حسین شفیع زاده ۱

۱.گزینه ۴

می‌دانیم $\sin\alpha = ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\ ,\ ۱+\cos\alpha = ۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}$

$$\cot\alpha + \frac{۱}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{۱}{\sin\alpha} = \frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}} = \cot\frac{\alpha}{۲}$$

۲.گزینه ۳

ابتدا از روی ضابطه‌ی توابع $f(x)$ و $gof(x)$، ضابطه $g(x)$ را یافته، سپس ضابطه fog را می یابیم.

$$f(x) = ۲x+۳$$
$$g(f(x)) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$
$$g(۲x+۳) = ۸x^۲ + ۲۲x + ۲۰$$
$$۲x+۳ = t \to x = \frac{t-۳}{۲} \to g(t) = ۲(t^۲ - ۶t + ۹) + ۱۱(t-۳) + ۲۰ \to g(x) = ۲x^۲ - x + ۵$$
$$(fog)(x) = ۲(۲x^۲ - x + ۵) + ۳ = ۴x^۲ - ۲x + ۱۳$$

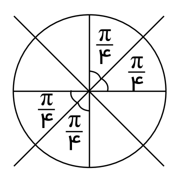
۳.گزینه ۴ هر تابع با معکوسش در $y=x$ متقاطع هستند، بنابراین داریم:

$$y = x \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = x \Rightarrow x^۲ + x + ۱ = ۰$$
$\Rightarrow \Delta = ۱ - ۴ = -۳ < ۰ \Rightarrow$ غیرمتقاطع

۴.گزینه ۲

می‌دانیم $\boxed{\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x}$

$$\frac{\sin ۳x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x \to \frac{-۴\sin^۳ x + ۳\sin x}{\sin x} = ۲\cos^۲ x \to \frac{\sin x(-۴\sin^۲ x + ۳)}{\sin x} = ۲(۱-\sin^۲ x)$$
$$\to -۲\sin^۲ x = -۱ \to \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \to \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin(\pm\frac{\pi}{۴})$$
$$x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$



۵.گزینه ۱

$$g(x) = ۲x - ۱ \xrightarrow{x=۱} g(۱) = ۱\ (*)$$
$$fog(x) = f(g(x)) = f(۲x-۱) = ۴x^۲ - ۱ \xrightarrow{x=۱} fog(۱) = ۳ \xrightarrow{(*)} f(۱) = ۳$$
$$gof(۱) = g(f(۱)) = g(۳) = ۵$$

۶.گزینه ۲ نکته: می‌دانیم اگر تابع f معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a)=b$ آن‌گاه خواهیم داشت: $f^{-۱}(b) = a$

با توجه به نکته بالا داریم: $g^{-۱}(۱) = ۴ \ \to\ g(۴) = ۱ \quad (*)$

حال اگر در عبارت داده شده به جای x مقدار $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(۴x) = ۳ + ۲g\left(\frac{۲}{x}\right) \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} f(۲) = ۳ + ۲g(۴) \xrightarrow{(*)} f(۲) = ۳ + ۲\times ۱ = ۵ \Rightarrow f^{-۱}(۵) = ۲$$

۷.گزینه ۳

تابع براي $x > 0$ صعودي اكيد است، پس معكوس‌پذير است.

$$\underset{x>0}{f'(x)} = 1 + \frac{2}{x^2} > 0$$

$$y = x - \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 - yx - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{y^2+8}}{2}$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+8}}{2}$$

پس $f^{-1}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+8}}{2}$ غیرقابل قبول است.

روش دوم: می دانیم که اگر $f \in \left. A \right| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ باشد در اینصورت $f^{-1} \in \left. A' \right| \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}$ می باشد.

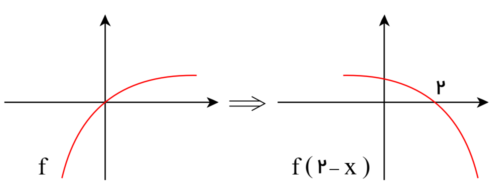
$$A \left| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right. \in f \rightarrow A' \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \in f^{-1} \rightarrow$$ **گزینه های ۱ و ۲ رد میشوند**

از طرفی می دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$، در نتیجه برد تابع اصلی را می یابیم:

$$\underset{x>0}{f(x)} = x - \frac{2}{x} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

۸.گزینه ۱

ابتدا نمودار $f(x)$ و $f(2-x)$ را رسم می کنیم.



		۰		۲	
$f(2-x)$	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
$xf(2-x)$	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow D_g = [0\,,\,2]$$

۹.گزینه ۴

ابتدا صورت کسر را ساده می‌کنیم:

$$\text{صورت کسر} = \cos^2 5x - \cos^2 3x = \frac{1+\cos 10x}{2} - \frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 6x) = \frac{1}{2}(-2\sin 8x \sin 2x) = -\sin 8x \sin 2x \Rightarrow A = \frac{-\sin 8x \sin 2x}{\sin 2x} = -\sin 8x$$

$$x = \frac{\pi}{32} \Rightarrow A = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم: می‌دانیم $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ **بنابراین:**

$$\cos^2 5x - \cos^2 3x = -\sin(8x)\sin(2x) \Rightarrow A = \frac{-\sin 8x \sin 2x}{\sin 2x} = -\sin 8x$$

$$x = \frac{\pi}{32} \rightarrow A = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۰.گزینه ۲ **شرط تساوی دو تابع علاوه بر برابری دامنه‌ها، برابری ضابطه‌ها هم می‌باشد. در مورد گزینه‌های ۱ ، ۳ و ۴ این دو شرط برقرار است.**

گزینه‌ی ۱:

$$Df = Dg = \mathbb{R} - \{۰\}\,,\ f = g$$

$$= \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

گزینه‌ی ۲:

$$Df = Dg = \mathbb{R}\,,\ \begin{cases} f(-\frac{۱}{۲}) = ۰ \\ g(-\frac{۱}{۲}) = ۱ \end{cases} \Rightarrow f \neq g$$

$$Df = \left.\begin{matrix} \sin x = ۰ \to x = k\pi \\ \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} x = \frac{k\pi}{۲} \to Df = \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{۲}\}$$

$$Dg : \sin ۲x = ۰ \to ۲x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{۲} \to Dg = \mathbb{R} - \{x = \frac{k\pi}{۲}\}$$

می دانیم که: $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x \quad , \quad \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = ۲\cot ۲x$$

گزینه‌ی ۳:

$$Df = Dg = \left\{x \,\middle|\, x \neq \frac{k\pi}{۲}\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\ ,\ \cot x - \tan x = ۲\cot ۲x \Rightarrow$$

در دامنه‌ی مشترک یک اتحاد (فرمول) است. $\Rightarrow f = g$

گزینه‌ی ۴:

$Df = Dg = \mathbb{R} - \{۰\}\ ,\ \log x^۲ = ۲\log|x| \Rightarrow$ در دامنه‌ی مشترک یک اتحاد است. $\Rightarrow f = g$

۱۱.گزینه ۳

می‌دانیم که هر تابعی با معکوس خودش نسبت به نیمساز اول و سوم قرینه است و اگر نقطه مشترکی داشته باشند روی خط $y = x$ قرار دارد.

$$f(x) = x - \sin\frac{\pi}{۴}x = x \Rightarrow \sin\frac{\pi}{۴}x = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۴}x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = ۴k \xrightarrow{x \in [-۲\,,\,۶]} \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

فقط به ازای $k = ۰\ ,\ k = ۱$ مقادیر x در بازه قرار دارد.

۱۲.گزینه ۲

می‌دانیم:

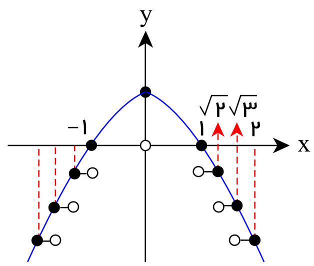
$$\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$$

از طرفی : $\sin^۲\frac{۹\pi}{۴} = \sin^۲\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$$۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین گزینه۲ درست میباشد.

۱۳.گزینه ۳



نمودار شامل ۸ پاره‌خط موازي محور xها با طول‌هاي نابرابر و يك نقطه $A \left| \begin{matrix} ۰ \\ ۱ \end{matrix} \right.$ است، زيرا در رسم $y = [f]$ كافي است نمودار f را روي خطوط افقي $y = k$ تصوير كنيم.

۱۴.گزینه ۳

$$\sin ۱۰۰^\circ = \sin(۹۰ + ۱۰) = \cos ۱۰^\circ$$
$$۱ - ۸\sin ۱۰ \cos^۲ ۱۰ = ۱ - ۴(۲\sin ۱۰ \cos ۱۰)\cos ۱۰ = ۱ - ۴\sin ۲۰ \cos ۱۰ = ۱ - ۴ \times \frac{۱}{۲}(\sin ۳۰ + \sin ۱۰)$$
$$= ۱ - ۱ - ۲\sin ۱۰ = -۲\sin ۱۰$$

نکته:

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

روابط تبدیل ضرب به جمع:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

۱۵.گزینه ۳

با استفاده از قضیه‌ي سینوس‌ها داریم:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{۵\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۵}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow C = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow A = ۱۰۵^\circ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۵\sqrt{۲} \times \sin ۱۰۵^\circ = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲} \times \sin ۱۰۵^\circ$$
$$\sin ۱۰۵^\circ = \sin(۶۰ + ۴۵) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$
$$S = \frac{۲۵\sqrt{۲}(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})}{۸} = \frac{۵۰ + ۵۰\sqrt{۳}}{۸} = \frac{۲۵}{۴}(۱ + \sqrt{۳})$$

۱۶.گزینه ۲

$$f(x) = \cos(\sin^{-۱} ۲x) = \sqrt{۱ - ۴x^۲}$$
زیرا: $\sin^{-۱} ۲x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = ۲x \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = \sqrt{۱ - ۴x^۲}$
$$f(x) = \sqrt{۱ - ۴x^۲} = y \Rightarrow y^۲ + ۴x^۲ = ۱$$

چون معادله‌ی $y^۲ + ۴x^۲ = ۱$ نشان‌دهنده‌ی یک بیضی است، بنابراین گزینه‌ی ۲ صحیح است و برای محاسبه‌ی دامنه و برد تابع هم y را برحسب x می‌نویسیم، خواهیم داشت:

$$y = \pm\sqrt{۱ - ۴x^۲}$$

$$f(x) = \cos(\sin^{-۱} ۲x) \Rightarrow \begin{cases} -۱ \le ۲x \le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow D_f = \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right] \\ -\frac{\pi}{۲} \le \sin^{-۱} ۲x \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \le \cos(\sin^{-۱} ۲x) \le ۱ \Rightarrow R_f = [۰, ۱] \end{cases}$$

۱۷.گزینه ۳ **در نقطه‌ی $x = ۲$ مقدار y به ماکزیمم و در نقطه‌ی $x = -۱$ مقدار y به می‌نیمم خود می‌رسد. پس با توجه به این‌که $-\frac{\pi}{۲} \le \sin^{-۱} x \le \frac{\pi}{۲}$ است:**

$$\begin{cases} x = ۲ \quad \Rightarrow \sin^{-۱}\frac{a}{۲+b} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{a}{۲+b} = ۱ \Rightarrow a = ۲ + b \\ x = -۱ \quad \Rightarrow \sin^{-۱}\frac{a}{-۱+b} = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{a}{-۱+b} = -۱ \Rightarrow a = ۱ - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳}{۲} \\ b = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow ab = -\frac{۳}{۴}$$

۱۸.گزینه ۳

$$f(x) = \begin{cases} (a+۲)x-۴ & x \geq ۲ \\ (a-۲)x+۴ & x < ۲ \end{cases}$$

اگر بخواهیم تابع معکوس‌پذیر باشد باید دو نیم خطی که در طرفین $x=2$ به‌دست می‌آیند با شیب‌های هم علامت باشند، لذا:

$$(a+2)(a-2)>0 \Rightarrow a^2-4>0 \Rightarrow |a|>2$$

۱۹.گزینه ۳

$$2\sqrt{2}(\sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\cdot\sin\frac{\pi}{4})=1-\sin 4x$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x-\cos 2x)=1-\sin 4x \Rightarrow 2(\sin 2x-\cos 2x)=1-\sin 4x$$

اتحاد زیر را داریم:

$$1-\sin 4x=(\sin 2x-\cos 2x)^2 \Rightarrow 2(\sin 2x-\cos 2x)=(\sin 2x-\cos 2x)^2$$

$$\Rightarrow (\sin 2x-\cos 2x)^2-2(\sin 2x-\cos 2x)=0 \Rightarrow (\sin 2x-\cos 2x)\cdot(\sin 2x-\cos 2x-2)=0$$

$$\begin{cases}\sin 2x-\cos 2x=0 \Rightarrow \tan 2x=1 \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{چهار نقطه روی دایره مثلثاتی}\\ \sin 2x-\cos 2x=2 \ \text{غیر ممکن} \ -\sqrt{2}\le \sin 2x-\cos 2x\le\sqrt{2}\end{cases}$$

جواب‌ها بر روی دایره‌ی مثلثاتی چهار نقطه به فاصله‌ی برابر را نشان می‌دهند و چون زوایا قائمه هستند (زاویه محاطی کمان 180° هستند.)

پس جواب‌ها رئوس یک مربع می‌باشند.

توجه: دقت کنید که طرفین یک معادله را هرگز ساده نکنید چون یکسری جواب از بین می رود باید همه را به یک طرف تساوی آورده و از عامل مشترک فاکتور بگیریم.

۲۰.گزینه ۲

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\Rightarrow \tan 35+\tan 20=\frac{\sin 55}{\cos 35\cos 20}=\frac{\sin(90-35)}{\cos 35\cos 20}=\frac{\cos 35}{\cos 35\cos 20}=\frac{1}{\cos 20}$$

$$A=\frac{1}{\cos 20}\times\sin 20=\tan 20\Rightarrow\frac{\tan 20}{\tan 20}=1$$

توجه: اگر مجموع دو زاویه 90° باشد آن دو زاویه متمم یکدیگرند:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta\,,\ \tan\alpha=\cot\beta$$

۲۱.گزینه ۳ تابع نزولی خطی به صورت $f(x)=ax+b$ و علامت a منفی است.

$$fof(x)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x+3$$

پس $(a^2=4\,,\ ab+b=3)\Rightarrow a=-2,b=-3$

$$f(x)=-2x-3\Rightarrow f(-\frac{5}{2})=5-3=2$$

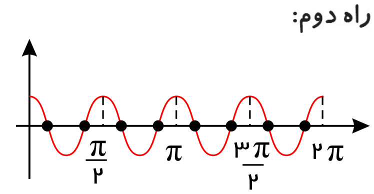
۲۲.گزینه ۴

$$\cos 4x=0\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

در نتیجه $k=0,1,2,\cdots,7$ تعداد نقاط تلاقی برابر ۸ می‌باشد.

راه دوم:

$$y=\cos 4x\to \text{دوره تناوب}\quad T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$



نمودار این تابع ۸ بار محور xها را قطع کرده است.

۲۳.گزینه ۳ به ترتیب اعمال مورد نظر انجام می‌دهیم:

$f(x)=x^{۲}\Rightarrow f_{۱}(x)=(x+۴)^{۲}$ انتقال ۴ واحد به طرف x های منفی

$f_{۲}(x)=-(x+۴)^{۲}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ها}} f_{۳}(x)=-۲(x+۴)^{۲}\rightarrow$ دو برابر کردن برد

$f_{۴}(x)=-۲(x+۴)^{۲}-۳\xrightarrow{\text{انتقال ۳واحد به طرف } y \text{های منفی}} -۲(x^{۲}+۸x+۱۶)-۳$

در نتیجه $y=-۲x^{۲}-۱۶x-۳۵$

۲۴.گزینه ۲   مساحت مثلث از رابطه $S=\frac{۱}{۲}bc\sin A$محاسبه می شود.

$$\sqrt{۱۸۹}=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۶\sin A\Rightarrow ۳\sqrt{۲۱}=۳\times ۵\sin A\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$

در نتیجه $\cos A=\sqrt{۱-\sin^{۲}A}=\frac{۲}{۵}$ از رابطه $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$ خواهیم داشت:

$$a^{۲}=۲۵+۳۶-۲(۵\times ۶)(\frac{۲}{۵})=۲۵+۳۶-۲۴=۳۷$$

پس $a=\sqrt{۳۷}$

۲۵.گزینه ۱   می‌دانیم $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-۱}(b)=a$ پس خواهیم داشت.

$$\frac{۲a-۱}{۲-۳a}=-\frac{۱۰+\sqrt{۲}}{۱۴}\Rightarrow ۲۸a-۱۴+۲۰+۲\sqrt{۲}-۳۰a-۳a\sqrt{۲}=۰$$
$$a(۲+۳\sqrt{۲})=۲\sqrt{۲}+۶\Rightarrow a=\sqrt{۲}$$

۲۶.گزینه ۴   این سوال در کنکور سراسری ۹۴ طرح شده بود که پاسخ صحیح در گزینه‌ها نبود بنابراین با تغییر در گزینه ۴، آنرا به پاسخ صحیح تبدیل کردیم.

$$\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\cot x$$

ابتدا با قوانین $\sin a+\sin b=۲\sin\frac{a+b}{۲}\cdot\cos\frac{a-b}{۲}$ و $\cos a+\cos b=۲\cos\frac{a+b}{۲}\cdot\cos\frac{a-b}{۲}$ صورت و مخرج را به ضرب تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{۲\sin\frac{۳x}{۲}\cdot\cos\frac{x}{۲}}{۲\cos\frac{۳x}{۲}\cdot\cos\frac{x}{۲}}=\cot x\Rightarrow \tan\frac{۳x}{۲}=\cot x=tog(\frac{\pi}{۲}-x)$$

و می‌دانیم که:

$$\tan x=\tan\alpha\Rightarrow x=k\pi+\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\frac{۳x}{۲}=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\frac{۳x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x$$
$$\frac{۵}{۲}x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵}+\frac{\pi}{۵}$$

باید ریشه‌های مخرج از مجموعه جواب حذف شود.

$$\text{مخرج}=\cos x+\cos ۲x=۰\rightarrow\cos ۲x=-\cos x=\cos(\pi+x)$$

$$۲x=۲k\pi\pm(\pi+x)\Rightarrow \begin{array}{l} x_{۱}=۲k\pi+\pi \\ x_{۲}=\frac{۲}{۳}k\pi-\frac{\pi}{۳}\end{array}\Rightarrow x=\pi\cdot(۲k+۱)$$

$$\text{مجموعه جواب} = \frac{\pi}{۵}(۲k+۱) - \pi(۲k+۱)$$

۲۷.گزینه ۱ باتوجه به نمودار تابع $D_{U(x)} = R - \{۱\}$ است بنابراین $U(x)$ می‌تواند گزینه‌ی ۱ یا ۳ باشد، از طرفی مجانب افقی تابع $y = -۱$ است بنابراین گزینه‌ی ۱ صحیح است.

۲۸.گزینه ۲ روش اول:

نکته: $f(a) = b$ اگر و تنها اگر $f^{-۱}(b) = a$ فرض کنیم $g^{-۱}(۲) = \alpha$ باشد، در این صورت داریم:

$$g(\alpha) = ۲ \Rightarrow ۲ + ۳f(\frac{۱}{\alpha}) = ۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{\alpha}) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\alpha} = f^{-۱}(۰) \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{f^{-۱}(۰)} \Rightarrow g^{-۱}(۲) = \frac{۱}{f^{-۱}(۰)}$$

روش دوم:

$$g(x) = ۲ + ۳f(\frac{۱}{x})$$

$$g(x) = y \to x = g^{-۱}(y) \qquad (۱)$$

$$۲ + ۳f(\frac{۱}{x}) = y \to f(\frac{۱}{x}) = \frac{y-۲}{۳} \to \frac{۱}{x} = f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳}) \to x = \frac{۱}{f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳})} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \to g^{-۱}(y) = \frac{۱}{f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳})} \to g^{-۱}(۲) = \frac{۱}{f^{-۱}(۰)}$$

۲۹.گزینه ۳

نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha \quad , \quad \cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$

$$\tan(\frac{۵\pi}{۸}) = \tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}) = -\cot\frac{\pi}{۸} = \frac{-۱}{\tan\frac{\pi}{۸}} \quad (*)$$

حال مقدار $\tan\frac{\pi}{۸}$ را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

روش اول: نکته: $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

$$\tan\frac{\pi}{۴} = \frac{۲\tan\frac{\pi}{۸}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}} \xrightarrow{\tan\frac{\pi}{۸}=x} ۱ = \frac{۲x}{۱-x^۲} \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۸}}{۲} \xrightarrow{\tan\frac{\pi}{۸} > ۰} \tan\frac{\pi}{۸} = -۱ + \sqrt{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

روش دوم: نکته: $\tan\alpha = \frac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}$

$$\tan\frac{\pi}{۸} = \frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{۱+\cos\frac{\pi}{۴}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

با جایگذاری در (*) داریم:

$$\tan\frac{۵\pi}{۸} = \frac{-۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}} = -۱ - \sqrt{۲} \xlongequal{\text{طبق فرض}} a - \sqrt{b} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = -۳$$

۳۰.گزینه ۱ فرض کنید $f^{-۱}(۲) = \alpha$ در این صورت: $f(\alpha) = ۲$

$$f(x)=۱-۳g(\frac{۶}{x}) \xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha)=۱-۳g(\frac{۶}{\alpha}) \xrightarrow{f(\alpha)=۲} ۱-۳g(\frac{۶}{\alpha})=۲ \Rightarrow -۳g(\frac{۶}{\alpha})=۱$$
$$\Rightarrow g(\frac{۶}{\alpha})=-\frac{۱}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(-\frac{۱}{۳})=\frac{۶}{\alpha}\ (*)$$

باتوجه به رابطه $g^{-۱}(x)=\frac{۱}{x+۱}$**، داریم:**

$$g^{-۱}(-\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}+۱}=\frac{۳}{۲}$$

با جایگذاری این مقدار در (*) داریم: $\frac{۶}{\alpha}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \alpha=۴$

۳۱.گزینه ۴ راه‌حل اول: ابتدا ضابطه $f(x)$ را ساده تر می‌کنیم:

$$f(x)=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$$

حال ضابطه هر کدام از توابع $f(۱-x)$ و $f(x+۱)$را به دست می‌آوریم:

$$f(۱-x)=(۱-x-۱)^۲-۱=x^۲-۱$$
$$f(x+۱)=(x+۱-۱)-۱=x^۲-۱$$

بنابراین:

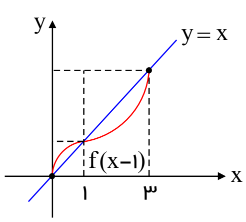
$$f(۱-x)-f(x+۱)=x^۲-۱-x^۲+۱=۰$$

راه‌حل دوم: با قرار دادن $x=۱$ داریم:

$$f(۱-x)-f(x+۱)\overset{x=۱}{=\!=}f(۰)-f(۲)=۰-۰=۰$$

تنها گزینه ۴ به ازای $x=۱$ برابر صفر می‌شود.

۳۲.گزینه ۴



نکته: عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، همواره باید نامنفی باشد.

راه حل اول:

نکته: برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ از روی نمودار $f(x)$ ، کافی است نمودار را به اندازه $|a|$ واحد در جهت علامت a روی محور xها انتقال دهیم.

$$x-f(x-۱)\geq ۰\Rightarrow f(x-۱)\leq x$$

حال نمودار $y=f(x-۱)$ و $y=x$ را از روی شکل داده شده به کمک انتقال رسم می‌کنیم.

(کل نمودار داده شده باید یک واحد روی محور xها به سمت راست حرکت کند.)

ما به دنبال xهایی هستیم که به ازای آن‌ها نمودار $y=f(x-۱)$ پایین نمودار $y=x$ باشد. بنابراین مطابق شکل، دامنه تابع $g(x)$ بازه‌ی $\{۰\}\cup[۱,۳]$ می‌باشد که شامل ۴ عدد صحیح است.

راه‌حل دوم:

مطابق نکته داریم:

$$x-f(x-۱)\geq ۰\Rightarrow f(x-۱)\leq x$$

با قرار دادن t به جای $x-۱$ ($x-۱=t\Rightarrow x=t+۱$)، داریم:

$$f(t)\leq t+۱$$

به دنبال t هایی هستیم که به ازای آن نمودار $y=f(t)$ پایین نمودار $y=t+۱$ باشد. باتوجه به نمودار داده شده در تست داریم:

$$۰\leq t\leq ۲\Rightarrow ۰\leq x-۱\leq ۲\Rightarrow ۱\leq x\leq ۳$$

۳۳.گزینه ۳ نکته: اگر دوره‌ی تناوب تابع f برابر T باشد، داریم $f(x+T)=f(x)$

$$f(-۱)=۱۰\xrightarrow{T=۳}f(۲)=۱۰\xrightarrow{f(۲)=۳a+۱}۳a+۱=۱۰\Rightarrow a=۳$$

$$f(a-۲)=۱\xrightarrow{a=۳}f(۱)=۱\Rightarrow f(۷)=f(۴)=f(۱)=۱\xrightarrow{f(۷)=b+۳}b+۳=۱\Rightarrow b=-۲$$

$$fof(b) = fof(-۲) \xlongequal{T=۳} fof(-۲+۳) = fof(۱) = f(f(۱)) = f(۱) = ۱$$

۳۴.گزینه ۱ می‌دانیم: $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad cos^{-۱}(-\alpha) = \pi - \cos^{-۱}\alpha$

بنابراین از صورت سؤال داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۳} + cos^{-۱}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})) = sin(\frac{\pi}{۳} + \pi - \cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})) = sin(\frac{\pi}{۳} + \pi - \frac{\pi}{۶}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{۶})$$
$$= -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

۳۵.گزینه ۲

یادآوری: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$$۴\cos ۴۰^{\circ} - \frac{۱}{\cos ۲۰^{\circ}} = \frac{۴\cos ۴۰^{\circ}\cos ۲۰^{\circ} - ۱}{\cos ۲۰^{\circ}} = \frac{۲(\cos ۶۰^{\circ} + \cos ۲۰^{\circ}) - ۱}{\cos ۲۰^{\circ}} = \frac{۱ + ۲\cos ۲۰^{\circ} - ۱}{\cos ۲۰^{\circ}} = ۲$$

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۳۷۶۵۴۲

۱- ۴	۲- ۳	۳- ۴	۴- ۲	۵- ۱
۶- ۲	۷- ۳	۸- ۱	۹- ۴	۱۰- ۲
۱۱- ۳	۱۲- ۲	۱۳- ۳	۱۴- ۳	۱۵- ۳
۱۶- ۲	۱۷- ۳	۱۸- ۳	۱۹- ۳	۲۰- ۲
۲۱- ۳	۲۲- ۴	۲۳- ۳	۲۴- ۲	۲۵- ۱
۲۶- ۴	۲۷- ۱	۲۸- ۲	۲۹- ۳	۳۰- ۱
۳۱- ۴	۳۲- ۴	۳۳- ۳	۳۴- ۱	۳۵- ۲