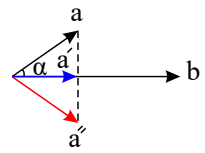


۱۶. گزینه ۳ نکته: اگر a' و a'' بترتیب تصویر و قرینه a نسبت به b باشند آنگاه $\vec{a} = \vec{a''} = 2\vec{a}$

$$a + a'' = 5b \Rightarrow 2a' = 5b \Rightarrow |2a'| = |5b|$$

$$\Rightarrow |a'| = \frac{5}{2}|b| = \frac{5}{2} \times 5 \Rightarrow \frac{|a \cdot b|}{|b|} = 5 \Rightarrow |a \cdot b| = 2 \times 5 = 10$$



۱۷. گزینه ۳

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c$$

$$|a + b|^2 = |c|^2 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |c|^2$$

بنابراین فرض $|a| = 3$, $|b| = 5$ و $|c| = 7$ در نتیجه:

$$3^2 + 5^2 + 2a \cdot b = 7^2 \Rightarrow 9 + 25 + 2a \cdot b = 49$$

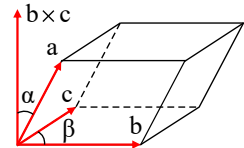
$$\Rightarrow a \cdot b = \frac{15}{2}$$

اندازه‌ی تصویر بردار a روی امتداد بردار b برابر است با:

$$|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|} = \frac{\frac{15}{2}}{5} = \frac{3}{2}$$

۱۸. گزینه ۱ تذکر: حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{متوازی‌السطوح}} = |a \cdot (b \times c)| = ||a||b||c| \sin \beta \cos \alpha|$$



بردار a با صفحه‌ی شامل دو بردار b و c , زاویه‌ی 60° می‌سازد. از طرفی بردار $b \times c$ بر صفحه‌ی شامل این دو بردار عمود است، پس با بردار a , زاویه‌ی 30° خواهد ساخت. داریم:

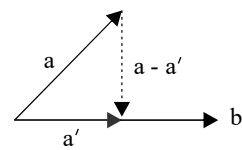
$$|b \times c| = |b||c| \sin 30^\circ = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = |a||b \times c| \cos 30^\circ = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

۱۹. گزینه ۴

$$b \cdot (a' - a) = 0 \text{ بر } b \text{ عمود است پس}$$

داریم:



$$a' - a = (m, -m, 3) - (m - 2, -7, 5) = (2, -m + 7, -2)$$

$$b \cdot (a' - a) = 0 \Rightarrow (2, -2, 1) \cdot (2, -m + 7, -2) = 0$$

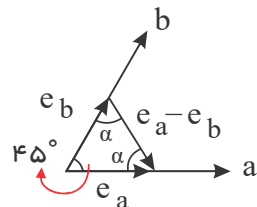
$$\Rightarrow 4 + 2m - 14 - 2 = 0 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow a' = (6, -6, 3)$$

$$\Rightarrow |a'| = \sqrt{36 + 36 + 9} = \sqrt{81} = 9$$

۲۰. گزینه ۳

$$|a| = 2|b| = 4 \rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ |b| = 2 \end{cases}$$

$$a \cdot b = 4\sqrt{2} \Rightarrow |a||b|\cos\theta = 4\sqrt{2} \Rightarrow 8\cos\theta = 4\sqrt{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



مطابق شکل چون $|e_a| = |e_b|$ پس مثلث درون شکل متساوی الساقین است.

$$\alpha = \frac{180 - 45}{2} = 67.5 \text{ پس}$$

چون انتهای بردار eb بر ابتدای بردار $ea - eb$ منطبق است.

پس زاویه واقعی بین بردارهای $\vec{eb}$ و $\vec{ea} - \vec{eb}$ برابر $180 - 67.5 = 112.5$ است.

تذکر: اگر ابتدای یک بردار منطبق بر انتهای بردار دیگر باشد مکمل زاویه بین آنها زاویه واقعی بین دو بردار است.

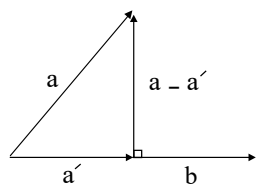
۲۱. گزینه ۱ تذکر: مساحت مثلث ساخته شده روی بردارهای a و b برابر $\frac{1}{2}|a \times b|$ می باشد.

$$S_{\Delta} = 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}|a \times b| \Rightarrow |a \times b| = 4\sqrt{3}$$

$$a \perp a \times b \Rightarrow |a \times (a \times b)| = |a||a \times b|\sin 90 = |a||a \times b| = \sqrt{6} \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$$

۲۲. گزینه ۳

اگر a' را تصویر بردار $a = (4, -1, 4)$ روی امتداد بردار $b = (2, 4, 6)$ بگیریم، آن گاه مانند شکل ارتفاع وارد بر b برابر با یکی از دو بردار $a - a'$ یا $a' - a$ خواهد شد. به کمک فرمول تصویر a روی امتداد b داریم:



$$\begin{aligned} a' &= \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{(4, -1, 4) \cdot (2, 4, 6)}{2^2 + 4^2 + 6^2} (2, 4, 6) \\ &= \frac{8 - 4 + 24}{56} (2, 4, 6) = \frac{1}{2} (2, 4, 6) = (1, 2, 3) \\ \Rightarrow a - a' &= (4, -1, 4) - (1, 2, 3) = (3, -3, 1) \end{aligned}$$

۲۳. گزینه ۴ بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 را به ترتیب u_1 و u_2 نامیده و نقاط دلخواه M, N را به ترتیب روی دو خط d_1 و d_2 در نظر می گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} u_1(1, 2, -2) \\ u_2(1, -1, 1) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow u = u_1 \times u_2 = (0, -3, -3) \\ \left. \begin{aligned} M(-1, 0, 0) \\ N(0, 1, -2) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (1, 1, -2) \end{aligned}$$

$$d_2, d_1 \text{ طول عمود مشترک در خط} = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot u|}{|u|} = \frac{|0 - 3 + 6|}{\sqrt{0 + 9 + 9}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۴. گزینه ۴ ابتدا معادله خط گذرا: A و B را یافته سپس آن را پارامتری کرده در خط L صدق می دهیم.

$$\vec{u}_D = \vec{AB} = (2, 2, 4)$$

$$A \in D \Rightarrow D: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4} = t \Rightarrow D: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 1 \\ z = 4t \end{cases} \rightarrow M = (2t, 2t + 1, 4t)$$

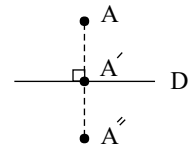
مختصات m در خط L صدق می‌کند.

$$L: \frac{x-m}{-1} = y = z \xrightarrow[m \text{ را در } L \text{ صدق می‌دهیم}]{m} \frac{2t-m}{-1} = 2t+1 = 4t$$

$$\begin{cases} 2t+1 = 4t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ \frac{2t-m}{-1} = 2t+1 \xrightarrow{t=\frac{1}{2}} \frac{1-m}{-1} = 2 \Rightarrow m = 3 \end{cases}$$

۲۵. گزینه ۲ ابتدا خط D را پارامتری و نقطه‌ی A' (تصویر A روی خط D می‌باشد) را برحسب t روی آن انتخاب می‌کنیم.

$$D: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t - 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow A' = (3t - 1, t - 2, 1) \in D$$



حال بردار $\vec{AA'}$ را برحسب t می‌سازیم:

$$\vec{AA'} = A' - A = (3t - 2, t - 4, 0) \cdot (3, 1, 0) = 0 \Rightarrow 9t - 6 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow A' = (2, -1, 1) \leftarrow \text{مختصات تصویر } A \text{ روی خط } D$$

از آنجا که A' وسط A و A'' است. پس:

$$A'' = 2A' - A = 2(2, -1, 1) - (1, 2, 1) = (3, -4, 1)$$

۲۶. گزینه ۲ راستای عمود مشترک برابر است با حاصل ضرب خارجی راستاهای دو خط L_1 و L_2 یعنی:

$$L_1: \begin{cases} x = -y + 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow u_1(1, -1, 0)$$

$$L_2: \begin{cases} x = 2z + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow u_2(1, 0, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\times(2)} (2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow u = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(-1) - j(1) + k(2) \Rightarrow u(-1, -1, 2)$$

چون راستای این خط بر صفحه عمود است پس راستای این خط، نقش نرمال صفحه را خواهد داشت. واضح است که بردار u موازی بردار نرمال صفحه مشخص شده در گزینه «۲» است.

تذکر ۱: راستای عمود مشترک دو خط متنافر d_1 و d_2 از دستور $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \times \vec{u}_{d_2}$ حاصل می‌شود.

تذکر ۲: اگر برداری مانند $\vec{a}$ بر صفحه p عمود باشد آنگاه با بردار نرمال صفحه p موازی است یعنی $a \parallel Np$

۲۷. گزینه ۴ ابتدا شرط عمود بودن دو خط را در نظر می‌گیریم:

$$d \perp d' \Rightarrow u_d \perp u_{d'} \Rightarrow u_d \cdot u_{d'} = 0$$

$$\Rightarrow (a, -2, -1) \cdot (a - 2, -3, 5) = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 6 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

با فرض $u_d = (-1, -3, 5)$ و $u_{d'} = (1, -2, -1)$ بردار نرمال صفحه عبارت است از:

$$n = u_d \times u_{d'} = (13, 4, 5)$$

از طرفی نقطه‌ی $A = (0, 1, 0)$ (نقطه‌ی A متعلق به خط d' است که در صفحه نیز صدق می‌کند.) در این صفحه است، پس داریم:

$$P: 13(x-0) + 4(y-1) + 5(z-0) = 0 \Rightarrow 13x + 4y + 5z - 4 = 0$$

برای تعیین محل برخورد صفحه P با محور OZ مؤلفه x, y را در معادله صفحه مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{x=y=0}{\rightarrow} z = \frac{4}{5}$$

۲۸. گزینه ۳ معادله کلی صفحات گذرنده از فصل مشترک دو صفحه $P_1: x-y+1=0$ و $P_2: y-z-2=0$ به صورت $P'': P_1 + KP_2 = 0 \Rightarrow (x-y+1) + k(y-z-2) = 0$ است. برای اینکه از مبدأ بگذرد با قرار دادن $(0, 0, 0)$ مقدار k را تعیین می‌کنیم.

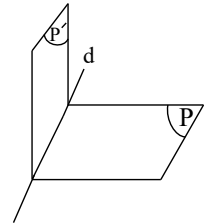
$$1 + k(-2) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow P'': (x-y+1) + \frac{1}{2}(y-z-2) = 0$$

حالا با $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ تلاقی می‌دهیم:

$$\frac{x=2}{y=1} \rightarrow (2-1+1) + \frac{1}{2}(1-z-2) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{-1-z}{2} = 0 \Rightarrow z = 3$$

۲۹. گزینه ۳ نکته: دو صفحه p و p' را در نظر می‌گیریم فصل مشترک این دو صفحه خطی است که در محل تقاطع این دو خط ایجاد می‌شود. بردار هادی این خط از ضرب خارجی بردارهای نرمال صفحات p و p' حاصل می‌شود. $(ud = nP \times np')$ برای تعیین یک نقطه از خط d معادلات دو صفحه را در یک دستگاه نوشته به یکی از متغیرهای x و y یا z عدد دلخواهی می‌دهیم.

$$d: \begin{cases} x+y+z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow ud = nP \times np' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (2, 0, -2)$$



$$\frac{x=0}{\rightarrow} \begin{cases} y+z=-1 \\ -y+z=1 \end{cases} \rightarrow z=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0, -1, 0) \in d$$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{z}{-2} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{مختصات همه‌ی نقاط } d: M(t, -1, t)$$

$$|MP| = |MP'| \Rightarrow \frac{|t-2-2t+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|t-2+2t+7|}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow t=3 \Rightarrow M(3, -1, 3)$$

۳۰. گزینه ۴ تذکر: برای تعیین مختصات تصویر نقطه A روی خط d مراحل زیر را حل می‌کنیم:

(۱) ابتدا خط d را پارامتری کرده و A' را برحسب t روی آن می‌یابیم.

(۲) بردار AA' را می‌سازیم این بردار بر خط d و از آنجا بر بردار هادی خط d عمود است بنابراین $AA' \cdot ud = 0$ و از اینجا مقدار t بدست می‌آید.

(۳) با داشتن t مختصات A' تصویر A روی خط d و از آنجا مختصات قرینه A نسبت به خط d از دستور $A'' = 2A' - A$ بدست می‌آید.

$$d: \begin{cases} y=3 \\ \frac{x-3}{2} = \frac{z}{-1} = t \end{cases} \Rightarrow A' = (2t+3, 3, -t), A = (2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (2t+1, 2, -t-1), ud = (2, 0, -1)$$

$$AA' \cdot ud = 0 \Rightarrow 4t+2+t+1=0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5} \Rightarrow A' = (1.8, 3, 0.6)$$

$$A'' = 2A' - A = (1.6, 5, 0.2) \Rightarrow A'' \text{ مجموع مختصات } = 6.8$$

