

۲۱- رابطه $R = \{(1, 1), (1, 5), (3, 3), (1, 3), (3, 5), (5, 5), (3, 1), (1, 5)\}$ در مجموعه $A = \{1, 3, 5\}$ تعریف شده است، کدام خواص را دارد؟

(۱) پادمتقارن (۲) تقارن (۳) بازتابی - پاد تقارن (۴) بازتابی - تراگذری

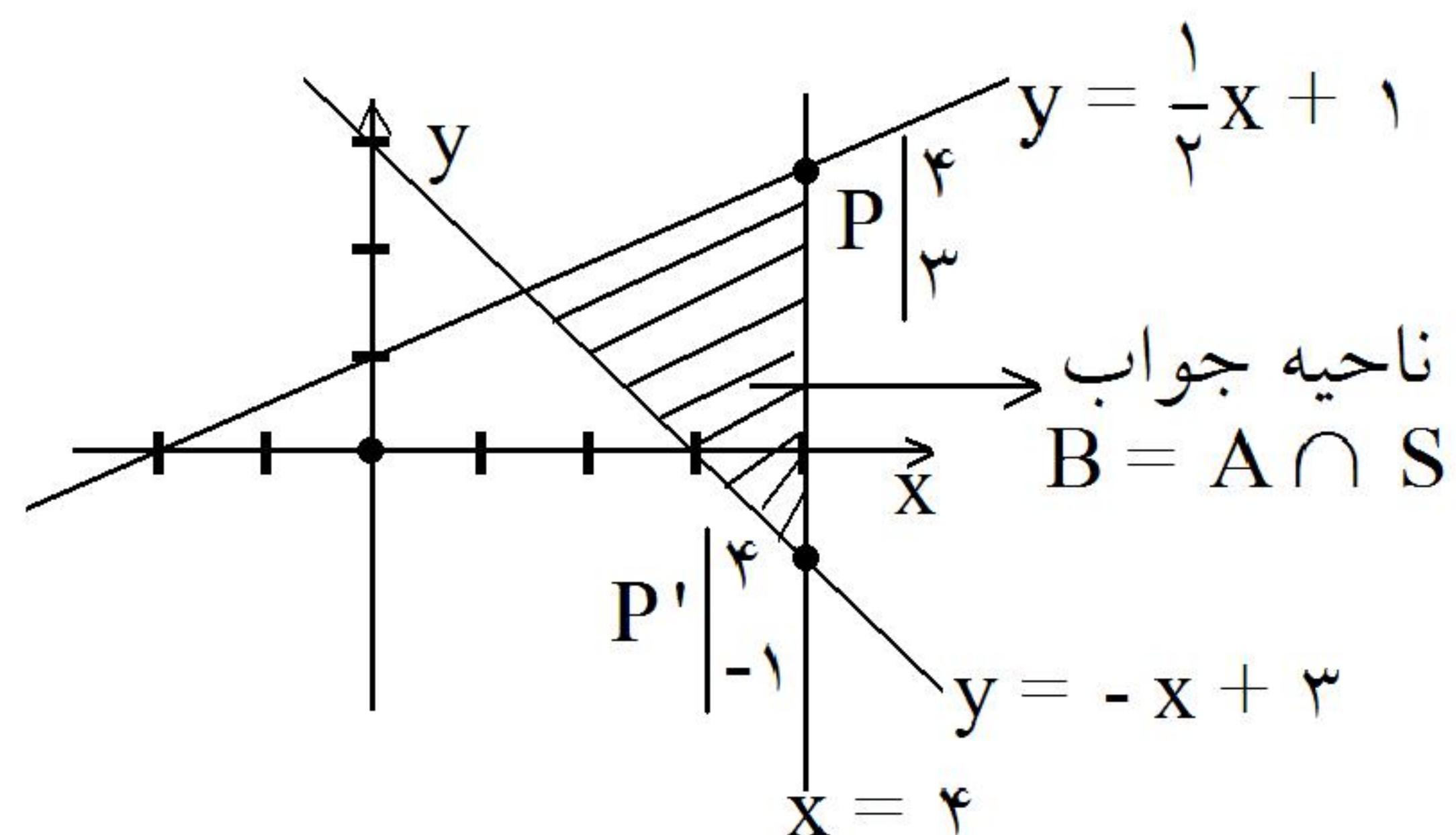
$\forall a \in A \Rightarrow aRa$

چون تمام اعضای A باهم در رابطه هستند پس بازتابی دارد.
 $aRb \Rightarrow bRa: (3, 5) \Rightarrow (5, 3) \notin R$

پس تقارنی ندارد.
 $aRb \wedge bRc: aRc \Rightarrow (1, 3) \wedge (3, 1) \Rightarrow (1, 1) \in R$
 پس تراگذری دارد.
 پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۲- اگر $A = \{(x, y) : x \leq 4\}$ و $S = \{(x, y) : 2y - x \leq 2, x + y \geq 3\}$ زیرمجموعه‌هایی از R^2 باشند و $B = A \cap S$ ، فاصله دورترین نقطه ناحیه B تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{2}$ (۳) 5 (۴) 6



برای بدست آوردن ناحیه اشتراک کافیست مجموعه A و S را روی دستگاه مختصات مشخص کنیم:
 P دورترین نقطه نسبت به مبدأ است.

$$\Rightarrow OP = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

بنابراین گزینه ۲، پاسخ صحیح است.

۲۳- رابطه $(a, b)R(c, d)$ با کدام تعریف روی N^2 یک رابطه هم ارزی نیست؟

(۱) $ab = cd$ (۲) $ad = bc$ (۳) $a + c = b + d$ (۴) $a + d = b + c$

رابطه بازتابی را در نظر می‌گیریم گزینه ۳ دارای این رابطه نیست زیرا:
 زیرا در حالت کلی $a \neq b$ می‌باشد و چون دارای رابطه بازتابی نیست پس این رابطه هم ارزی نمی‌باشد. پس گزینه ۳ جواب است. توجه کنیم اگر یک عمل روی زوج مرتب‌ها رخ دهد، هم ارزی خواهیم داشت.

۲۴- مجموعه A دارای ۲۵ عضو و B و C و D و E زیرمجموعه‌های A می‌باشند اگر $n(A) = 4$ ، $n(B) = 3$ و $n(C) = 4$ و $n(D) = 7$ و $n(E) = 11$ چهار مجموعه B و C و D و E یک افزار A باشند، کدام است؟

(۱) 5 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 11

تعداد کل اعضای مجموعه‌های افزار باید برابر تعداد کل مجموعه اصلی باشد پس داریم:
 $n(B) + n(C) + n(D) + n(E) = n(A) \Rightarrow 3 + 4 + 7 + n(E) = 25 \Rightarrow n(E) = 11$
 و گزینه ۴ صحیح است.

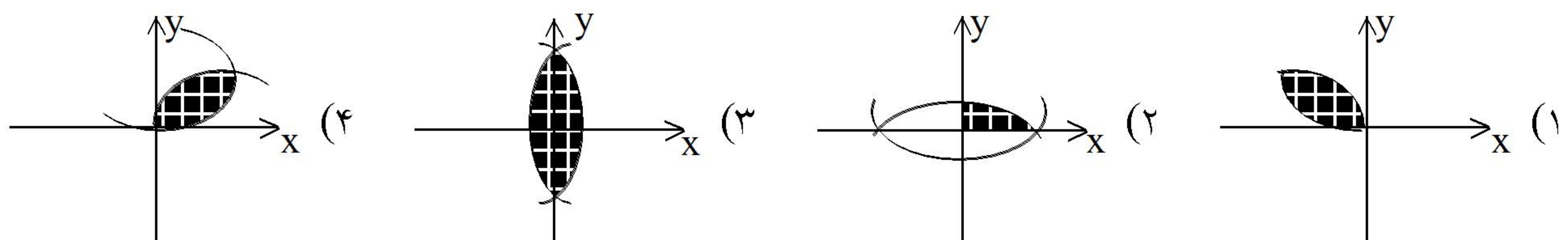
- ۲۵- مجموعه $(A - B) \cup (B \cap A)$ همواره برابر کدام مجموعه است؟
- \emptyset (۴) $A \cap B$ (۳) B (۲) A (۱)

(M) مجموعه مرجع می‌باشد)

$$(A - B) \cup (B \cap A) = (A \cap B') \cup (B \cap A) = A \cap (B' \cup B) = A \cap M = A$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

- ۲۶- اگر $S_1 \cap S_2 = \{(x, y) | x \geq y^2\}$ ، $S_1 = \{(x, y) | y \geq x^2\}$ کدام است؟

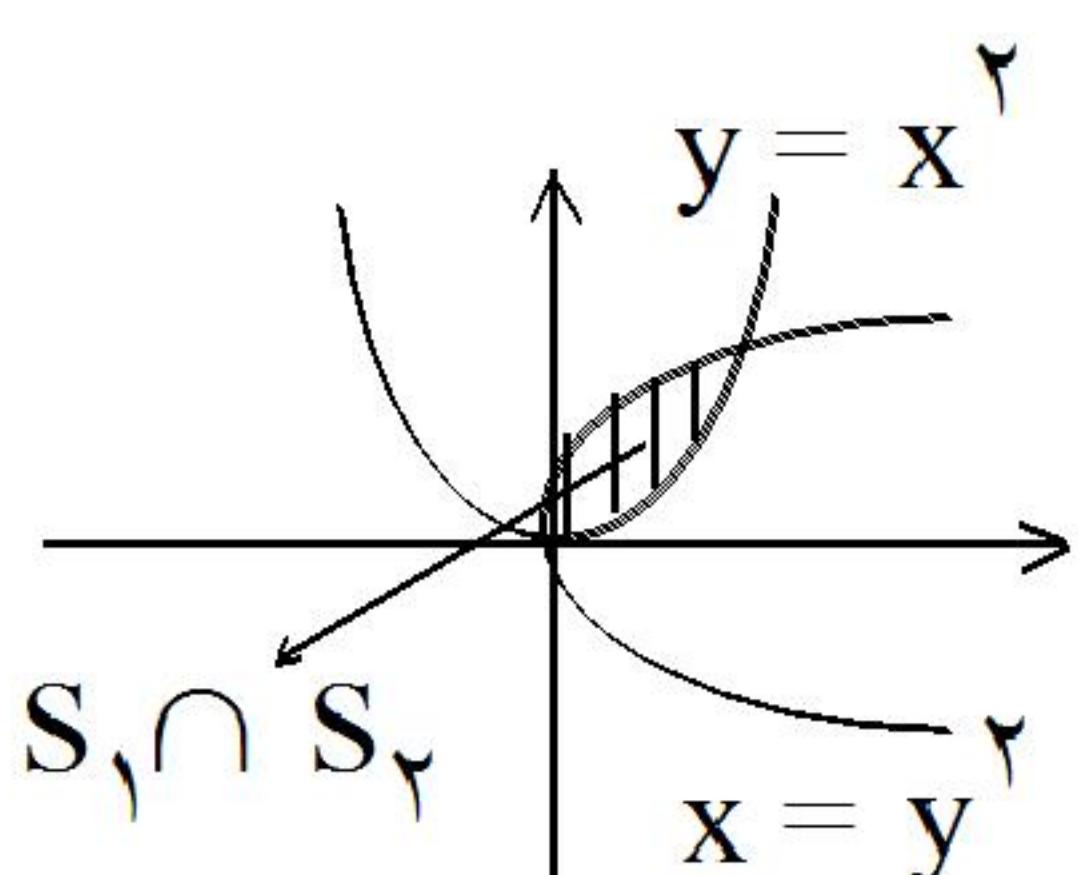


روش اول: با توجه به رابطه تعریف شده در S_1 یعنی $x \geq y^2$ ، در نتیجه $y \geq 0$ می‌باشد. پس نمودارهای ۲ و ۳ که دارای y های منفی هستند نمی‌توانند جواب باشند. اما با توجه به رابطه S_2 یعنی $x \geq y^2$ ، x ها باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند ($x \geq 0$). بنابراین نمودار ۱ که شامل x های منفی می‌باشد، نمی‌تواند جواب $S_1 \cap S_2$ باشد.

در نتیجه گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش دوم: می‌توانیم با استفاده از رسم شکل دو سهمی، ناحیه مشترک را

بعنوان $S_1 \cap S_2$ داشته باشیم:



توجه: با نقطه‌گذاری، ناحیه‌ی قابل قبول را تعیین می‌کنیم.

- ۲۷- مجموعه $(A - B) \cup (B - A)$ با کدام مجموعه برابر است؟
- $(A \cup B) - (A \cap B)$ (۴) $A \cup B$ (۳) $A \cap B$ (۲) \emptyset (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اولاً به سهولت با رسم نمودار ون گزینه ۴ جواب صحیح انتخاب می‌شود. ثانیاً با در نظر گرفتن عملیات روی مجموعه‌ها نتیجه درست حاصل می‌شود.

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (A' \cap B) = [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$= (A \cup B) \cap (B' \cup A') = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B)$$

-۲۸- کدام دو مجموعه یک افزار مجموعه اعداد صحیح می باشند؟

(۱) مجموعه اعداد صحیح زوج و مجموعه اعداد صحیح فرد.

(۲) مجموعه حاصل از مضارب صحیح اعداد اول و مجموعه اعداد فرد.

(۳) مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه حاصل از قرینه اعداد طبیعی.

(۴) مجموعه اعداد مضرب ۳ و مجموعه اعداد مضرب ۵.

یادآوری: دو مجموعه را یک افزار مجموعه اعداد صحیح گویند، اگر سه شرط زیر را دارا باشد:

۱- اشتراک دو مجموعه تهی باشد.

۲- اجتماع دو مجموعه، مجموعه اعداد صحیح باشد.

۳- هر قسمت افزار غیرتهی می باشد.

با توجه به این شرط‌ها فقط گزینه ۱ صحیح است.

-۲۹- کدام رابطه در مجموعه $\{a, b, c\}$ خاصیت تقارنی دارد و خاصیت تراکذی ندارد (۱) دو بدو متمازنند)

$\{(a, c), (c, a)\}$ (۲) $\{(a, b), (a, a)\}$ (۱)

$\{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ (۴) $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ (۳)

گزینه ۲ صحیح است زیرا $\{(a, c), (c, a)\}$ خاصیت تقارنی دارد اما چون اعضای (a, a) و (c, c) را شامل نمی شود، پس خاصیت تراکذی ندارد.

-۳۰- اگر به ازای هر دو مجموعه A و B داشته باشیم $(A \cup B) \subset (A \cap B')$ آنگاه همواره :

$A' = B$ (۴) $B = \emptyset$ (۳) $A = \emptyset$ (۲) $A = B'$ (۱)

اشتراک A با هر مجموعه‌ای زیر مجموعه $A \cup B$ است و A همواره زیرمجموعه $A \cup B$ می باشد. بنابراین :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B' \subset A \\ A \subset A \cup B \end{array} \right\} \Rightarrow A \cap B' \subset A \cup B$$

براساس فرض سوال $A \cup B \subset A \cap B'$ پس :

$$A \cap B' = A \cup B \xrightarrow{\cap B} (A \cap B') \cap B = \underbrace{(A \cup B) \cap B}_{\text{جذب}} \Rightarrow \emptyset = B$$

تساوی فوق وقتی برقرار است که B شامل عضوی نباشد، یعنی $B = \emptyset$. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

-۳۱- اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، $(A - B)'$ با کدام مجموعه برابر است؟

$(A \cup B)'$ (۴) $A' \cup B$ (۳) $A \cup B'$ (۲) $A \cup B$ (۱)

$$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

-۳۲ A - مجموعه اعداد فرد و B مجموعه مقسوم علیه های عدد ۹ بوده، در این صورت:

$$A \cup B = B \quad (۴) \quad A \cap B = A \quad (۳) \quad A \subset B \quad (۲) \quad B \subset A \quad (۱)$$

$$\left. \begin{array}{l} A = \{ \text{اعداد فرد} \} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \} \\ B = \{ \text{مقسوم علیه های ۹} \} = \{ 1, 3, 9 \} \end{array} \right\} \Rightarrow B \subset A$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

یادآوری: اگر $B \subset A$ باشد آنگاه $B \cup A = A$ و $B \cap A = B$

-۳۳ حاصل عبارت $A' \cap [(B' \cap A') \cup B']$ کدام است؟

$$A' \quad (۴) \quad A - B' \quad (۳) \quad A - B \quad (۲) \quad A' - B \quad (۱)$$

$(B' \cap A') \cup B' = B'$ طبق قانون جذب:

$$A' \cap [(B' \cap A') \cup B'] = A' \cap B' = A' - B$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ درست است.

-۳۴ رابطه R در مجموعه اعداد حقیقی بصورت $aRb \Leftrightarrow 2a + b = 4$ تعریف شده است. R دارای کدام خاصیت است؟

$$(۱) \text{ تقارنی} \quad (۲) \text{ بازتابی} \quad (۳) \text{ تعدی (تراگذاری)} \quad (۴) \text{ پادتقارنی}$$

$$\forall a \in R : aRa : 2a + a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

رابطه فوق فقط به ازای $a = \frac{4}{3}$ برقرار است، بنابراین خاصیت بازتابی ندارد.

تعددی: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$$2a + b = 4 \wedge 2b + c = 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 2a \\ 2b + c = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - 4a + c = 4 \Rightarrow 4a - c = 0$$

پس خاصیت تعدی نیز ندارد.

پاد تقارنی: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

$$2a + b = 4 \wedge 2b + a = 4 \Rightarrow 2a + b = 2b + a \Rightarrow a = b$$

پس خاصیت پادتقارنی دارد.

تقارنی: $aRb \Rightarrow bRa$

$$2a + b = 4 \Rightarrow 2b + a = 4$$

چنین نتیجه ای درست نیست پس تقارنی ندارد: لذا گزینه ۴ پاسخ درست است.

بنابراین رابطه داده شده فقط خاصیت پادتقارنی دارد. لذا گزینه ۴ پاسخ درست است.

-۳۵ اگر $n(B) = ۱۵$ و $n(A \cap B) = ۸$ باشد $n(B - A)$ کدام است؟

$$۵ \quad (۴) \quad ۷ \quad (۳) \quad ۴ \quad (۲) \quad ۳ \quad (۱)$$

$$n(B - A) = n(B) - n(B \cap A) = 15 - 8 = 7$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.