دیفرانسیل

۱. گزینه ۴ صحیح است.

اگر $x+1\le 0$ باشد آنگاه نامساوی برای هر x عضو دامنه یعنی $x\ge -3$ برقرار است پس یک دسته جواب به صورت $-3\le x\le -1$ است.

$$x>-1\Rightarrow (x+1)^2<x+3\Rightarrow x^2+x-2<0\Rightarrow -2<x<1$$

$$\xrightarrow{x>-1} -1<x<1$$

از اجتماع دو جواب به دست آمده بازه‌ی $[-3,1)$ به عنوان جواب نامعادله به دست می‌آید پس $b-a=4$ است.

۲. گزینه ۴ صحیح است.

$$a=\frac{(2-a)+(2a+1)}{2}\Rightarrow a=3$$

$$r=\frac{(2a+1)-(2-a)}{2}=\frac{3a-1}{2}=4$$

۳. گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{a}{b}=0/3\overline{88}=0/3\overline{8}=\frac{38-3}{90}=\frac{35}{90}=\frac{7}{18}$$

$$\frac{b-a}{b+a}=\frac{18-7}{18+7}=\frac{11}{25}=0/44$$

دقت کنید که اگر کسر $\frac{35}{90}$ را ساده نکنیم تأثیری در جواب ندارد.

۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{13}{6}=2/166\ldots \qquad |2/1\underbrace{66\ldots6}_{n-1}-\frac{13}{6}|\ge 10^{-5}$$

$$|2/1\underbrace{66\ldots6}_{n-1}-2/1\underbrace{66\ldots66}_{n-1}\ldots|\ge 10^{-5}$$

$$0/\underbrace{00\ldots0}_{n}66\ldots\ge 0/00001\Rightarrow n\le 4$$

۵. گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به رابطه‌ی $\sin^2x+\cos^2x=1$ دنباله‌ی $a_n+b_n=1$ ثابت و همگراست.

۶. گزینه ۲ صحیح است.

$$2n+1-\frac{1}{a_n}=2n+1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}=2n+1-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\frac{1}{n}}$$

$$=n+1-n\sqrt{1+\frac{1}{n}}=n+1-\sqrt{n^2+n}\simeq n+1-(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

در انتهای حل از هم‌ارزی $\sqrt{n^2+an+b}\simeq n+\frac{a}{2}$ استفاده کردیم.

۷. گزینه ۴ صحیح است.

گزینه‌های ۱ و ۳ همگرا به صفر و کران‌دارند.

گزینه ۲ همگرا به ۱ و کران‌دار است.

گزینه ۴ حاصل‌ضرب دو دنباله‌ی مثبت و صعودی n و $\cos\frac{1}{n}$ دنباله‌ای است صعودی.

۸. گزینه ۲ صحیح است.

حد عبارت $3-\frac{bn}{n+c}$ باید برابر ۱ باشد پس $b=2$ است.

$$\lim_{n\to\infty}(3-\frac{2n}{n+c})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2c}{n+c})^n=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2cn}{n+c}}=e^{2c}=\sqrt{e}$$

$$\Rightarrow 2c=\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

۹. گزینه ۲ صحیح است.

تعریف صعودی بودن را می‌نویسیم:

$$a_n\le a_{n+1}\Rightarrow 3^n-n2^{n+1}\le 3^{n+1}-(n+1)2^{n+2}$$

$$\Rightarrow 2\times 3^n\ge 3^{n+1}(2n+2-n)\Rightarrow (\frac{3}{2})^n\ge n+2$$

به ازای $n\ge 5$ نامساوی فوق برقرار است. پس دنباله‌ی $\{a_{n+4}\}$ به ازای $n\ge 1$ صعودی است.

۱۰. گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to 1^+}fof(-\frac{1}{x})=f(f(-1^+))=f(1^-)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}fof(-\frac{1}{x})=f(f(-1^-))=f(2^+)=1$$

اختلاف حد راست و چپ برابر ۳ است.

۱۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)f(-a_n)=f(1^-)f(-1^+)=3\times(-1)=-3$$

۱۲. گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\frac{\sin x}{\cos x})^2}{(\cos x-\sin x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2x(\cos x-\sin x)^2}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2x}=2$$

۱۳. گزینه ۲ صحیح است.

به ازای $x=0$ عبارت داده شده به صورت $\infty\times(-\frac{1}{2}+\frac{a}{6})$ است پس $-\frac{1}{2}+\frac{a}{6}=0$ و $a=3$ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+6})=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{4x}{(x-2)(x+6)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{(x-2)(x+6)}$$

$$=-\frac{4}{12}=-\frac{1}{3}$$

۱۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\frac{-a+\sqrt{4+b}}{0}\Rightarrow\sqrt{4+b}=a$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)\overset{H}{=}\lim_{x\to -1}\frac{a+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+b}}}{2}=\frac{a-\frac{4}{\sqrt{4+b}}}{2}=\frac{a-\frac{4}{a}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a^2-3a-4=0\xrightarrow{a>0}a=4$$

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{ax-2x}{2x}=\frac{a-2}{2}=1$$

۱۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(\tan x-\tan 3x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-\sin 2x}{\cos x\cos 3x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{-2\sin x}{\cos 3x}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

۱۶. گزینه ۱ صحیح است.

$$f(\frac{۲}{x})=\begin{cases}\frac{۴}{x}-۱ & x\in Q\\ \frac{x}{۲} & x\notin Q\end{cases}$$

شرط وجود حد: $\frac{۴}{x}-۱=\frac{x}{۲}\Rightarrow x^{۲}+۲x-۸=۰\Rightarrow x=-۴,۲$

۱۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\frac{۱+a}{۰}\Rightarrow a=-۱ \qquad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)=f(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(bx+۳)=b+۳\Rightarrow ۲=b+۳\Rightarrow b=-۱$$

۱۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$۲\le x<a\Rightarrow ۳\le \frac{۳}{۲}x<\frac{۳}{۲}a$$

برای آنکه تابع در یک نقطه ناپیوسته باشد مقدار $\frac{۳}{۲}a$ حداکثر برابر ۵ است. پس $a=\frac{۱۰}{۳}$

۱۹. گزینه ۴ صحیح است.

$$x^{۳}+x=۲-x\Rightarrow x^{۳}+۲x-۲=۰$$

$$f(x)=x^{۳}+۲x-۲ \qquad f(\frac{۱}{۲})f(۱)=(-\frac{۷}{۸})\times ۱=-\frac{۷}{۸}$$

طبق قضیه‌ی بولزانو معادله‌ی $f(x)=۰$ در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},۱)$ ریشه دارد.

۲۰. گزینه ۱ صحیح است.

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases}۲-x & ۰<x<۱\\ \frac{x+۲}{۲} & ۲<x<۴\end{cases}$$

در بازه‌ی $(۲,۴)$ تابع $f^{-۱}$ پیوسته و صعودی اکید است.

۲۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$y=\frac{x\sin x}{x^{۲}-۱}$$

خطوط $x=-۱$ و $x=۱$ مجانب‌های قائم و خط $y=۰$ مجانب افقی تابع است. محل برخورد مجانب‌ها، نقاط $A(-۱,۰)$ و $B(۱,۰)$ است. طول پاره‌خط AB برابر ۲ است.

۲۲. گزینه ۱ صحیح است.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(۱-۲e^{-x})=۱-۰=۱$$

۲۳. گزینه ۲ صحیح است.

$$y=۲x+\left|x+\frac{۱}{۲}\right|\Rightarrow\begin{cases}y=۳x+\frac{۱}{۲}\Rightarrow m_{۱}=۳\\ y=x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m_{۲}=۱\end{cases}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_{۱}-m_{۲}}{۱+m_{۱}m_{۲}}\right|=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

۲۴. گزینه ۲ صحیح است.

نکته: هم‌ارزی برنولی: $\sqrt[n]{۱+A}\sim ۱+\frac{A}{n}\ (A\to ۰)$

$$y=x\left((۱-\frac{۳}{۳x})-۱\right)=-۱$$

۲۵. گزینه ۳ صحیح است.

چون $|a|$ منفی نیست پس $\frac{۲}{b}$ و در نتیجه b مثبت است پس:

$$|a|<\frac{۲}{b}\Rightarrow |a|<\frac{۲}{|b|}\Rightarrow |ab|<۲\Rightarrow |ab|<\frac{۵}{۲}$$