۱۶. گزینه ۱ چون $x$ و $y$ گویا هستند پس مجموعه $A$ یعنی $x+y\cdot\sqrt{5}$ یک عدد گنگ است. برای هر چهار گزینه مثال نقض می‌آوریم.

$1+2\sqrt{5}\in A\,,\ 1-2\sqrt{5}\in A:(1+2\sqrt{5})+(1-2\sqrt{5})=2\notin A\Rightarrow$ $A$ نسبت به جمع بسته نیست

$1+2\sqrt{5}\in A\,,\ 2+2\sqrt{5}\in A:(1+2\sqrt{5})-(2+2\sqrt{5})=-1\notin A\Rightarrow$ $A$ نسبت به تفریق بسته نیست

$1+2\sqrt{5}\in A\,,\ 1-2\sqrt{5}\in A:(1+2\sqrt{5})(1-2\sqrt{5})=1-20=-19\notin A\Rightarrow$ $A$ نسبت به ضرب بسته نیست

$1+2\sqrt{5}\in A\,,\ 2+4\sqrt{5}\in A:\dfrac{(1+2\sqrt{5})}{(2+4\sqrt{5})}=\dfrac{1}{2}\notin A\Rightarrow$ $A$ نسبت به تقسیم بسته نیست

۱۷. گزینه ۲

$$\frac{a(\sqrt{b}-4)}{\sqrt{2}-2}=4\Rightarrow\frac{a\sqrt{b}-4a}{\sqrt{2}-2}=4\Rightarrow a\sqrt{b}-4a=4\sqrt{2}-8\Rightarrow\begin{cases}a\sqrt{b}=4\sqrt{2}\\ -4a=-8\Rightarrow a=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{b}=4\sqrt{2}\Rightarrow 4b=32\Rightarrow b=8\Rightarrow a+b=8+2=10$$

۱۸. گزینه ۳

اگر طرفین نامساوی را در عددی منفی ضرب و یا تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. لذا داریم:

$$a>b\xrightarrow{\frac{1}{b}<0}\frac{a}{b}<\frac{b}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}<1$$

در نتیجه گزینه **۳** صحیح است.

گزینه‌ی **۲** به ازای $a=-1$ و $b=-2$ برقرار نیست.

گزینه‌ی **۴** به ازای $a=\dfrac{-1}{3}$ و $b=\dfrac{-1}{2}$ برقرار نیست.

گزینه‌ی **۱** به ازای $a=-1$ و $b=-8$ برقرار نیست.

۱۹. گزینه ۱ ابتدا به دلیل وجود $\sqrt{x+1}$ دامنه $x$ به صورت $x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -1$ است.

برای حل معادله طرفین را به توان **۲** می‌رسانیم:

$$x+1<x^2-2x+1\Rightarrow x^2-3x>0\Rightarrow\begin{array}{c|ccccc} & & 0 & & 3 & \\ \hline & + & \phi & - & \phi & +\end{array}\Rightarrow(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$$

$\Rightarrow$ به دلیل دامنه‌ی رادیکال $[-1,0)\cup(3,+\infty)\Rightarrow a+b+c=-1+0+3=2$

۲۰. گزینه ۴ در گزینه‌ی **۱**، توابع $\sin$ همواره کراندار می‌باشند. $-1\leq\sin n!\leq 1$

در گزینه‌ی **۲**، توابع به صورت $\cot^{-1}$ همواره کراندار می‌باشند. $0\leq cot^{-1}\dfrac{n^5}{2n-1}\leq\pi$

در گزینه‌ی **۳**، دنباله داده شده همگراست زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4^{n+1}-5}{2^{2n-1}+3^n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\times4-5}{4^n\times\frac{1}{2}+3^n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\times4^n}{\frac{1}{2}\times4^n}=8$$

دنباله همگراست لذا کراندار خواهد بود.

در گزینه‌ی **۴**، دنباله بی‌کران می‌باشد، زیرا رشد $n^n$ از $n^5$ بیشتر بوده و دنباله به $\infty$ میل کرده و بی‌کران می‌گردد.

۲۱. گزینه ۲ نکته: در دنباله هایی به شکل $\dfrac{a^n}{n!}$ جمله ی $a$ ام و $a-1$ ام بزرگ ترین جمله ها هستند. در این دنباله که در واقع به شکل $\dfrac{9^n}{n!}$ است. جمله‌های **۹** ام و **۸** ام بزرگ ترین ها هستند.

۲۲. گزینه ۲ در دنباله‌های هموگرافیک به صورت $a_n=\frac{an+b}{cn+d}$ ، max , min در اطراف ریشه‌ی مخرج می‌باشند. در نتیجه در دنباله ی $\frac{n+7}{3n-13}$، داریم:

$$3n-13=0\to n=\frac{13}{3}=4/\cdots\Rightarrow\begin{cases}n=4\Rightarrow a_n=-11\\ n=5\Rightarrow a_n=6\end{cases}\Rightarrow 6-(-11)=17$$

۲۳. گزینه ۱

$$[\frac{2n+3}{n+2}]=[\frac{2(n+2)-1}{n+2}]=[2-\frac{1}{n+2}]=2+[\frac{-1}{n+2}]\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(2+[\frac{-1}{n+2}])=2-1=1$$

$$[\frac{n^3+5}{n^3+n}]=[\frac{(n^3+n)-n+5}{n^3+n}]=[1+\frac{-n+5}{n^3+n}]=1+[\frac{-n+5}{n^3+n}]\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}(1+[\frac{-n+5}{n^3+n}])=1+(-1)=0$$

۲۴. گزینه ۴ عبارت داخل رادیکال را به کمک هم ارزی برنولی $\underset{(u\to 0)}{\sqrt[n]{1+u}}\approx 1+u(\frac{1}{n})$ ساده می کنیم.لذا داریم:

$$\lim_{n\to+\infty}3n(\sqrt{\frac{n+5}{n-1}}-1)=\lim_{n\to+\infty}3n(\sqrt{1+\frac{6}{n-1}}-1)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}3n(1+\frac{6}{2(n-1)}-1)=\lim_{n\to+\infty}3n(\frac{6}{2(n-1)})=9$$

۲۵. گزینه ۲ با ساده کردن نامساوی خواهیم داشت:

$$(na_n-3n+7)(na_n-3n+1)\le 0\Rightarrow[n(a_n-3+\frac{7}{n})][n(a_n-3+\frac{1}{n})]\le 0$$

$$\Rightarrow n^2(a_n-3+\frac{7}{n})(a_n-3+\frac{1}{n})\le 0\xrightarrow{n^2\ge 0}[a_n-(3-\frac{7}{n})][a_n-(3-\frac{1}{n})]\le 0\Rightarrow 3-\frac{7}{n}\le a_n\le 3-\frac{1}{n}$$

از آنجا که $\lim_{n\to+\infty}(3-\frac{7}{n})=\lim_{n\to+\infty}(3-\frac{1}{n})=3$، در نتیجه طبق قضیه فشردگی داریم: $\lim_{n\to+\infty}a_n=3$

۲۶. گزینه ۲ از آنجا که جملات دنباله مثبت می باشند، در نتیجه $a_n>0$ . حال با توجه به نامعادله داریم:

$$\frac{1-a_n}{a_n}>n\xrightarrow{a_n>0}1-a_n>na_n\Rightarrow a_n(n+1)<1\Rightarrow a_n<\frac{1}{n+1}\xrightarrow{a_n>0}0<a_n<\frac{1}{n+1}$$

از آنجا که $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ ، لذا طبق قضیه فشردگی $\{a_n\}$ نیز همگرا به عدد صفر می باشد.

۲۷. گزینه ۲

توجه: هرگاه عدد همگرایی، ابتدا یا انتهای بازه باشد، شعاع بازه برابر همان طول بازه است.

$$\text{طول بازه}: \frac{23}{30}-\frac{2}{3}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}\Rightarrow\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{6n+3-6n+4}{9n-6}<\frac{1}{10}\Rightarrow\frac{9n-6}{7}>10\Rightarrow 9n>76\Rightarrow n>\frac{76}{9}\Rightarrow n\ge 9$$

۲۸. گزینه ۴ می‌دانیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\simeq\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{n\cdot a}\right|$$

صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[3]{x^2}$ ضرب می‌کنیم تا فرجه رادیکال با درجه زیر رادیکال برابر شود و بتوانیم از هم‌ارزی رادیکالی در بی نهایت استفاده کنیم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\frac{3}{3\times 1})-(x+\frac{1}{3\times 1})}{x-(x+\frac{3}{1\times 3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-(x+\frac{1}{3})}{x-(x+1)}=-\frac{2}{3}$$

۲۹. گزینه ۲ با توجه به این که $x$ به عدد ۱ میل می‌کند، نمی‌توان از هم‌ارزی استفاده کرد. لذا با توجه به روابط $(\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ ،$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ و $\sin(\pi-\pi x)=\sin\pi x$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi-2\sin^{-1}x}{\sqrt{\sin\pi x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x)}{\sqrt{\sin(\pi-\pi x)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\cos^{-1}x}{\sqrt{\pi(1-x)}}$$

دقت کنید چون $\lim_{x\to 1}(\pi-\pi x)=0$ لذا به کمک هم‌ارزی داریم: $\lim_{x\to 1}\sin(\pi-\pi x)\sim(\pi-\pi x)$ و $\cos^{-1}x\simeq\sqrt{1-x^2}$.

هم ارزی: $\lim_{x\to 1^-}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\pi\times(1-x)}}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{\sqrt{1-x}}\times\sqrt{1+x}}{\sqrt{\pi}\times\cancel{\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 1}2\sqrt{\frac{1+x}{\pi}}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sqrt{\frac{8}{\pi}}$

۳۰. گزینه ۲ با توجه به این که $\lim_{x\to+\infty}[x]\sim x$ و از آن جا که $\lim_{x\to-3}\frac{c}{(x+3)^2}=\infty$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to-3}(x^2-ax+b)[\frac{c}{(x+3)^2}]=\lim_{x\to-3}\frac{c(x^2-ax+b)}{(x+3)^2}=2$$

چون $x=-3$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده و مقدار حد، عددی متناهی است. بنابراین $x=-3$ ریشه‌ی مضاعف صورت نیز خواهد بود. پس می‌توان نوشت:

$$x^2-ax+b=(x+3)^2\Rightarrow\begin{cases}x^2+6x+9=x^2-ax+b\\ c=2\end{cases}\Rightarrow a=-6\ ,\ b=9$$

در نتیجه: $a+b+c=5$

۳۱. گزینه ۱ دنباله‌ی $\{b_n\}$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که علاوه بر آن که همگرا به ۳ است، مقدار $\lim_{n\to+\infty}f(a_n)$ با $\lim_{n\to+\infty}f(b_n)$ متفاوت باشد. با توجه به این که هر چهار گزینه به عدد ۳ همگرا هستند، می‌توان نوشت:

$$f(x)=cos(\frac{1}{x-3})$$

$$\text{گزینه ۱)}\ f(b_n)=\cos(\frac{1}{3+\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{3}}-3})=\cos(2n\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$\text{گزینه ۲)}\ f(b_n)=\cos(\frac{1}{3+\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{6}}-3})=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

گزینه ۳) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{۲\pi}{۳}}-۳})=\cos(۲n\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\cos(\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$

گزینه ۴) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi}-۳})=\cos(۲n\pi)=۱$

حال از آن جا که $f(a_n)=\cos(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$ ، پس با دنباله‌ی ارائه شده در گزینه ۱ برابر است.

۳۲. گزینه ۲ باید هر دو دنباله همگرا به $\sqrt{۲}$ باشند درحالی که تنها در گزینه‌ی ۲، داریم $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} b_n=\sqrt{۲}$ . دقت کنید که در گزینه‌ی (۱)، $b_n$ به صفر همگراست، در گزینه‌ی (۳)، $a_n$ و $b_n$ واگرا بوده و در گزینه‌ی (۴)، $a_n$ و $b_n$ به ترتیب به ۱ و $-۱$ همگرا می‌باشند.

۳۳. گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{f(\sin x)}{g(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۴\sin^۳x-۳\sin x}{(\sin x+\cos x)^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۴\sin^۳x-۳\sin x}{\underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱}+۲\sin x\cos x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۴\sin^۳x-۳\sin x}{۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin x(۴\sin^۲x-۳)}{۲\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۴\sin^۲x-۳}{۲\cos x}=\frac{۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-۳}{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۴. گزینه ۴ با توجه به این‌که: $-۱\le x<۰ : [x]=-۱$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{۱-\sqrt[۳]{\cos x}}{-x^۲}=\frac{۰}{۰}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to۰^-}\frac{-\frac{-\sin x}{۳\sqrt[۳]{\cos^۲x}}}{-۲x}\overset{\sin x\sim x}{=}\lim_{x\to۰^-}\frac{\frac{x}{۳\sqrt[۳]{\cos^۲x}}}{-۲x}=\frac{\frac{۱}{۳\times۱}}{-۲}=\frac{-۱}{۶}$$

۳۵. گزینه ۴ با توجه به اینکه $f(x)=\begin{cases}[۲x]-۱ & x>۰\\ [۲x]+۱ & x<۰\end{cases}$ ، بنابراین کافی است نقاط ناپیوستگی $[۲x]$ را بررسی نماییم. لذا داریم:

$$۲x=k(k\in Z)\Rightarrow x=\frac{k}{۲}\xrightarrow{x\in(-۲,۲)}-۲<\frac{k}{۲}<۲$$

$$\Rightarrow -۴<k<۴\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}\ ,\ -۱\ ,\ -\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۳}{۲}$$

لذا تابع $f(x)$ در مجموع ۶ نقطه ناپیوسته دارد. توجه داشته باشید که $x=۰$ در دامنه قرار ندارد.

۳۶. گزینه ۱ نکته: اگر تابع $f(x)$ در بازه [a,b] پیوسته و صعودی باشد آنگاه تابع $f^{-۱}(x)$ در بازه $[f^{-۱}(a),f^{-۱}(b)]$ پیوسته و صعودی است و بالعکس.

دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر $Df=[۲,۵]$ می باشد. با توجه به اینکه :

$$f^{-}(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}+\frac{۳}{۲\sqrt{۵-x}}>۰$$

در نتیجه $f(x)$ در بازه $[۲,۵]$ اکیداً صعودی و پیوسته است. پس تابع $f^{-۱}(x)$ نیز صعودی اکید بوده و در بازه $[f(۲),f(۵)]$ پیوسته خواهد بود. حال از آنجا که $f(۲)=-۳\sqrt{۳}$ و $f(۵)=۲\sqrt{۳}$ پس $f^{-۱}$ بر بازه $[-۳\sqrt{۳},۲\sqrt{۳}]$ پیوسته است، لذا:

$$\max(\beta-\alpha)=۵\sqrt{۳}$$

۳۷. گزینه ۱ کافی است پیوستگی تابع در نقطه ی صفر بررسی شود. لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin x}{\sqrt{۱-\cos(۴x)}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲(۲x)}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin x}{\sqrt{۲}\,|\sin(۲x)|}$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲\sin x}{-\sqrt{۲}\sin(۲x)}\overset{\text{هم ارزی}}{=\!=\!=}\lim_{x\to ۰^-}\frac{۲x}{-\sqrt{۲}(۲x)}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} a[x+۱]+b=a\cdot(۱)+b=a+b$$

از طرفی $f(۰)=۲a$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)\Rightarrow\begin{cases}۲a=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\\ a+b=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow b=-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\end{cases}\Longrightarrow |a-b|=\left|-\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}\right|=۰$$

۳۸. گزینه ۲ برای آنکه تابع $g(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید عبارت زیر رادیکال تعریف شده باشد، یعنی عبارت داخل رادیکال همواره نامنفی باشد از طرفی می‌دانیم برای آنکه عبارت درجه‌ی دوم همواره نامنفی باشد باید $a>۰\ ,\ \Delta\leq ۰$ باشد.

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow ۱-۴(۳a)\leq ۰\Rightarrow ۱۲a\geq ۱\Rightarrow a\geq\frac{۱}{۱۲}$$

در نتیجه کمترین مقدار $a$ برابر $\frac{۱}{۱۲}$ می باشد.

۳۹. گزینه ۱

$$f(x)=\frac{۱}{x^۲+۲x}=\frac{۱}{x(x+۲)}$$

طبق ضابطه $f(x)$، $x=-۲$ و $x=۰$ مجانب های قائم تابع $f(x)$ می باشد و $y=۰$ نیز مجانب افقی است. حال اگر $-۲<x<۰$ باشد، آن گاه $f(x)<۰$ و اگر $x>۰$ و یا $x<-۲$ آن گاه $f(x)>۰$ خواهد بود و نیز:

یعنی منحنی همواره بالای خط مجانب افقی خود قرار دارد.

$$\textbf{مجانب افقی}: x\to\pm\infty\qquad y=\lim\frac{۱}{x^۲}=\frac{۱}{(\pm\infty)^۲}=۰^+$$

راه دوم: برای محاسبه‌ی شکل تابع در اطراف مجانب قائم، می‌توانیم به ازای ریشه‌ی مخرج حد چپ و حد راست را محاسبه کنیم و می‌دانیم مجانب افقی منحنی $y=۰$ است پس گزینه‌ی **۲** غلط است.

$$\text{مجانب قائم}\qquad x=۰\Rightarrow\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x\cdot(x+۲)}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

از راست که به مجاب قائم نزدیک شویم به بالا می‌رویم پس گزینه‌ی **۱** صحیح است.

۴۰. گزینه ۳ نکته: مجانب مایل منحنی $y=(mx+h)\cdot\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}}$ خط $y=mx+h+\frac{a-b}{n}\times m$ می‌باشد.

$$y=(۲x-۱)\cdot\sqrt{\frac{x+۳}{x-۳}}\xrightarrow{\text{خط مجانب مایل}}y=۲x-۱+\frac{۳-(-۳)}{۲}\times ۲\Rightarrow y=۲x+۵\quad\text{خط مجانب مایل}$$

بنابراین مجانب مایل منحنی، $y=۲x+۵$ است. از طرفی $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=+\infty$ بنابراین $x=۳$ نیز مجانب قائم تابع می باشد. در نتیجه محل تلاقی دو مجانب برابر $(۳,۱۱)$ خواهد بود که فاصله ی آن از مبدأ برابر $\sqrt{۱۳۰}=\sqrt{۳^۲+۱۱^۲}$ می‌باشد.