



$$MA=\frac{AC}{۲}=\frac{AB\sqrt{\ }}{۲}=۲\sqrt{۳}$$

$$MB=\sqrt{AB^{۲}-AM^{۲}}=\sqrt{۳}$$

۲۰- ۱ ■ ۳ ۴

میانه‌ی وارد بر یک ضلع باید از نصف مجموع دو ضلع مقابل کوچک‌تر و از نصف تفاضل آن‌ها بیشتر است.

$$\frac{۱۸-۴}{۲} < m_a < \frac{۱۸+۴}{۲}$$

$$\Rightarrow ۷ < m_a < ۱۱$$

۲۱- ۱ ■ ۳ ۴

$$\frac{۱۲-۴}{۲} < m_a < \frac{۴+۱۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴ < m_a < ۸$$

۲۲- ۱ ۲ ۳ ■

سه بار نامساوی مثلثی به کار می‌بریم

$$(۴x-۴)+(x+۷) > ۶x \Rightarrow ۳ > x$$

$$(۴x-۴)+۶x > x+۷ \Rightarrow x > \frac{۱۱}{۹}$$

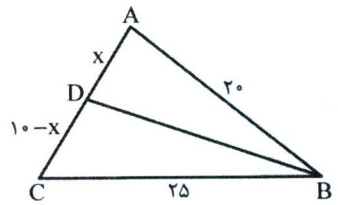
$$(x+۷)+۶x > ۴x-۴ \Rightarrow x > -\frac{۱۱}{۳}$$

۲۳- ۱ ۲ ۳ ■

محل همرسی نیمسازهای داخلی از سه ضلع به یک فاصله است. هم‌چنین محل برخورد هر دو نیمساز خارجی نیز از امتداد اضلاع به یک فاصله است. در نهایت ۴ نقطه بدست می‌آید.

۲۴- ۱ ■ ۳ ۴

اضلاع مثلث برابر ۱۰ و ۲۰ و ۲۵ است.



$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{x}{۱۰-x} = \frac{۲۰}{۲۵} \Rightarrow x = \frac{۴۰}{۹} = ۴\frac{۴}{۹}$$