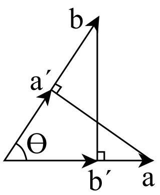
۱۶. گزینه ۲

با توجه به شکل دیده می‌شود اگر زاویه‌ی بین a و b برابر θ باشد زاویه‌ی بین بردارهای a' و b' نیز θ است داریم:



$$a'\cdot b' = |a'||b'|\cos\theta = (|a|\cos\theta)(|b|\cos\theta)\cos\theta$$

$$\Rightarrow a'\cdot b' = \underbrace{(|a||b|\cos\theta)}_{a\cdot b=۱}\cos^۲\theta = \cos^۲\theta$$

۱۷. گزینه ۲

$$|OM| = \sqrt{۳} \Rightarrow \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲ = ۳$$

باتوجه به عبارت $۲x-۲y+z$ ، نامساوی کوشی- شوارتز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} a=(x,y,z) \\ b=(۲,-۲,۱) \end{array}\right\} \Rightarrow |a\cdot b| \le |a||b| \Rightarrow |۲x-۲y+z| \le \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}\sqrt{۴+۴+۱}$$

$$\Rightarrow |۲x-۲y+z| \le \sqrt{۳}\times ۳ \Rightarrow |۲x-۲y+z| \le ۳\sqrt{۳}$$

پس حداکثر مقدار $۲x-۲y+z$ برابر $۳\sqrt{۳}$ و حداکثر مقدار صحیح آن برابر ۵ می‌باشد زیرا $۳\sqrt{۳}$ تقریباً ۵٫۱ برابر می‌باشد.

۱۸. گزینه ۲ چون اندازه‌ی تصویربردار a بر روی بردار b برابر است با: $|a'| = \frac{|a\cdot b|}{|b|}$ در نتیجه داریم:

$$|a\cdot b| = |a'||b|$$

یعنی اگر زاویه‌ی بین دو بردار حاده باشد، ضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصل‌ضرب اندازه‌ی بردار تصویر در اندازه‌ی برداری که روی آن تصویر ایجاد شده است.

بنابراین داریم:

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA} = |BH||BH| = ۴\times ۴ = ۱۶$$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = |CH||CB| = ۶\times ۱۰ = ۶۰$$

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = ۱۶+۶۰ = ۷۶$$

۱۹. گزینه ۲

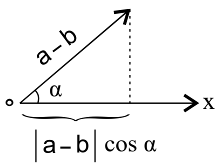
$$\left.\begin{array}{l} |a+b| = ۴ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |a|^۲+|b|^۲+۲a\cdot b = ۱۶ \\ |a-b| = ۲\sqrt{۳} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |a|^۲+|b|^۲-۲a\cdot b = ۱۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۴a\cdot b = ۴ \Rightarrow a\cdot b = ۱$$

اگر دو عبارت فوق را از هم کم کنیم، داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}|a\times b| \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱}{۲}|a\times b| \Rightarrow |a\times b| = \sqrt{۳}$$

$$\frac{|a\times b|}{a\cdot b} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۲۰. گزینه ۱ راه حل اول: اندازه‌ی تصویر $a-b$ روی محور xها برابر است با: $|a-b|\cos\alpha$



که در آن α زاویه‌ی بردار $a-b$ با محور xهاست.

از طرفی داریم:

$$|a-b|\cos\alpha = |a-b||i|cos\alpha = (a-b)\cdot i = a\cdot i - b\cdot i$$
$$= |a||i|\cos\frac{\pi}{۶} - |b||i|cos\frac{\pi}{۳} = ۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۴\times\frac{۱}{۲} = ۳-۲=۱$$

راه حل دوم:

تصویر a روی محور xها $\qquad \cos\frac{\pi}{۶}=\frac{x}{|a|}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{x}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow x=۳$

تصویر b روی محور yها $\qquad \cos\frac{\pi}{۳}=\frac{x}{|b|}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x=۲$

بر طبق این تصویر بردار $a-b$ روی محور xها برابر $۳-۲=۱$ می‌باشد.

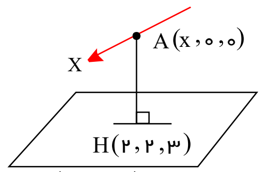
۲۱. گزینه ۲ می‌دانیم $c\times a$ بر a عمود است. پس $a\cdot(c\times a)=۰$ حال دو طرف رابطه‌ی $b+e_a=c\times a$ را در a ضرب داخلی می‌کنیم.

$$a\cdot(b+e_a)=a\cdot(c\times a)=۰\Rightarrow a\cdot b+a\cdot e_a=۰\Rightarrow|a||b|\cos\theta+|a||e_a|\cos ۰=۰$$

$$\Rightarrow|a||b|\cos\theta+|a|=۰\Rightarrow|a|(|b|cos\theta+۱)=۰\xrightarrow{|a|\neq ۰}\cos\theta=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\theta=۱۲۰^{\circ}$$

تذکر: بردار e_a، بردار یکه است و در نتیجه $|e_a|=۱$

۲۲. گزینه ۱ معادله‌ی خط AH را با استفاده از نقطه‌ی $A=(x_۰,۰,۰)$ و $\overrightarrow{AH}=n=(۱,۲,۳)$ می‌نویسیم (n بردار نرمال صفحه‌ی P است.)



$$\frac{x-x_۰}{۱}=\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x=t+x_۰\\ y=۲t\\ z=۳t\end{cases}$$

چون نقطه‌ی $H=(۲,۲,۳)$ روی این خط قرار دارد، داریم:

$$y=۲t=۲\Rightarrow t=۱$$
$$x=t+x_۰\Rightarrow ۱+x_۰\Rightarrow x_۰=۱$$

۲۳. گزینه ۴ نکته: هر زمان یک نقطه با ویژگی خاص از یک خط را بخواهیم ابتدا معادله‌ی خط را پارامتری کرده و آن نقطه را برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه‌ی $p:ax+by+cz=d$ از دستور $h=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ حاصل می‌شود.

فرض کنید A نقطه‌ای پارامتری روی d باشد، داریم:

$$d=\frac{x+۱}{۲}=\frac{y+۳}{۳}=z+۲=t$$
$$A=(۲t-۱,۳t-۳,t-۲)$$

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی A از صفحه‌ی P، برابر h باشد، آن‌گاه:

$$h=\frac{|۴t-۲+۳t-۳-۲t+۴+۲|}{\sqrt{۴+۱+۴}}=۲\Rightarrow ۵t+۱=\pm۶\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-\frac{۷}{۵}$$
$$t=۱\Rightarrow A=(۱,۰,-۱)$$

۲۴. گزینه ۱ نکته: اگر صفحه‌ای با دو خط غیر موازی، موازی باشد بردار نرمال آن از ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط بدست می‌آید.

دو خط $d_۱:\frac{x}{۲}=\frac{y-۱}{۱}=\frac{z+۳}{-۱}$, $d_۲:\begin{cases}x=۱+t\\ y=-۱-۲t\\ z=۲+t\end{cases}$ موازی نیستند

راستای عمود بر این دو خط را به دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{np}=\overrightarrow{ud_۱}\times\overrightarrow{ud_۲}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ ۲ & ۱ & -۱\\ ۱ & -۲ & ۱\end{vmatrix}=(-۱,-۳,-۵)$$

صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی $A(۰,۱,۲)$ و عمود بر این راستا با خط‌های $d_۱$ و $d_۲$ موازی است پس n بردار نرمال صفحه است و معادله‌ی صفحه به شرح زیر به دست می‌آید:

$$p: -(x-۰)-۳(y-۱)-۵(z-۲)=۰ \Rightarrow p: x+۳y+۵z-۱۳=۰$$

با قرار دادن $x=y=۰$ نقطه‌ی تلاقی با محور zها به دست می‌آید:

$$z=\frac{۱۳}{۵}=۲/۶$$

۲۵. گزینه ۲ تذکر: معادله صفحه‌ی موازی محور xها از دستور $p: y=kz=d$ به‌دست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} A=(۲,۳,-۱)\in p \xrightarrow{\text{صدق دهید}} ۳-k=d \\ B=(۰,۱,۱)\in p \xrightarrow{\text{صدق دهید}} ۱+k=d \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} d=۲ \\ k=۱ \end{cases} \Rightarrow p: y+z=۲$$

برای تعیین محل برخورد این صفحه با محور oy مؤلفه‌های x و z را در معادله‌ی صفحه‌ی مساوی صفر می‌گذاریم.

$$z=۰ \Rightarrow y=۲ \Rightarrow M=(۰,۲,۰)$$

۲۶. گزینه ۲ نقطه‌ی دلخواه $B(۱,۰,۰)$ را روی خط در نظر می‌گیریم. اگر u بردار هادی خط D باشد و n بردار نرمال صفحه باشد، آنگاه داریم:

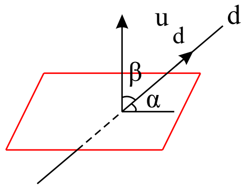
$$\left.\begin{array}{l} u=(۱,۱,۲) \\ \overrightarrow{AB}=(۰,۱,-۲) \end{array}\right\} \Rightarrow Np=\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=(-۴,۲,۱)$$

معادله‌ی صفحه‌ی P عبارت است از:

$$P: -۴(x-۱)+۲(y+۱)+۱(z-۲)=۰ \Rightarrow ۴x-۲y-z-۴=۰$$

۲۷. گزینه ۳ نکته: زاویه بین خط d و صفحه‌ی p از دستور:

$$\cos\beta=\cos(۹۰-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{ud}\cdot\overrightarrow{NP}}{\left|\overrightarrow{ud}\right|\left|\overrightarrow{NP}\right|}$$



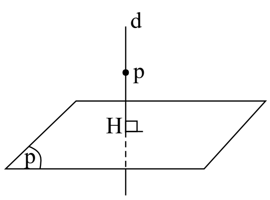
$$d: \frac{x-۱}{a}=y+۲=\frac{z-۳}{-۱} \Rightarrow ud=(a,۱,-۱)$$

$$p: x+۲y+z-۵=۰ \Rightarrow \overrightarrow{NP}(۱,۲,۱)$$

$$\sin ۳۰^\circ=\frac{ud\cdot\overrightarrow{NP}}{|ud|\left|\overrightarrow{NP}\right|} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{a+۲-۱}{\sqrt{a^۲+۲}\times\sqrt{۶}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۶(a^۲+۲)=۴(a+۱)^۲$$

$$\Rightarrow (a-۲)^۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

۲۸. گزینه ۳ معادله‌ی خط شامل $P=(۲,۳,-۷)$ و عمود بر صفحه‌ی $P: ۴x-y-z=۶$ را می‌نویسیم و در صفحه‌ی P قرار می‌دهیم. چون خط بر صفحه عمود است. پس بردار هادی آن را می‌توانیم بردار عمود بر صفحه بگیریم. داریم:



$$\vec{uD}=\overrightarrow{NP},\ P\in D \Rightarrow D: \frac{x-۲}{۴}=\frac{y-۳}{-۱}=\frac{z+۷}{-۱}=t \Rightarrow \begin{cases} x=۴t+۲ \\ y=-t+۳ \\ z=-t-۷ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله صفحه}} ۴(۴t+۲)-(-t+۳)-(-t-۷)=۶$$

$$\Rightarrow ۱۸t=-۶ \Rightarrow t=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow x+y=۳t+۵=۳(-\frac{۱}{۳})+۵=۴$$

۲۹. گزینه ۲ کافی است دسته‌ی صفحه‌ی شامل $P_۱$ و $P_۲$ را از رابطه‌ی $P_۱=kP_۲$ محاسبه کنیم و سپس شرط عمود بودن بر $P_۳$ را اجرا کنیم.

دسته‌ی صفحه‌ی شامل $P_۲,P_۱$:

$$(x+y-۱)=k(۲x-y+z)\Rightarrow(۱-۲k)x+(۱+k)y-kz-۱=۰$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{بردار نرمال دسته صفحه}\ (۱-۲k,۱+k,-k)\\ N_۳=(۳,۱,-۱)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ضرب داخلی}=۰}۳-۶k+۱+k+k=۰\Rightarrow k=۱$$

$$\Rightarrow x+y-۱=۱(۲x-y+z)\Rightarrow -x+۲y-z-۱=۰$$

۳۰. گزینه ۲

معادله‌ی خط را پارامتری کنیم: $x=۳t+۱\ ,\ y=۲t-۱\ ,\ z=-t\Rightarrow A=(۳t+۱\ ,\ ۲t-۱\ ,\ -t)$

حالا مختصات A را در صفحه قرار می‌دهیم:

$$x+۲y+۳z=۹$$

$$(۳t+۱)+۲(۲t-۱)+۳(-t)=۹\Rightarrow ۳t+۱+۴t-۲-۳t=۹\Rightarrow ۴t=۱۰\Rightarrow t=۲/۵$$

$$\Rightarrow x_A+y_A+z_A=۳t+۱+۲t-۱+(-t)=۴t=۱۰$$