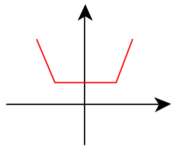
دبیرستان علامه حلی تهران

۱.گزینه ۳   تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است.

نمودارهای به شکل $K|x-a|+L|x-b|$ به طوری که $K=L$ و $a\neq b$ باشد به صورت گلدانی می‌شود.

حال برای این که محور yها محور تقارن آن باشد باید $a=-b$ باشد و برای این که تقارن شکل در دو طرف حفظ شود باید ضریب پشت قدرمطلق آن‌ها برابر شود بنابراین:



$$\begin{cases} k=2 \\ a=-3 \end{cases}$$

۲.گزینه ۳

$$\sin^2 x-2\sin x+1=0 \Rightarrow (\sin x-1)^2=0 \Rightarrow \sin x=1 \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۳.گزینه ۲

$$2\cos^2 x-1\cos x-3=0 \Rightarrow a=2, b=-1, c=-3, (b=a+c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi \\ \cos x=-\frac{c}{a}=\frac{3}{2}>1 \text{ غ‌ق} \end{cases}$$

۴.گزینه ۲

$$fog(x)=g^2(x)-g(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow fog(x)=\frac{1}{4}(x^2-4x+4)-\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

$$\Rightarrow fog(x)<0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2<0 \Rightarrow x^2-6x+8<0 \Rightarrow (x-2)(x-4)<0 \Rightarrow x\in(2\,,\,4)$$

۵.گزینه ۴

$$(fog)(x)=(\frac{1}{2}(x-3))^2+\frac{1}{2}(x-3)-2=\frac{1}{4}(x^2-6x+9)+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-2=\frac{1}{4}x^2-x-\frac{5}{4}$$

$$(fog)(x)<0 \rightarrow \frac{1}{4}x^2-x-\frac{5}{4}<0 \rightarrow x^2-4x-5<0 \rightarrow (x-5)(x+1)<0 \rightarrow -1<x<5$$

$$\rightarrow b-a=5-(-1)=6$$

۶.گزینه ۱

$$\frac{\sin(2\alpha+\alpha)-\sin(2\alpha-\alpha)}{\cos(2\alpha-\alpha)-\cos(2\alpha+\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha-\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha-\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\cos 2\alpha\sin\alpha}{2\sin 2\alpha\sin\alpha}=\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}=\frac{2^2-1}{2\times 2}=\frac{3}{4}$$

۷.گزینه ۴

می‌دانیم $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ بنابراین:

$$\cos 50(\tan 70+\tan 10)=\cos 50\times\frac{\sin 80}{\cos 70\cos 10}=\frac{\cos 50\cos 10}{\cos 70\cos 10}$$

$$=\frac{\cos 50}{\cos 70}=\frac{\sin 40}{\sin 20}=\frac{2\sin 20\cos 20}{\sin 20}=2\cos 20$$

۸.گزینه ۴

$$\cos ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)\rightarrow ۲x=۲k\pi\pm(\frac{\pi}{۲}-x)\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

k	x
۰	$\frac{\pi}{۶}$
۱	$\frac{۵\pi}{۶}$
	۹π

$\{۱,۵,۹\}$

در حال حاضر امکان ثبت وجود ندارد

۹.گزینه ۱ می‌دانیم $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha\ ,\ \sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

$$۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=۸\cos a\cos b\sin a\sin b$$

$$=۲(۲\sin a\cos a)(۲\sin b\cos b)=۲\sin ۲a\sin ۲b$$

$$\xrightarrow{a+b=\frac{\pi}{۴}}۲\sin ۲a\sin ۲(\frac{\pi}{۴}-a)=۲\sin ۲a\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)=۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۴a$$

۱۰.گزینه ۳

می‌دانیم $\sin p+\sin q=۲\sin(\frac{p+q}{۲})\cos(\frac{p-q}{۲})$

$$\frac{۲\sin ۲x\ \cos x}{\sin x}=۱\Rightarrow\frac{۴\sin x\cos x\cos x}{\sin x}=۱\Rightarrow ۴\cos^{۲}x=۱\Rightarrow\cos^{۲}x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos x=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۱۱.گزینه ۴

$$\tan ۴۵=\tan(۱۸+۲۷)=\frac{\tan ۱۸+\tan ۲۷}{۱-\tan ۲۷\tan ۱۸}\Rightarrow\tan ۲۷+\tan ۱۸+\tan ۲۷\tan ۱۸=۱$$

$$(۱+\tan ۱۸)(۱+\tan ۲۷)=۱+\underbrace{\tan ۲۷+\tan ۱۸+\tan ۱۸\tan ۲۷}_{۱}=۱+۱=۲$$

۱۲.گزینه ۱

می‌دانیم $\cos p-\cos q=-۲\sin(\frac{p+q}{۲})\sin(\frac{p-q}{۲})\ ,\ \cos ۱۴۰=-\cos ۵۰$

$$\cos ۱۰(\cos ۲۰-\cos ۴۰)=\cos ۱۰(۲\sin ۳۰\sin ۱۰)=(\underbrace{۲\cos ۱۰\sin ۱۰}_{\sin ۲x=۲\sin x\cos x})(\underbrace{\sin ۳۰}_{\frac{۱}{۲}})=\frac{۱}{۲}\sin ۲۰$$

۱۳.گزینه ۲

$$(\tan ۲۰^{\circ}+\cot ۴۰^{\circ})\sin ۵۰^{\circ}=(\frac{\sin ۲۰}{\cos ۲۰}+\frac{\sin ۵۰}{\cos ۵۰})\sin ۵۰=(\frac{\sin ۲۰\cos ۵۰+\cos ۲۰\sin ۵۰}{\cos ۲۰\cos ۵۰})\sin ۵۰$$

$$=\frac{\sin(۲۰+۵۰)}{\cos ۲۰\cos ۵۰}\times\sin ۵۰$$

$$=(\frac{\sin ۷۰}{\cos ۲۰\cos ۵۰})\sin ۵۰=\frac{\cos ۲۰\sin ۵۰}{\cos ۲۰\cos ۵۰}=\tan ۵۰$$

توجه کنید که $\sin ۷۰=\cos ۲۰$

۱۴.گزینه ۳

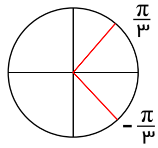
$$\begin{cases} 2\alpha+\dfrac{\beta}{3}=m \\ 2\alpha-\dfrac{\beta}{3}=n \end{cases} \Rightarrow m-n=\frac{2\beta}{3}$$

$$\tan(m-n)=\tan(\frac{2\beta}{3})=\frac{\tan m-\tan n}{1+\tan m\tan n}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

۱۵.گزینه ۳

$$\cos^2(90+20)-\cos^2 20=\sin^2 20-\cos^2 20=-(\cos^2 20-\sin^2 20)=-\cos 40$$

۱۶.گزینه ۳



$$-\frac{\pi}{9}<x<\frac{\pi}{9}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}<3x<\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{1}{2}<\cos 3x\leq 1$$
$$\frac{1}{2}<\frac{m-1}{2}\leq 1\Rightarrow 2<m\leq 3$$

۱۷.گزینه ۲

$$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$
$$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow 0<\frac{\pi}{4}-x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}-x)>0\Rightarrow\frac{1-m}{2+m}>0\Rightarrow-2<m<1$$

		-2		1	
$1-m$	$+$		$+$	0	$-$
$2+m$	$-$	0	$+$		$+$
	$-$	ت ن	$+$	0	$-$

۱۸.گزینه ۳

می‌دانیم $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$

$$2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)=1+\cos(\frac{7\pi}{2}-2x)$$
$$2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)-\cos^2 x(1+\tan^2 x)=1+\cos(\frac{7\pi}{2}-2x)-\cos^2 x\times\frac{1}{\cos^2 x}=\cos(\frac{7\pi}{2}-2x)=-\sin 2x$$

۱۹.گزینه ۲

$$\underline{\sin x}+\sin 2x+\underline{\sin 3x}=0\Rightarrow 2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)+\sin 2x=0$$
$$\Rightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$$

$$\Rightarrow\sin 2x\,(2\cos x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}\\ 1+2\cos x=0\Rightarrow\cos x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$$

با توجه به اینکه در صورت سوال قید شده که $x\neq\frac{k\pi}{2}$ یعنی $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ جواب تست می باشد.

۲۰.گزینه ۲ روش اول: اولاً با توجه به این که شکل داده شده باید متعلق به یک تابع زوج با دامنه ی متقارن باشد، پس گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند(چون دامنه‌ی هر دو $D_f=[0,1]$ می‌باشد) .

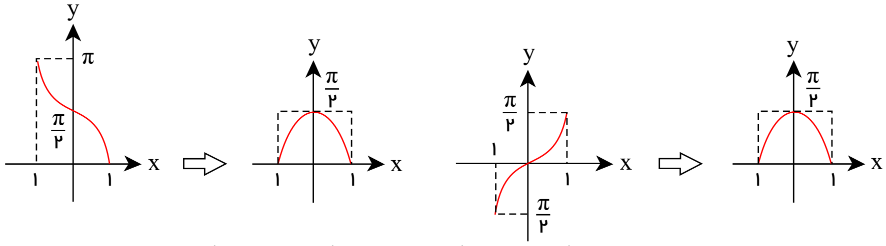
ثانیاً: برای انتخاب گزینه‌ی صحیح از میان (۲) و (۴) ، $x=0$ را در توابع مربوطه قرار می‌دهیم.

$$f(x)=\sin^{-1}|x| \xrightarrow{x=0} f(0)=\sin^{-1}0=0$$ غ ق ق

$$g(x)=\cos^{-1}|x| \xrightarrow{x=0} g(0)=\cos^{-1}0=\frac{\pi}{2}$$ قابل قبول

پس گزینه‌ی (۲) پاسخ صحیح تست می‌باشد.

روش دوم: می‌توان با رسم $|x|$ $y=\sin^{-1}$ و $y=\cos^{-1}||x|$ به سرعت جواب صحیح را انتخاب نمود. دقت کنید:



از چپ به راست: $\cos^{-1}x \quad \cos^{-1}||x| \quad \sin^{-1}x \quad \sin^{-1}|x|$

۲۱.گزینه ۳ **روش اول**: با توجه به رابطه ی $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$ ، داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2.4$$

روش دوم: با توجه به رابطه ی $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ ، داریم:

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1}{5}\Rightarrow\tan(2(\frac{\pi}{4}-\alpha))=\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=\frac{5}{12}\xrightarrow{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta}\cot 2\alpha=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow\tan 2\alpha=\frac{1}{\cot 2\alpha}=\frac{12}{5}=2.4$$

۲۲.گزینه ۱ روش اول: یادآوری:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos 5x\cos 3x=\cos^2 x\Rightarrow\frac{1}{2}[\cos(5x+3x)+\cos(5x-3x)]=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow\cos 8x=1\Rightarrow 8x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}$$

روش دوم: با توجه به اینکه $x=0$ جواب معادله است، بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست هستند. با توجه به این که $x=\frac{\pi}{4}$ هم جواب معادله است، گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است، بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ است.

۲۳.گزینه ۳

می‌دانیم $\sin p+\sin q=2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$, $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+\sin 50^\circ}}{\sin 50^\circ+\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{1+\cos 40^\circ}}{2\sin(\frac{50^\circ+10^\circ}{2})\cos(\frac{50^\circ-10^\circ}{2})}=\frac{\sqrt{2\cos^2 20^\circ}}{2(\frac{1}{2})\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{2}$$

۲۴.گزینه ۳ با استفاده از فرمول $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$، داریم:

$$2\sin x\cos 3x=1+\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$$
$$\Rightarrow \sin(x+3x)+\sin(x-3x)=1-\sin 2x$$
$$\Rightarrow \sin 4x-\sin 2x=1-\sin 2x$$
$$\Rightarrow \sin 4x=1\Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

۲۵.گزینه ۱ ابتدا عبارت را از ضرب به جمع و پس از ساده کردن دوباره آن را به ضرب تبدیل می‌کنیم بنابراین داریم:

$$\frac{\sin x\cos 3x+\sin 2x\cos 6x}{\cos 5x\cos 3x}=\frac{\frac{1}{2}(\sin(4x)+\sin(-2x))+\frac{1}{2}(\sin(8x)+\sin(-4x))}{\cos 5x\cos 3x}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cancel{\sin(4x)}+\sin(-2x)+\sin(8x)-\cancel{(\sin(4x))}\right)}{\cos 5x\cos 3x}=\frac{\frac{1}{2}(\sin(8x)+\sin(-2x))}{\cos 5x\cos 3x}=\frac{\frac{1}{2}\times 2\sin 3x\times\cancel{\cos 5x}}{\cancel{\cos 5x}\cos 3x}$$
$$=\tan 3x$$

حال طبق صورت سوال به‌جای x مقدار $\frac{\pi}{18}$ را قرار می‌دهیم:

$$\tan\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۶.گزینه ۲

نکته:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\ ,\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \cos^{-1}x=\alpha\to\cos\alpha=x$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\sin^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow\ \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\cos^{-1}x\ \Rightarrow\ x=\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

حال اگر مقدار $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$ در نظر بگیریم آنگاه $\tan\alpha=\frac{1}{3}$ می شود و داریم:

$$\Rightarrow\cos^2 a=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+(\frac{1}{3})^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{9}}=\frac{9}{10}$$
$$\Rightarrow x=\cos a=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

۲۷.گزینه ۴

ابتدا صورت کسر را ساده می کنیم:

صورت کسر=$\cos^۲ ۵x - \cos^۲ ۳x = \frac{۱+\cos ۱۰x}{۲} - \frac{۱+\cos ۶x}{۲}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(\cos ۱۰x - \cos ۶x) = \frac{۱}{۲}(-۲\sin ۸x \sin ۲x) = -\sin ۸x \sin ۲x \Rightarrow A = \frac{-\sin ۸x \sin ۲x}{\sin ۲x} = -\sin ۸x$

$x = \frac{\pi}{۳۲} \Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

روش دوم: می‌دانیم $\cos^۲ \alpha - \cos^۲ \beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ بنابراین:

$\cos^۲ ۵x - \cos^۲ ۳x = -\sin(۸x)\sin(۲x) \Rightarrow A = \frac{-\sin ۸x \sin ۲x}{\sin ۲x} = -\sin ۸x$

$x = \frac{\pi}{۳۲} \rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۲۸.گزینه ۲

می‌دانیم:

$\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲\alpha$

از طرفی : $\sin^۲ \frac{۹\pi}{۴} = \sin^۲ \frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = ۱ \Rightarrow \sin x = \pm ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

بنابراین گزینه۲ درست میباشد.

۲۹.گزینه ۲ طبق تعریف $\tan^{-۱} x$ خواهیم داشت:

$\tan^{-۱} x = \alpha \Rightarrow x = \tan\alpha \quad \cos(۲\tan^{-۱} x) = \cos ۲\alpha \Rightarrow \cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲(\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}) - ۱ = \frac{۲}{۱+x^۲} - ۱$

$\Rightarrow \frac{۲}{۱+x^۲} - ۱ = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{۱}{۱+x^۲} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۱}{۲}$

نکته: $\cos^۲ \alpha = \frac{۱}{۱+\tan^۲ \alpha}$

۳۰.گزینه ۲

$\frac{۲\sin(-x)\cos ۴x}{-۲\sin ۴x \sin(-x)} = \sqrt{۳} \Rightarrow \cot ۴x = -\sqrt{۳} \Rightarrow ۴x = k\pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۲۴}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = ۱ & x_۱ = \frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۲۴} \\ k = ۲ & x_۲ = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲۴} \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$$

نکته: $\sin p \pm \sin q = ۲\sin\frac{p\pm q}{۲}\cos\frac{p\mp q}{۲}$, $\cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$

$\cos p - \cos q = ۲\sin\frac{q-p}{۲}\sin\frac{p+q}{۲}$

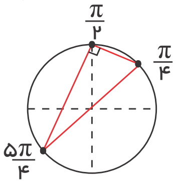
۳۱.گزینه ۴

$$\sin x\cos x=(1+\sin x)(1-\sin x)\Rightarrow \sin x\cos=\cos^2 x\Rightarrow \sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0\Rightarrow \cos x(\sin x-\cos x)=0$$

$$\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\ \text{یا}\ x=\dfrac{3\pi}{2} & \text{ریشه ی مخرج است، غ ق ق است}\\[2mm] \sin x=\cos x\Rightarrow \tan x=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\ \text{یا}\ x=\dfrac{5\pi}{4}\end{cases}$$

با توجه به شکل سه نقطه بر روي دايره‌ي رئوس يك مثلث قائم‌الزاويه را تشكيل مي‌دهند.

چون کمان روبروی زاویه A قطر دایره است پس: $\hat{A}=\dfrac{\pi}{2}$



۳۲.گزینه ۳

$$\sin 100^\circ=\sin(90+10)=\cos 10^\circ$$

$$1-8\sin 10\cos^2 10=1-4(2\sin 10\cos 10)\cos 10=1-4\sin 20\cos 10=1-4\times\frac{1}{2}(\sin 30+\sin 10)$$

$$=1-1-2\sin 10=-2\sin 10$$

نکته:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

روابط تبدیل ضرب به جمع:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

۳۳.گزینه ۳ ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}+\cos^{-1}(1+\sqrt{x^2-1})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x^2-1\geq 0\Rightarrow |x|\geq 1\Rightarrow(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\quad I\Rightarrow\ -1\leq 1+\sqrt{x^2-1}\leq 1\Rightarrow -2\leq\sqrt{x^2-1}\leq 0$$

$$\xrightarrow{\sqrt{x^2-1}\geq 0}\sqrt{x^2-1}=0\Rightarrow x=\pm 1\quad II$$

اشتراک دو مجموعه ی I, II، $x=\pm 1$ است که هر دو عبارت را صفر می‌کند

$$\tan^{-1}0=0\ ,\quad \cos^{-1}1=0$$

۳۴.گزینه ۲

$$\tan 2x+\cot(\frac{\pi}{4}-x)=0\Rightarrow \tan 2x=-\cot(\frac{\pi}{4}-x)\Rightarrow \tan 2x=-\tan(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-x))$$

$$\Rightarrow \tan 2x=-\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\tan(-(\frac{\pi}{4}+x))$$

$$\Rightarrow 2x=k\pi+(-(\frac{\pi}{4}+x))\Rightarrow x=\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\qquad x\in[0\ ,\ \pi]\xrightarrow{k=1\ ,\ 2\ ,\ 3}x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{12}\ ,\ \frac{11\pi}{12}$$

$x=\dfrac{\pi}{4}$ در دامنه‌ی تعریف نیست و چون این عدد در معادله صدق نمی کند دلیل آن این است که $\cot 0\ ,\ \tan\dfrac{\pi}{2}$ تعریف نشده است.

بنابراین معادله دو ریشه دارد.

۳۵.گزینه ۳ در نقطه‌ی $x=2$ مقدار y به ماکسیمم و در نقطه‌ی $x=-1$ مقدار y به می‌نیمم خود می‌رسد. پس با توجه به این‌که $-\dfrac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}x\leq\dfrac{\pi}{2}$ است:

$$\begin{cases}x=2 & \Rightarrow \sin^{-1}\dfrac{a}{2+b}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{a}{2+b}=1\Rightarrow a=2+b\\ x=-1 & \Rightarrow \sin^{-1}\dfrac{a}{-1+b}=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{a}{-1+b}=-1\Rightarrow a=1-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow ab=-\frac{3}{4}$$

۳۶.گزینه ۴

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow\tan(\frac{3\pi}{4}-\alpha)=\frac{-1-\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$$

$$\tan\alpha+1=2\tan\alpha-2\Rightarrow\tan\alpha=3\quad\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\quad\cos2\alpha=\frac{1-9}{1+9}=-\frac{8}{10}=-\frac{4}{5}$$

۳۷.گزینه ۴

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{3})\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\left[\cos(x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{3})+\cos(x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3})\right]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(\cos2x+\cos\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos2x-\frac{1}{2}=-1\Rightarrow\cos2x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos2x=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

۳۸.گزینه ۴

$$36+54=90\Rightarrow\cos36=\sin54\quad,\quad\sin p-\sin q=2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2})$$

$$\frac{1}{\cos36}-\frac{1}{\sin18}=\frac{\sin18-\sin54}{\cos36\times\sin18}=\frac{-2\sin18\times\cos36}{\cos36\times\sin18}=-2$$

۳۹.گزینه ۲

$$A=(\tan35+\tan20)\sin20=(\frac{\sin35}{\cos35}+\frac{\sin20}{\cos20})\sin20$$

$$=(\frac{\sin35\cos20+\cos35\sin20}{\cos35\cos20})\sin20=\frac{\sin(35+20)}{\cos35\cos20}\times\sin20$$

$$=\frac{\sin55}{\cos35}\times\frac{\sin20}{\cos20}=\frac{\sin(90-35)}{\cos35}\times\tan20$$

$$=\frac{\cos35}{\cos35}\times\tan20=1\times\tan20\Rightarrow A=1\times\tan20$$

۴۰.گزینه ۲

$$\sin\frac{17\pi}{6}=\sin(3\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin^{-1}(\sqrt{3}\sin\frac{17\pi}{6})=\sin^{-1}(\sqrt{3}\times\frac{1}{2})=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{3}$$

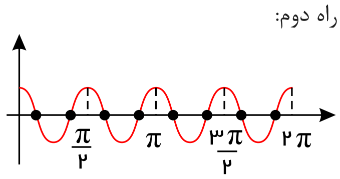
۴۱.گزینه ۴

$$\cos4x=0\Rightarrow4x=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$$

در نتیجه $k=0,1,2,\cdots,7$ تعداد نقاط تلاقی برابر ۸ می‌باشد.

راه دوم:

$y=\cos4x\rightarrow$ دوره تناوب $\quad T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$



نمودار این تابع ۸ بار محور xها را قطع کرده است.

۴۲.گزینه ۴ با فرض $\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}=\alpha$ خواهیم داشت $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ مقدار $\cos3\alpha$ را محاسبه می‌کنیم

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos3\alpha=\cos(2\alpha+a)=\cos2a\cdot\cos a-\sin2a\cdot\sin x=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\cos\alpha\sin^2\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

پس خواهیم داشت $\cos 3\alpha = 4(\frac{8}{27}) - 2 = \frac{-22}{27}$

۴۳.گزینه ۲ زاویه‌ها را به ۲۰ درجه تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{\sin(180-20)-\cos(90+20)+\sqrt{3}}{2\sin(90+20)-1} = \frac{\sin 20+\sin 20+\sqrt{3}}{2\cos 20-1} = \frac{\sin 20+\sin 60}{\cos 20-\cos 60} = \frac{2\sin 40\cos 20}{2\sin 40\sin 20} = \cot 20$$

۴۴.گزینه ۲

$$\cos^{-1}(\frac{3}{5}) = \alpha \to \cos\alpha = \frac{3}{5} \to \sin\alpha = \pm\frac{4}{5} \to 0 \le \underset{\uparrow}{\alpha} \le \pi \to \sin\alpha = \frac{+4}{5}$$

(چون برد $\cos^{-1}(x)$ بین ۰ تا π است)

$$\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) = \beta \to \cos\beta = -\frac{4}{5} \to \sin\beta = \pm\frac{3}{5} 0 \le \beta \le \pi \to \sin\beta = \frac{+3}{5}$$

$$\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})+\cos^{-1}(-\frac{4}{5})) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$= (\frac{4}{5})(-\frac{4}{5})+(\frac{3}{5})(\frac{3}{5}) = -\frac{16}{25}+\frac{9}{25} = -\frac{7}{25}$$

۴۵.گزینه ۱ می‌دانیم $\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ و $\sin a-\sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b}{2}$

$$\frac{\sin^2 40^\circ-\sin^2 10^\circ}{\cos 70^\circ+\cos 10^\circ} = \frac{(\sin 40^\circ-\sin 10^\circ)(\sin 40^\circ+\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ+\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{[2\sin(\frac{40^\circ-10^\circ}{2})\cos(\frac{40^\circ+10^\circ}{2})][2\sin(\frac{40^\circ+10^\circ}{2})\cos(\frac{40^\circ-10^\circ}{2})]}{2\sin(\frac{20^\circ+80^\circ}{2})\cos(\frac{80^\circ-20^\circ}{2})}$$

$$= \frac{4\sin 15^\circ\cos 25^\circ\sin 25^\circ\cos 15^\circ}{2\sin 50^\circ\cos 30^\circ} = \frac{\sin 50^\circ\sin 30^\circ}{2\sin 50^\circ\cos 30^\circ} = \frac{1}{2}\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۴۶.گزینه ۲ نکته (تبدیل جمع به ضرب):

$$\sin A+\sin B = \frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{\cos 5x-\cos x}{\sin x+\sin 5x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{-2\sin 3x\sin 2x}{2\sin 3x\cos 2x} = \sqrt{3} \xrightarrow{\sin 3x\neq 0} \tan 2x = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6} \xrightarrow{x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} x = -\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}$$

باتوجه به این‌که $\sin 3x \neq 0$، فقط $x = -\frac{\pi}{6}$ قابل قبول است. پس معادله‌ی داده شده در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ دارای ۱ جواب است.

۴۷.گزینه ۲ ابتدا با مخرج مشترک گرفتن و فرمول‌های مثلثاتی عبارت را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{\sqrt{3}}{\cos x}=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\sin x\cos x}=\frac{2(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}$$

$$=\frac{2(\sin\frac{\pi}{6}\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\sin x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\frac{2\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=4\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\sin 2x}$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{18}$، مقدار عبارت مورد نظر برابر می‌شود با:

$$4\frac{\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{18})}{\sin(\frac{\pi}{9})}=4\frac{\sin(\frac{\pi}{9})}{\sin(\frac{\pi}{9})}=4$$

۴۸.گزینه ۳ نکته **۱**: اگر یک رابطه که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است. بخواهد تابع باشد نباید مؤلفه اول هیچ دو زوج مرتب متمایزی با یکدیگر برابر باشد؛ یعنی اگر مؤلفه اولشان برابر بود، مؤلفه دوم آن‌ها نیز برابر باشد.

نکته **۲**: یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است، زمانی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه دوم برابر نباشد؛ یعنی اگر مؤلفه دومشان برابر بود، مؤلفه اول آنها نیز برابر باشد.

نکته **۳**: اگر f معکوس پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$$

مطابق نکته **۲** داریم:

$$(3a-2,b),(a,b)\in f\Rightarrow 3a-2=a\Rightarrow a=1\Rightarrow f=\{(1,b),(2,3),(1,2b-1),(1,b)\}$$

رابطه باید تابع باشد، پس مطابق نکته **۱** داریم:

$$(1,b),(1,2b-1)\in f\Rightarrow 2b-1=b\Rightarrow b=1$$
$$f=\{(1,1),(2,3)\}\Rightarrow f^{-1}(a+2b)=f^{-1}(3)=2=a+b$$

۴۹.گزینه ۱ نکته: می‌دانیم هر تابع خطی به فرم $y=ax+b$، یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

ابتدا ضابطه خطی را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}f(2)=5\Rightarrow 2a+b=5\\ f^{-1}(-4)=-1\Rightarrow f(-1)=-4\Rightarrow -a+b=-4\end{cases}\Rightarrow a=3,\ b=-1$$

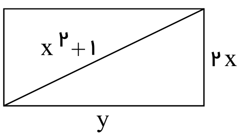
حال معکوس تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=3x-1\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$$

بنابراین داریم:

$$f(3)=8\Rightarrow f^{-1}(1+f(3))=f^{-1}(9)=\frac{10}{3}$$

۵۰.گزینه ۲ طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$y^2+(2x)^2=(x^2+1)^2\Rightarrow y^2+4x^2=x^4+2x^2+1$$
$$y^2=(x^2-1)^2\xrightarrow{x>1}y=x^2-1\quad(*)$$

اگر P محیط مستطیل باشد، داریم:

$$P(x)=2(y+2x)\overset{(*)}{=\!=}2(x^2-1+2x)=2x^2+4x-2$$