۲۱. گزینه ۴ توجه: هرگاه عدد همگرایی وسط بازه باشد آنگاه فاصله‌ی وسط تا دو سر بازه، شعاع همسایگی است.

شعاع بازه‌ی $(2/9, 3/1)$ برابر $0/1$ و مرکز بازه برابر عدد ۳ است. از طرفی طبق رابطه ی $\cos n\pi = (-1)^n$ داریم:

$$\left|\frac{3n+\cos n\pi}{n+1}-3\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{3n+(-1)^n}{n+1}-3\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{فرد } n: \left|\frac{3n-1}{n+1}-3\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{4}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n+1}{4} > 10 \Rightarrow n > 39 \\ \text{زوج } n: \left|\frac{3n+1}{n+1}-3\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n+1}{2} > 10 \Rightarrow n > 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{فرد } n: \text{داخل بازه } n > 39 \Rightarrow \text{خارج بازه } = \{1,3,5,\cdots,39\} \Rightarrow n_1 = \frac{39-1}{2}+1 = 20 \\ \text{زوج } n: \text{داخل بازه } n > 19 \Rightarrow \text{خارج بازه } = \{2,4,\cdots,18\} \Rightarrow n_2 = \frac{18-2}{2}+1 = 9 \end{cases} \Rightarrow n = 29$$

۲۲. گزینه ۴ به ازای $n \geq 4$ دنباله $\{a_n\}$ به دنباله‌ی ثابت $\{0\}$ تبدیل می‌شود و در دنباله‌ی ثابت، مقدار M به ε بستگی ندارد.

$$\forall \varepsilon > 0 \,,\ \exists M \in N:\ n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$$M = 4 \quad L = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in N:\ n \geq 4 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \xrightarrow{a_n = 0} \text{همواره } |0| < \varepsilon (\varepsilon > 0)$$

۲۳. گزینه ۲ با استفاده از هم ارزی رادیکالی داریم:

$$5 - 3n + \sqrt{9n^2 + kn + 6} \xlongequal{\text{هم ارزی}} 5 - 3n + 3\underbrace{\left|n + \frac{k}{18}\right|}_{+} = 5 - 3n + 3n + \frac{k}{6} = 4 \Rightarrow k = -6$$

۲۴. گزینه ۴

$$\text{گزینه ۱})\log_{10}^{\frac{1}{n}} = \log_{10}^{n^{-1}} = -\log_{10}^{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} -\log_{10}^{n} = -\infty \Rightarrow \text{دنباله واگرا}$$

$$\text{گزینه ۲})-1 \leq \cos n \leq 1 \xrightarrow{n>0} -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow [\frac{\cos n}{n}] = 0, -1 \Rightarrow \text{دنباله واگرا}$$

$$\text{گزینه ۳})(-1)^n = \pm 1 \Rightarrow [\frac{(-1)^n}{n}] = 0, -1 \Rightarrow \text{دنباله واگرا}$$

$$\text{گزینه ۴})n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0^+ \Rightarrow -\frac{3}{n} \to 0^- \Rightarrow [-\frac{3}{n}] = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1-[-\frac{3}{n}]} = \frac{2}{1-(-1)} = 1$$

۲۵. گزینه ۳ می‌دانیم $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = (-1)^n$ بنابراین:

$$\left[\frac{\cos n\pi + \sin n\pi}{n}\right] = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \begin{cases} \text{فرد } n \Rightarrow -1 \\ \text{زوج } n \Rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \text{واگرا}$$

در دنباله‌ی دوم داریم:

$$\frac{n \sin n!}{n^3+4} = \frac{n \sin n!}{n^3} = \frac{\sin n!}{n^2} \Rightarrow \text{رشد مخرج بیش‌تر است و دنباله به صفر همگراست}$$

۲۶. گزینه ۴ چون داخل براکت، ∞ شده است، براکت را حذف می‌کنیم.

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n}{3}\right] - \frac{n^3}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} - \frac{n^3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} - n^2 = -\infty \ \text{واگرا}$$

۲۷. گزینه ۳

$$\text{تشریح گزینه‌ی ۳ :}\begin{cases} \text{فرد } n = \{0\} \\ \text{زوج } n = \dfrac{n}{n^2+2} \Rightarrow \text{همگرا به صفر} \end{cases} \Rightarrow \text{کران‌دار است}$$

گزینه‌ی ۱)
$$\lim_{n\to+\infty} n\cos n\pi = \lim_{n\to+\infty} n(-1)^n = \begin{cases} \textbf{زوج } n \to \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \textbf{فرد } n \to \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \textbf{بی‌کران}$$

گزینه‌ی ۲)
$$\lim_{n\to+\infty} \log^n = +\infty \Rightarrow \textbf{بی‌کران}$$

گزینه‌ی ۴)
$$\lim_{n\to+\infty} (-3)^n = \begin{cases} \textbf{زوج } n \to \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \\ \textbf{فرد } n \to \lim_{n\to+\infty} -3^n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \textbf{بی‌کران}$$

۲۸. گزینه ۲ نکته: در دنباله هایی به شکل $\frac{a^n}{n!}$ جمله ی a ام و $a-1$ ام بزرگ ترین جمله ها هستند. در این دنباله که در واقع به شکل $\frac{9^n}{n!}$ است. جمله‌های ۹ ام و ۸ ام بزرگ ترین ها هستند.

۲۹. گزینه ۳ گزینه های ۱ و ۲ و ۴ به نوعی همان قضیه وایر اشتراس هستند.
گزینه ی (۳) همواره برقرار نمی باشد. به عنوان مثال دنباله ی $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ همگرا به عدد صفر است لذا کراندار نیز می باشد ولی غیریکنوا نیز می باشد.

۳۰. گزینه ۱

می‌دانیم: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \cdots + \binom{n}{n}b^n$

بنابراین جمله عمومی دنباله از بسط عبارت $(1+\frac{k}{n})^n$ بدست آمده است.

پس داریم:

$$an = (1+\frac{k}{n})^n$$

و می‌دانیم:

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{k}{n})^n = e^k$$

در نتیجه: $e^k = e^1 \Rightarrow k = 1$

۳۱. گزینه ۴ چون $-1 \le \cos x \le 1$ قرار دارد پس $0 \le \sqrt{\cos x} \le 1$ می‌باشد و می‌دانیم اعدادی که بین صفر و یک قرار دارند جذرشان از خودشان بزرگتر می‌شود یعنی:

$$\sqrt{\cos x} > \cos x \Rightarrow \cos x - \sqrt{\cos x} < 0 \Rightarrow \sqrt{\underbrace{\cos x - \sqrt{\cos x}}_{\text{منفی است}}} \text{ حد وجود ندارد}$$

۳۲. گزینه ۳ با توجه به این که برای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $[u+k] = [u]+k$ ، لذا داریم:

$$f(x) = g(x) = 4 + [-x^2]$$

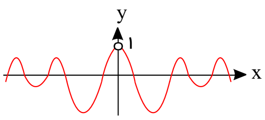
برای بررسی حد چپ تابع gof در $x=1$ ، ضابطه ی تابع را در بازه ی $(0,1)$ بررسی می کنیم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow -1 < -x^2 < 0 \Rightarrow [-x^2] = -1 \Rightarrow f(x) = 4 + [-x^2] = 4 - 1 = 3$$

توجه داشته باشید که عدد بدست آمده یک عدد مطلق است چون جواب جزء صحیح همواره یک عدد مطلق است.

$$\Rightarrow (gof)(x) = g(3) = 4 + [-9] = -5 \Rightarrow (gof)(x) = -5 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} (gof)(x) = -5$$

۳۳. گزینه ۴ باتوجه به شکل تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ داریم:



$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱^-$$

چون a_n نزولی اکید و همگرا به صفر است پس داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = ۰^+$$

$$\lim_{n\to+\infty}[g(a_n)] = [g(۰^+)] = [\frac{-۱}{f(۰^+)}] = \lim_{x\to ۰^+}[\frac{-۱}{f(x)}] = \lim_{x\to ۰^+}[\frac{-۱}{\frac{\sin x}{x}}] = [\frac{-۱}{۱^-}] = [-(۱^+)] = [(-۱)^-] = -۲$$

۳۴. گزینه ۳

برای محاسبه‌ی حد $f(a_n)$ ابتدا حد a_n را بطور کامل و دقیق می یابیم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{۲n} = \frac{۱}{۲}$$

و سپس برای تعیین $\frac{۱}{۲}^+$ یا $\frac{۱}{۲}^-$ می توانیم بجای n عدد دلخواه ۱۰ قرار دهیم و جاصل را با $\frac{۱}{۲}$ مقایسه کنیم.

بنابراین حد عدد a_n $\frac{۱}{۲}^-$ است.

$$n=۱۰ \to a_n = \frac{۱۰+۱}{۲(۱۰)+۳}=\frac{۱۱}{۲۳}<\frac{۱}{۲}$$

در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}\frac{\overbrace{|(۲x-۱)(x-۱)|}^{+}}{\sqrt{۲x}-۱}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}\frac{(۲x-۱)(x-۱)(\sqrt{۲x}+۱)}{۲x-۱} = (\frac{۱}{۲}-۱)(\sqrt{۱}+۱)=-۱$$

۳۵. گزینه ۳ باید هر دو دنباله به عدد ۱ همگرا بوده و در ضمن $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ و $\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ با یکدیگر برابر نباشند. گزینه‌های (۲) و (۳) و (۴) همگرا به ۱ می باشند. لذا داریم:

گزینه ۲) $f(a_n)=\sin(\frac{\pi}{۱+\frac{۱}{n}-۱})=\sin(n\pi)=۰\ ,\ f(b_n)=\sin(\frac{\pi}{۱-\frac{۱}{n}-۱})=\sin(-n\pi)=۰$

گزینه ۳) $f(a_n)=\sin(n\pi)=۰\ ,\ f(b_n)=\sin(\frac{\pi}{۱+\frac{۱}{۲n+\frac{۱}{۲}}-۱})=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=\sin(\frac{\pi}{۲})=۱$

گزینه ۴) $f(a_n)=\sin(n\pi)=۰\ ,\ f(b_n)=\sin(\frac{\pi}{۱+\frac{۱}{n+۱}-۱})=\sin(n\pi+\pi)=۰$

با توجه به این که در گزینه ۳، $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ با $\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ متفاوت است.

۳۶. گزینه ۱ دنباله‌ی $\{b_n\}$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که علاوه بر آن که همگرا به ۳ است، مقدار $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ با $\lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ متفاوت باشد. با توجه به این که هر چهار گزینه به عدد ۳ همگرا هستند، می‌توان نوشت:

$$f(x)=cos(\frac{۱}{x-۳})$$

گزینه ۱) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi-\frac{\pi}{۳}}-۳})=\cos(۲n\pi-\frac{\pi}{۳})=\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$

گزینه ۲) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۶}}-۳})=\cos(۲n\pi+\frac{\pi}{۶})=\cos(\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

گزینه ۳) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{۲\pi}{۳}}-۳})=\cos(۲n\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\cos(\frac{۲\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$

گزینه ۴) $f(b_n)=\cos(\frac{۱}{۳+\frac{۱}{۲n\pi}-۳})=\cos(۲n\pi)=۱$

حال از آن جا که $f(a_n)=\cos(\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$ ، پس با دنباله‌ی ارائه شده در گزینه ۱ برابر است.

۳۷. گزینه ۲ با توجه به این که x به عدد ۱ میل می‌کند، نمی‌توان از هم‌ارزی استفاده کرد. لذا با توجه به روابط ($\cos^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}-\sin^{-۱}x$)، $\sin^{-۱}x+\cos^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}$ و $\sin(\pi-\pi x)=\sin\pi x$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to۱^-}\frac{\pi-۲\sin^{-۱}x}{\sqrt{\sin\pi x}}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۲(\frac{\pi}{۲}-\sin^{-۱}x)}{\sqrt{\sin(\pi-\pi x)}}=\lim_{x\to۱^-}\frac{۲\cos^{-۱}x}{\sqrt{\pi(۱-x)}}$$

دقت کنید چون $\lim_{x\to۱}(\pi-\pi x)=۰$ لذا به کمک هم‌ارزی داریم: $\sin(\pi-\pi x)\sim(\pi-\pi x)$ و $\cos^{-۱}x\simeq\sqrt{۱-x^۲}$.

هم ارزی: $\lim_{x\to۱^-}\frac{۲\sqrt{۱-x^۲}}{\sqrt{\pi\times(۱-x)}}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to۱}\frac{۲\cancel{\sqrt{۱-x}}\times\sqrt{۱+x}}{\sqrt{\pi}\times\cancel{\sqrt{۱-x}}}=\lim_{x\to۱}۲\sqrt{\frac{۱+x}{\pi}}=۲\sqrt{\frac{۲}{\pi}}=\sqrt{\frac{۸}{\pi}}$

۳۸. گزینه ۲

با استفاده از هم ارزی $\cos x\sim۱-\frac{x^۲}{۲}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\sqrt{\cos x-\cos^۲x}}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{x^۲}{۲})^۲}}$$

حال به کمک هم ارزی برنولی $\sqrt{۱+u}\sim۱+\frac{u}{۲}$ وقتی $u\to۰$ در مخرج کسر داریم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\sqrt{۱-\frac{x^۲}{۲}-(۱-\frac{x^۲}{۲})^۲}}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{(۱-\frac{x^۲}{۴})-(۱+\frac{x^۴}{۴}-x^۲)}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۲}{\frac{۳}{۴}x^۲-\frac{۱}{۴}x^۴}=\lim_{x\to۰}\frac{۱}{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴}x^۲}=\frac{۴}{۳}$$

۳۹. گزینه ۲ با توجه به این که $\lim_{x\to+\infty}[x]\sim x$ و از آن جا که $\lim_{x\to-۳}\frac{c}{(x+۳)^۲}=\infty$ ، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to -۳}(x^۲-ax+b)[\frac{c}{(x+۳)^۲}]=\lim_{x\to -۳}\frac{c(x^۲-ax+b)}{(x+۳)^۲}=۲$$

چون $x=-۳$ ریشه‌ی مضاعف مخرج بوده و مقدار حد، عددی متناهی است. بنابراین $x=-۳$ ریشه‌ی مضاعف صورت نیز خواهد بود. پس می توان نوشت:

$$x^۲-ax+b=(x+۳)^۲\Rightarrow\begin{cases}x^۲+۶x+۹=x^۲-ax+b\\ c=۲\end{cases}\Rightarrow a=-۶\ ,\ b=۹$$

در نتیجه: $a+b+c=۵$

۴۰. گزینه ۱ راه اول: می‌دانیم: $\lim_{x\to ۰}\ \tan\ x\sim x$, $\cos a-\cos b=-۲\sin\frac{a+b}{۲}\cdot\sin\frac{a-b}{۲}$

توجه : $\lim_{x\to ۰}\sqrt{\cos ۴x}+\sqrt{\cos ۶x}=۱+۱=۲$ = مخرج

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{\sqrt{\cos ۴x}-\sqrt{\cos ۶x}}{x\tan x}\times\frac{\sqrt{\cos ۴x}+\sqrt{\cos ۶x}}{\sqrt{\cos ۴x}+\sqrt{\cos ۶x}})$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۴x-\cos ۶x}{۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin(\frac{۴x+۶x}{۲})\sin(\frac{۴x-۶x}{۲})}{۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x\sin x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۵x\times x}{x^۲}=۵$$

راه دوم: این تست را می‌توان ابتدا از هم‌ارزی مثلثاتی و سپس با هم‌ارزی برنولی حل کرد.

۴۱. گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\tan ۲x\cdot\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\infty\times ۰\ \text{مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام}:\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan(\frac{\pi}{۴}-x)}{\cot ۲x}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}\xrightarrow{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\pi}{۴}-x}{\cot ۲x}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$HOP:\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{-۲(۱+\cot^۲ ۲x)}=\frac{۱}{۲(۱+۰)}=\frac{۱}{۲}$$

۴۲. گزینه ۴ با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۰^+}\cot x=+\infty$ و $\lim_{x\to ۰^-}\cot x=-\infty$ ، لذا می توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱+۲^{\cot x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱+۲^{-\infty}}=\frac{۱}{۱+۰}=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۱+۲^{\cot x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{۱+۲^{+\infty}}=\frac{۱}{۱+\infty}=۰$$

از آنجا که حد چپ و راست تابع در $x=۰$ برابر نیست لذا حد وجود ندارد.

یادآوری: $\boxed{|a|>۱\to\begin{cases}a^{+\infty}=+\infty\\ a^{-\infty}=۰\end{cases}}$

۴۳. گزینه ۴ برای اینکه $\lim_{x\to -\infty}f(x)$ را حساب کنیم، کافی است $\lim_{x\to ۱^-}f(\frac{x}{x-۱})$ را بدست آوریم زیرا وقتی $x\to ۱^-$ می‌رود داریم

$\frac{x}{x-۱}=\frac{۱^-}{۱^--۱}=-\infty$. لذا داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{|\tan\pi x|}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\tan\pi x}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱^-}\frac{-\pi(۱+\tan^۲\pi x)}{۲x}=-\frac{\pi}{۲}$$

۴۴. گزینه ۴ می‌دانیم: $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+\cdots}\simeq\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{n\cdot a}\right|$

به کمک هم‌ارزی رادیکال‌ها در بی‌نهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}-۲\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}+x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}-۲x)$$

$$\xlongequal{\text{هم ارزی}}\lim_{x\to+\infty}(|x+\frac{۱}{۲}|+|x-۱|-۲x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\frac{۱}{۲})+x-۱-۲x=\frac{۱}{۲}-۱=-\frac{۱}{۲}$$

۴۵. گزینه ۱

چون داخل جزء صحیح، عددی صحیح می‌شود، نمی‌توان از هم‌ارزی استفاده کرد و نیاز به بررسی بیشتری دارد.

$$\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x-۱}{x+۴}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲x+۸-۹}{x+۴}]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{۲(x+۴)-۹}{x+۴}]=\lim_{x\to+\infty}[۲-\frac{۹}{x+۴}]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}۲+\left[-\frac{۹}{x+۴}\right]=۲+[۰^{-}]=۲+(-۱)=۱$$