تاریخ :　　　　　　　　　　وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :　　　　　　　　　　تعداد سوالات: ۱۲

موضوع　　　　　　　　　　دبیرستان علامه حلی تهران　　　　　　　　　　سریال ۱۴۷۶۶۴

۲۱. گزینه ۳ به طور کلی، قرینه‌ی نقطه یا بردار $(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به محور zها، نقطه یا بردار $(-a_۱,-a_۲,a_۳)$ است.

$$A=(-۱,۲,۴)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور}z\text{ها}} A''=(۱,-۲,۴)$$

تصویر هر نقطه یا بردار $(b_۱,b_۲,b_۳)$ روی صفحه‌ی xy، نقطه یا بردار $(b_۱,b_۲,۰)$ است.

$$A''=(۱,-۲,۴)\xrightarrow{\text{تصویر روی صفحه }xy} A'=(۱,-۲,۰)$$
$$AA'=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۲-۲)^۲+(۰-۴)^۲}=۶$$

۲۲. گزینه ۱ بردار e_a+e_b ، بردار نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b است. داریم:

$$|a|=۳\Rightarrow e_a=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$$
$$|b|=۳\Rightarrow e_b=(\frac{۲}{۳},-\frac{۱}{۳},-\frac{۲}{۳})$$
$$e_a+e_b=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳},۰)\Rightarrow |e_a+e_b|=\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین برای یافتن بردار جهت نیمساز زاویه‌ی بین بردارهای a و b، کافی است بردار جهت بردار e_a+e_b را بیابیم پس بردار e_a+e_b را بر اندازه‌ی آن یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ تقسیم کنیم. در نتیجه بردار مورد نظر برابر است با $(\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰)$ که مجموع مؤلفه‌های آن برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۳. گزینه ۲

اندازه‌ی تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار b برابر است با:

$$|a'|=\frac{|a\cdot b|}{|b|}=\frac{|-۱۲-۲-۲۱|}{\sqrt{۳۶+۴+۹}}=\frac{۳۵}{۷}=۵$$

۲۴. گزینه ۲

برای هر دو بردار دلخواه a و b داریم:

$$|a\times b|^۲+(a\cdot b)^۲=|a|^۲|b|^۲$$
$$۲۵۶+۱۴۴=۲۵|a|^۲\Rightarrow |a|^۲=۱۶\Rightarrow |a|=۴$$

۲۵. گزینه ۴ می‌دانیم که $i\times j=k$, $j\times k=i$ و $k\times i=j$ ، داریم:

$$(۳j+k)\times(k-i)=۳j\times k-۳j\times i+\underbrace{k\times k}_{۰}-k\times i=۳i-j+۳k\qquad(*)$$
$$\xrightarrow{(*)}(i-j+k)\cdot((۳j+k)\times(k-i))=(i-j+k)\cdot(۳i-j+۳k)=۳+۱+۳=۷$$

۲۶. گزینه ۱ حجم متوازی السطوح ساخته شده روی سه بردار a و b و c برابر است با قدر مطلق حاصل ضرب مختلط سه بردار

$$V=|a\cdot(b\times c)|=|b\cdot(c\times a)|=|c\cdot(a\times b)|$$
$$V=|a\cdot(b\times c)|$$
$$\vec{b}\times\vec{c}=(۱,m,۰)\times(-۱,۲,۳)=(۳m,-۳,m+۲)$$
$$a\cdot(b\times c)=(۱,۲m,۱)\cdot(۳m,-۳,m+۲)=(-۲m+۲)$$
$$V=|a\cdot(b\times c)|\Rightarrow V=|-۲m+۲|\Rightarrow ۲۸=|-۲m+۲|\Rightarrow -۲m+۲=\pm۲۸\Rightarrow m=۱۵,-۱۳$$

۲۷. گزینه ۴ بردارهای های دو خط: $u=(۱,۱,۱),\ u'=(۲,۳,۱)$
چون نسبت های هر دو مؤلفه متناظر دو بردار مساوی نیستند، دو خط موازی نمی باشند و چون حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر نیست، دو خط بر هم عمود نیستند. بنابراین، باید تعیین کنیم که دو خط متقاطع هستند یا متنافر. معادلات یکی از دو خط، مثلاً خط D، را پارامتری می کنیم.

$$M=(x=\frac{۲t-۱}{۲},y=t-۲,z=t) \text{ نقطه متغیر خط } D$$

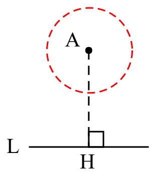
مختصات پارامتری این نقطه را در معادلات خط D' قرار می دهیم:

$$D'\Rightarrow\frac{t+۱}{۲}=\frac{t+۲}{۳}=t\Rightarrow\begin{cases}\frac{t+۱}{۲}=t\Rightarrow t=۱\\ \frac{t+۲}{۳}=t\Rightarrow t=۱\end{cases}$$

چون دو معادله جواب مشترک $t=۱$ دارند، دو خط متقاطع اند و نقطه تلاقی:

$$t=۱\Rightarrow M(\frac{۱}{۲},-۱,۱)$$

۲۸. گزینه ۱



مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۳ هستند یک کره به مرکز A و به شعاع ۳ است. محل تلاقی این کره و خط L خاصیت مسأله را داراست.
باید فاصله‌ی A را از خط مفروض بیابیم. نقطه‌ی $B=(۱,-۱,۰)$ روی خط L واقع و بردار $u=(۱,۲,۲)$ موازی با آن است.

$$L \text{ فاصله } A \text{ از خط }: AH=\frac{|\overline{AB}\times u|}{|u|}=\frac{|(۰,-۳,۳)\times(۱,۲,۲)|}{|(۱,۲,۲)|}=\frac{|(-۱۲,۳,۳)|}{۳}=۳\sqrt{۲}$$

چون فاصله‌ی A از خط L، بیش از ۳ واحد است. پس کره و خط همدیگر را قطع نمیکنند و در نتیجه نقطه‌ای با شرایط مذکور وجود ندارد.

۲۹. گزینه ۲ ابتدا نقطه تلاقی دو خط را پیدا می کنیم. برای این منظور ابتدا خط d را پارامتری کرده نقطه‌ی A را روی آن برحسب t انتخاب سپس مختصات A را در d' صدق می‌دهیم:

$$d:\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z}{۲}=t\Rightarrow A(۲t-۱,-t+۲,۲t)\in d$$

مختصات A در d' صدق می دهیم:

$$:\frac{x-۳}{۱}=\frac{y-۵}{۲}=-z\Rightarrow A\in d'\Rightarrow\frac{۲t-۴}{۱}=\frac{-t-۳}{۲}\Rightarrow ۴t-۸=-t-۳\Rightarrow ۵t=۵\Rightarrow t=۱$$

$$t=۱\Rightarrow A=(۱,۱,۲) \text{ نقطه تلاقی دو خط}$$

معادله صفحه شامل محور oy بفرم $P:x+kz=۰$ است چون $A\in P$ پس مختصات A را در P صدق می دهیم.

$$A\in P\Rightarrow ۱+۲k=۰\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow P:x-\frac{۱}{۲}z=۰\overset{\times ۲}{\Rightarrow}P:۲x-z=۰$$

۳۰. گزینه ۴ وقتی خط بر صفحه منطبق باشد، آن‌گاه بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه برهم عمودند یعنی ضرب داخلی بردار هادی خط و بردار نرمال صفحه، برابر صفر است. همچنین همه نقاط خط در صفحه واقع می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{uL}=(۲,۲b,۳)\\ \overrightarrow{nP}=(a,-۱,۲)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{nP}\cdot\overrightarrow{uL}=۰ \Rightarrow ۲a-۲b+۶=۰ \Rightarrow a-b=-۳$$

$$A=(۲,۱,-۳)\in L \xrightarrow{\text{در } P \text{ صدق می‌کند } A} ۲a-۱-۶=a+۱ \Rightarrow a=۸$$

$$a-b=-۳ \Rightarrow ۸-b=-۳ \Rightarrow b=۱۱ \Rightarrow a+b=۸+۱۱=۱۹$$

۳۱. گزینه ۲ $\overrightarrow{nP}=(۴,-۲,-۳)$ بردار نرمال صفحه و $uD=(۲,۱,۲)$ بردار هادی خط می‌باشد. چون $nP\cdot uD=۰$، پس $nP\perp uD$، یعنی خط و صفحه موازی یکدیگرند.

حال نقطه‌ای از خط انتخاب کرده و فاصله آن را نسبت به صفحه به دست می‌آوریم. مسلماً این فاصله، طول یال را می‌دهد:

$$\frac{x-۱}{۲}=y=\frac{z-۱}{۲} \Rightarrow A=(۱,۰,۱) \Rightarrow a=\frac{|۴(۱)-۲(۰)-۳(۱)-۴|}{\sqrt{۱۶+۴+۹}}=\frac{۳}{\sqrt{۲۹}}$$

حجم مکعب: $V=a^۳ \Rightarrow V=\dfrac{۲۷}{۲۹\sqrt{۲۹}}$

۳۲. گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $B(۱,۰,۰)$ را روی خط در نظر می‌گیریم. اگر u بردار هادی خط D باشد و n بردار نرمال صفحه باشد، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l}u=(۱,۱,۲)\\ \overrightarrow{AB}=(۰,۱,-۲)\end{array}\right\} \Rightarrow N_p=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=(-۴,۲,۱)$$

معادله‌ی صفحه‌ی P عبارت است از:

$$P:-۴(x-۱)+۲(y+۱)+۱(z-۲)=۰ \Rightarrow ۴x-۲y-z-۴=۰$$