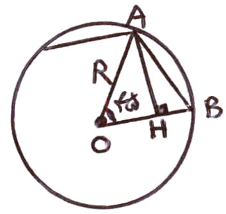
پاسخ تمرین شماره ۵

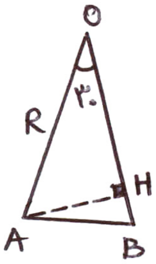
①



$AH = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $BH = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2}$

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = \frac{2R^2}{4} + \frac{(6-4\sqrt{2})R^2}{4} = (2-\sqrt{2})R^2 \Longrightarrow AB = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,R$

② اگر O مرکز دایره محیطی و AB یک ضلع دوازده ضلعی منتظم باشد:



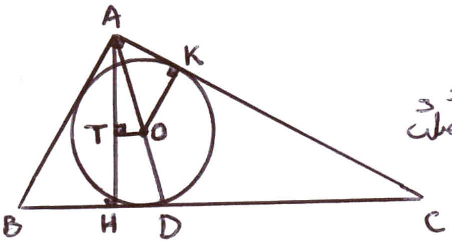
$AH = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2} \Longrightarrow OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$BH = R - \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$AB^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{R^2(7-4\sqrt{3})}{4} = R^2(2-\sqrt{3})$

$\Longrightarrow AB = \sqrt{2-\sqrt{3}}\;R$

③



AD نیمساز $\hat{A}$
O مرکز دایره محاطی مثلث
$\Big\} \Longrightarrow R = AK = OK \Longrightarrow OA = R\sqrt{2}$

$TH = R \Longrightarrow AT = h - R$

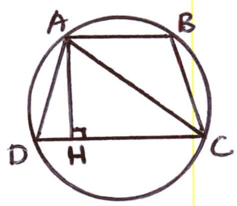
چون $AO \geq AT \longrightarrow R\sqrt{2} \geq h - R \Longrightarrow \frac{R}{h} \geq \sqrt{2} - 1$

حالت تساوی زمانی رخ می دهد که $AB = AC$

از طرفی
$\frac{OA}{OD} = \frac{b+c}{a}$
$b + c > a$
$\frac{OA}{OD} = \frac{AT}{TH}$
$\Bigg\} \Longrightarrow \frac{h-R}{R} > 1 \longrightarrow \frac{R}{h} < \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \sqrt{2} - 1 \leq \frac{R}{h} < ۰/۵$

④



$AD = BC \Longrightarrow DH = \frac{21-9}{2} = 6$

$\overset{\Delta}{AHC}: AC^2 = AH^2 + HC^2 = 64 + 225$

$\Longrightarrow AC = 17$

$\overset{\Delta}{ADH}: AD^2 = AH^2 + DH^2 = 64 + 36$

$\Longrightarrow AD = 10$

$R = \frac{AD \times AC}{2AH} = \frac{10 \times 17}{2 \times 8}$

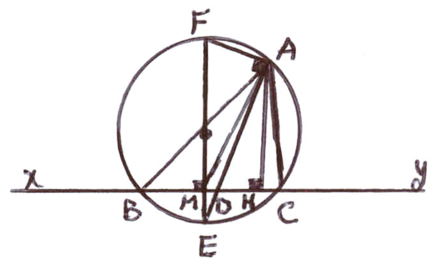
⑤ حل در جزوه

⑥ مسئله را حل شده فرض می کنیم و فرض می کنیم از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ ارتفاع $AH = h_a$ و نیمساز $AD = d$ و میانه $AM = m$ معلوم باشد. اگر دایره محیطی مثلث را رسم کنیم، امتداد نیمساز AD و عمودی که در M بر BC رسم می شود از نقطه E وسط کمان BC که شامل A نیست می گذرد. امتداد OE دایره را در نقطه دیگری مانند F قطع می کند، بنابراین زاویه FAE قائمه است.

ادامه سؤال ۶

بنابراین برای رسم مثلث روی خط xy نقطه H را اختیار می‌کنیم و عمودی بر xy رسم می‌کنیم و به اندازه AH=h روی آن جدا می‌کنیم. سپس در یک طرف AH دو نقطه‌ی D و M را چنان روی xy در نظر می‌گیریم که AD=d و AM=m باشند. سپس از M عمودی بر xy رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در E قطع کند. از A عمودی بر AE رسم می‌کنیم تا خط ME را در F قطع کند. EF قطر دایره‌ی محیطی است. به قطر EF دایره‌ای رسم می‌کنیم تا xy را در B و C قطع کند. مثلث $A\hat{B}C$ جواب است.

شرط جواب: $h<d<m$

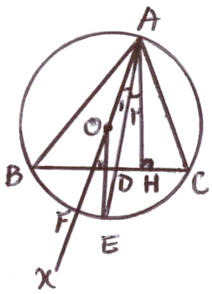


⑦

مسئله را حل شده فرض می‌کنیم و فرض می‌کنیم از مثلث $A\hat{B}C$ شعاع دایره‌ی محیطی R و AH=h و AD=d معلوم باشد. AD را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی را در E قطع کند. E وسط کمان BC است و OE عمود بر BC است.

$\hat{E}=\hat{A}_1 , \hat{A}_2=\hat{E} \longrightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$

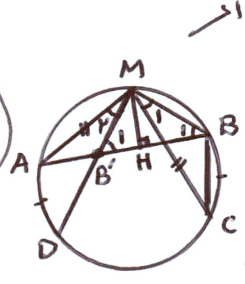
ابتدا مثلث قائم‌الزاویه $A\hat{D}H$ را با معلوم بودن وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم. از A نیم‌خط AX را چنان رسم می‌کنیم که $X\hat{A}D=D\hat{A}H$. سپس نقطه F را روی نیم‌خط AX در نظر می‌گیریم به طوری که AF=2R. دایره‌ای به قطر AF رسم می‌کنیم تا خط DH را در B و C قطع کند. مثلث $A\hat{B}C$ جواب است.



پاسخ تمرین شماره ۴

① این سؤال به قضیه‌ی وتر شکسته معروف است.

قرینه B نسبت به H را B' می‌نامیم. با توجه به شکل اگر ثابت کنیم AB'=BC است، حکم ثابت است.



$\hat{B}_1=\hat{B'}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{AM}}{2}=\frac{\widehat{MB}+\widehat{AD}}{2}$

M وسط $\widehat{ABC}$ $\Rightarrow \widehat{AM}=\widehat{MC}$

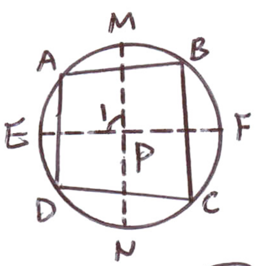
$\Rightarrow \widehat{MC}=\widehat{MB}+\widehat{AD}$

$\Rightarrow \widehat{MB}+\widehat{BC}=\widehat{MB}+\widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{AD} \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{M}_2$ (۱)

$\widehat{MA}=\widehat{MC} \Rightarrow MA=MC$ (۲)

از (۱) و (۲) و $MB=MB'$ $\Rightarrow M\hat{B}C \cong M\hat{B'}A \Rightarrow AB'=BC$

②



$\hat{P}_1=\frac{\widehat{ME}+\widehat{FN}}{2}$

$\Rightarrow \hat{P}_1=\frac{\left(\frac{\widehat{AB}}{2}+\frac{\widehat{AD}}{2}\right)+\left(\frac{\widehat{BC}}{2}+\frac{\widehat{CD}}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{360}{2}}{2}=90^\circ$

۴

$\left.\begin{array}{l} OD = AB \\ OD = OB \end{array}\right\} \Rightarrow OB = AB$ متساوی الساقین $O\hat{A}B$

پس $\hat{A} = B\hat{O}C = \alpha$

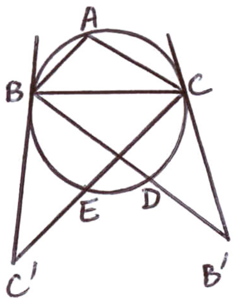
$\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{45 - \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \hat{A} = 15^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{EB} = 180 - \overset{\frown}{ED} - \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{EB} = 120^\circ$

زاویه F که مقابل این کمان است برابر 60° می‌باشد، لذا

F زاویه محاطی باشد، در نتیجه F روی محیط دایره است.

۷



$AB \parallel CC' \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BE}$

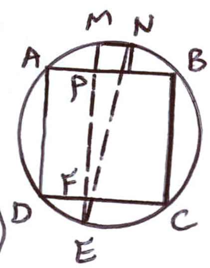
$AC \parallel BB' \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$\hat{B'} = \dfrac{\overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = A\hat{B}C$

$\hat{C'} = \dfrac{\overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{BE}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = A\hat{C}B$

$\Rightarrow B\overset{\triangle}{C}C' \sim B\overset{\triangle}{B'}C \Rightarrow \dfrac{BC}{B'C} = \dfrac{C'B}{BC} \Rightarrow BC^2 = BC' \times B'C$

۶



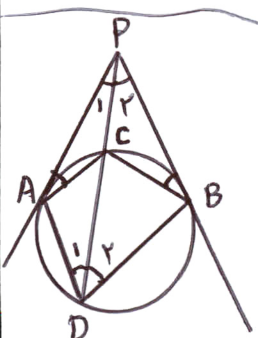
فرض $AD = a$, $MP = EF = x$

$N\hat{M}P = 90^\circ \Rightarrow NE = 2R = a\sqrt{2}$

$ME^2 + MN^2 = NE^2 \Rightarrow (a+2x)^2 + x^2 = 2a^2$

$\Rightarrow 5x^2 + 4ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a/5$

۸

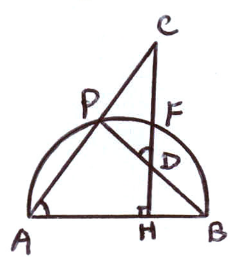


$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{P}_1 \\ P\hat{A}C = \hat{D}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow A\overset{\triangle}{C}P \sim D\overset{\triangle}{A}P \ (1)$

$\left.\begin{array}{l} \hat{P}_2 = \hat{P}_2 \\ P\hat{B}C = \hat{D}_2 = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} \end{array}\right\} \rightarrow B\overset{\triangle}{C}P \sim D\overset{\triangle}{B}P \ (2)$

$\xrightarrow[\text{و (۲)}]{\text{از (۱)}} \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{AC}{AD}$ و $\dfrac{PC}{PB} = \dfrac{BC}{DB} \xrightarrow{PB = PA} \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{BD}$

۵



$A\hat{F}B = 90^\circ \Rightarrow HF^2 = AH \times BH \ (1)$

$P\hat{A}H = 180 - P\hat{D}H = P\hat{D}C = H\hat{D}B$

$\Rightarrow H\overset{\triangle}{D}B \sim H\overset{\triangle}{A}C$

$\Rightarrow HA \times HB = HC \times HD \ (2)$

$\xrightarrow{\text{از (۱) و (۲)}} HF^2 = HC \times HD$