۲۱. گزینه ۱

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{a+(-۱)^{[x]}}{x^۲-۴}=\dfrac{a+۱}{۰^+}=+\infty\Rightarrow a+۱>۰\Rightarrow a>-۱\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{a+(-۱)^{[x]}}{x^۲-۴}=\dfrac{a-۱}{۰^-}=+\infty\Rightarrow a-۱<۰\Rightarrow a<۱\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک می‌گیریم}}-۱<a<۱$$

۲۲. گزینه ۱

نکته: $\lim\limits_{u\to ۰}\dfrac{\sin u}{u}=۱\ ,\ \dfrac{\sin u}{u}<۱$

$$\lim_{x\to ۰}\left[f(\frac{۱}{x})\right]=\lim_{x\to ۰}\left[\frac{۱}{x}\sin x\right]=\lim_{x\to ۰}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=[۱^-]=۰$$

۲۳. گزینه ۴ تابع f در نقاطی حد دارد که $\sqrt{۱-x}=x+۵$ باشد بنابراین:

$$۱-x=x^۲+۱۰x+۲۵\Rightarrow x^۲+۱۱x+۲۴=۰\Rightarrow (x+۳)(x+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\x=-۸\end{cases}$$

چون به ازای $x=-۸$ عبارت $x+۵$ منفی می‌شود، پس غیر قابل قبول است پس $a=-۳$ است.

$$\lim_{x\to(-۳)^+}g(x)=\frac{۱}{-۳}=-\frac{۱}{۳}$$

تذکر: در توابع به فرم $f(x)=\begin{cases}h(x) & x\in Z\\ g(x) & x\notin Z\end{cases}$، برای هر $a\in R$ داریم: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$. زیرا وقتی $x\to a$، آنگاه $x\neq a$ و در نتیجه متغیر x همواره غیر صحیح است.

۲۴. گزینه ۱

$$\frac{۶n+۱}{۲n-۱}=\frac{۳(۲n-۱)+۴}{۲n-۱}=۳+\frac{۴}{۲n-۱}\to\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{۶n+۱}{۲n-۱}=۳\\ \dfrac{۶n+۱}{۲n-۱}>۳\end{cases}$$

چون این دنباله همگرا به ۳ و نزولی است، پس از ۳^+ به ۳ نزدیک می‌شود.

بنابراین باید $\lim\limits_{x\to ۳^+}f(x)=۳$ باشد:

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۲ax-[x])=۶a-[۳^+]=۶a-۳=۳\Rightarrow a=۱$$

۲۵. گزینه ۲

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}۲n\sin\frac{۱}{n}=\lim_{n\to\infty}۲\frac{\sin\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=۲\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{x\to ۲}f(x)=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}fof(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(f(a_n))=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{x^۲-۴x+۴}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{x^۲}=۱$$

۲۶. گزینه ۳ ابتدا عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم و سپس $\cos ۲x$ را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم:

می‌دانیم $\cos ۲x=\dfrac{۱-\tan^۲x}{۱+\tan^۲x}$، پس داریم:

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\sqrt{-\tan x}-۱}{\cos ۲x} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{-\tan x-۱}{\frac{(۱-\tan x)(۱+\tan x)}{(۱+\tan^۲ x)}\cdot(\sqrt{-\tan x}+۱)} = \frac{-۱}{\frac{۲}{۲}\times ۲} = -\frac{۱}{۲}$$

دقت کنید اگر عبارتی در ضرب سایر عبارت قرار گیرد و مقدار آن صفر نشود، می‌توانیم در هر جای مسئله مقدار آن را جایگزین کنید.

توجه: این تست از هوپیتال نیز به راحتی حل خواهد شد.

۲۷. گزینه ۳

می‌دانیم: $\boxed{۱+\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha \ , \ \cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha}$

$$۱+\cos(۲\sin^{-۱}x) = ۲\cos^۲(\sin^{-۱}x) = ۲-۲\sin^۲(\sin^{-۱}x) = ۲-۲x^۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{۱+\cos(۲\sin^{-۱}x)}{۱-x} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲-۲x^۲}{۱-x} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲(۱-x)(۱+x)}{۱-x} = ۴$$

توجه: این تست به روش هوپیتال هم به راحتی قابل حل است.

۲۸. گزینه ۳ در نقطه‌ی $x=۲$ حاصل صورت کسر برابر صفر است، در حالیکه حاصل حد مخالف صفر است، پس مخرج نیز باید صفر باشد.

$$x=۲ \Rightarrow ۲x^۲+ax-۴=۰ \Rightarrow ۸+۲a-۴=۰ \Rightarrow a=-۲$$

راه‌حل اول: برای محاسبه حد با گویا کردن صورت کسر عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$b=\lim_{x\to ۲} \frac{(x+۱-\sqrt{۴x+۱})(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}{(۲x^۲-۲x-۴)\underbrace{(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}_{۶}} = \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۲x}{۶(x-۲)(۲x+۲)} = \frac{۱}{۱۸}$$

راه‌حل دیگر:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{(x+۱)-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲-۲x-۴} = b$$

چون حد از نوع $\frac{۰}{۰}$ و صورت و مخرج مشتق‌پذیرند، لذا برای محاسبه‌ی حد می‌توان از روش هوپیتال استفاده کرد:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۱-\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}}{۴x-۲} = \frac{۱-\frac{۲}{\sqrt{۹}}}{۶} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۶} = \frac{۱}{۱۸}$$

۲۹. گزینه ۳

از تبدیلات جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-۲\sin ۲x \times \sin x}}{۲\sin x\cos ۲x} = \frac{\sqrt{-۲(۲\sin x\cos x)\sin x}}{۲\sin x\cos ۲x} = \frac{\sqrt{-\sin^۲ x\cos x}}{\sin x\cos ۲x}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \frac{|\sin x|\sqrt{-\cos x}}{\sin x\cos ۲x} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{-\sqrt{-\cos x}}{\cos ۲x} = -۱$$

۳۰. گزینه ۴

براي رفع ابهام دو راه‌حل ارائه مي‌كنيم.

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{x+۲}}{x+\frac{۲}{x}-۳} = \frac{۰}{۰}$$

راه‌حل اول: (هوپیتال)

$$\lim_{x\to ۲} \frac{۱-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}}{۱-\frac{۲}{x^۲}} = \frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۲}$$

راه حل دوم (حذف عامل صفر کننده):

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{x+۲}}{\frac{۱}{x}(x^۲-۳x+۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}{\frac{۱}{x}(x^۲-۳x+۲)(x+\sqrt{x+۲})} = \lim_{x\to ۲} \frac{x}{x+\sqrt{x+۲}} \times \lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۳x+۲}$$

$$=\frac{۲}{۴}\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x-۱)}=\frac{۲}{۴}\times\frac{۳}{۱}=\frac{۳}{۲}$$

۳۱. گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۱}(x^۲-\sqrt{x})\left[\frac{۱}{x-۱}\right]+\lim_{x\to ۱}\underbrace{(x^۲-\sqrt{x})}_{۰}\underbrace{\sin\frac{۱}{x-۱}}_{\text{کراندار}}=\lim_{x\to ۱}(x^۲-\sqrt{x})\left[\frac{۱}{x-۱}\right]+۰$$

چون داخل براکت ∞ می‌شود پس براکت را حذف می‌کنیم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-\sqrt{x}}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}\quad H:\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱}=۲-\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۳۲. گزینه ۳

ابتدا فرض می‌کنیم $\cos x=t$ بنابراین: $\lim\limits_{x\to ۰}\cos x=\lim\limits_{t\to ۱^-}t$

$$\lim_{x\to ۰}f(\cos x)=\lim_{t\to ۱^-}f(t)=\lim_{t\to ۱^-}\frac{|t-\sqrt[۳]{t}|}{t-۱}=\lim_{t\to ۱^-}\frac{\sqrt[۳]{t}-t}{t-۱}\overset{H}{=}\lim_{t\to ۱^-}\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^۲}}-۱}{۱}=\frac{۱}{۳}-۱=-\frac{۲}{۳}$$

نکته: برای $۰<x<۱$ داریم: $\begin{cases}x^n<x\\ \sqrt[n]{x}>x\end{cases}$ و برای $x>۱$ داریم: $\begin{cases}x^n>x\\ \sqrt[n]{x}<x\end{cases}$

۳۳. گزینه ۴

راه اول: روش هم‌ارزی

$$\lim_{x\to ۱}\cot\pi x\cdot\cos(\frac{\pi}{۲}x)=\infty\times ۰\ \text{مبهم}$$

$$\frac{\text{عامل صفرکننده}}{\text{عکس عامل بی‌نهایت کننده}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}x)}{\tan(\pi x)}=\lim_{x\to ۱}-\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}x)}{\tan(\pi-\pi x)}=\lim_{x\to ۱}-\frac{\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}x}{\pi-\pi x}=-\frac{۱}{۲}$$

راه دوم (هوپیتال):

$$\lim_{x\to ۱}\cot(\pi x)\cdot\cos(\frac{\pi}{۲}x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}x)}{\tan(\pi x)}=\div\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to ۱}\frac{-\frac{\pi}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}x)}{\pi(\tan^۲(\pi x)+۱)}=\frac{-\frac{\pi}{۲}}{\pi}=-\frac{۱}{۲}$$

۳۴. گزینه ۲

ابتدا عبارت را با مخرج مشترک‌گيري ساده مي کنيم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۲)-a(x+۱)}{x(x+۱)(x+۲)}=b\quad *$$

چون حد مخرج کسر صفر است،باید حد صورت هم صفر باشد، (زیرا در غیر این صورت حاصل حد عدد حقیقی نمی‌شود):

$$\lim_{x\to ۰}(x+۲)-a(x+۱)=۰\Rightarrow ۲-a=۰\Rightarrow a=۲$$

با جايگذاري در (*) داريم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+۲-۲x-۲}{x(x+۱)(x+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(x+۱)(x+۲)}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

در نتیجه: $a\cdot b=-۱$

۳۵. گزینه ۳

$$\sin 100^\circ = \sin(90+10) = \cos 10^\circ$$

$$1-8\sin 10\cos^2 10 = 1-4(2\sin 10\cos 10)\cos 10 = 1-4\sin 20\cos 10 = 1-4\times\frac{1}{2}(\sin 30+\sin 10)$$

$$= 1-1-2\sin 10 = -2\sin 10$$

نکته:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

روابط تبدیل ضرب به جمع:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

۳۶. گزینه ۴

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow \tan(\frac{3\pi}{4}-\alpha) = \frac{-1-\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = 2$$

$$\tan\alpha+1 = 2\tan\alpha-2 \Rightarrow \tan\alpha = 3 \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \cos 2\alpha = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

۳۷. گزینه ۲

$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} \Rightarrow \tan 35+\tan 20 = \frac{\sin 55}{\cos 35\cos 20} = \frac{\sin(90-35)}{\cos 35\cos 20} = \frac{\cos 35}{\cos 35\cos 20} = \frac{1}{\cos 20}$$

$$A = \frac{1}{\cos 20}\times\sin 20 = \tan 20 \Rightarrow \frac{\tan 20}{\tan 20} = 1$$

توجه: اگر مجموع دو زاویه 90° باشد آن دو زاویه متمم یکدیگرند:

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta\ ,\ \tan\alpha = \cot\beta$$

۳۸. گزینه ۳

می‌دانیم که: $80+10 = 90 \Rightarrow \sin 80 = \cos 10$

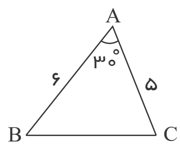
$$\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\sin 80^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2}\cos 10^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 30\cdot\cos 10-\cos 30\cdot\sin 10)}{\sin 10\cdot\cos 10} = \frac{2\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4$$

نکات:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

۳۹. گزینه ۲



$$\hat{B}+\hat{C}+\hat{A} = 180 \to \hat{A} = 180-(B+C) = 180-150 = 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin A \Rightarrow S = \frac{1}{2}\times 5\times 6\times\sin 30^\circ = \frac{15}{2}$$

۴۰. گزینه ۴

$$x+y=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \sin(x+y)=\frac{۱}{۲}, \cos(x+y)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\frac{۲\sin(x-y)+۱}{\sqrt{۳}-۲\cos(x-y)}=\frac{۲\left(\sin(x-y)+\frac{۱}{۲}\right)}{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\cos(x-y)\right)}=\frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}$$

$$=\frac{۲\sin x\cos y}{-۲\sin x\sin y}=\frac{\cos y}{-\sin y}=-\cot y$$