۱.**گزینه ۴**

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\sqrt{3}\Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\ \cos x}=\sqrt{3}\Rightarrow \tan x=\sqrt{3}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

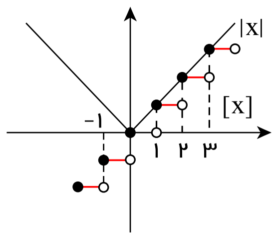
۲.**گزینه ۴**

$$f(|x|)\le f([x])\Rightarrow |x|-2\le [x]-2\Rightarrow |x|\le [x]$$

نامعادله‌ی فوق را با تعیین علامت قدرمطلق حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x\ge 0: x\le [x]\Rightarrow x\in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ x<0: -x\le [x]\Rightarrow \text{فاقد جواب} \end{cases}\Rightarrow \textbf{مجموعه جواب}=\mathbb{N}\cup\{0\}$$

راه حل دیگر: می‌توانیم از رسم نمودار کمک بگیریم:



$$|x|\le [x]\Rightarrow x\in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت

۳.**گزینه ۲** **چون $[x^2]=0$ است $0\le x^2<1$ باتوجه به عبارت مفروض مقدار x مثبت است (زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد) پس $0\le x<1$ می‌باشد خواهیم داشت.**

$$\sqrt{x^2-2x\sqrt{x}+x}=\sqrt{(x-\sqrt{x})^2}=|x-\sqrt{x}|=\sqrt{x}-x$$

$$\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}=\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}=|1-\sqrt{x}|=1-\sqrt{x}$$

مجموع دو عبارت برابر $1-x$ می‌باشد.

-سنجش-۱۳۹۴-متوسط

۴.**گزینه ۱** **می‌دانیم $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$ پس خواهیم داشت.**

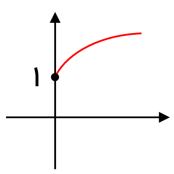
$$\frac{2a-1}{2-3a}=-\frac{10+\sqrt{2}}{14}\Rightarrow 28a-14+20+2\sqrt{2}-30a-3a\sqrt{2}=0$$

$$a(2+3\sqrt{2})=2\sqrt{2}+6\Rightarrow a=\sqrt{2}$$

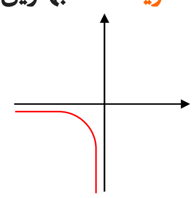
-سنجش-۱۳۹۴-سخت

۵.**گزینه ۳** **بهترین و سریعترین روش برای بررسی توابع چند ضابطه ای، رسم آنهاست.**

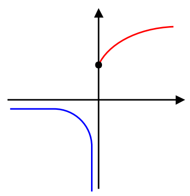
$y=\sqrt{x}+1$



$$\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x<0 \end{cases}$$



خطوط موازی محور xها نمودار این تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند پس یک به یک است و این تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است که غیریکنوا محسوب می‌شود.



-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۶.گزینه ۲

نکته:

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ \quad , \quad \sin^{۲}\alpha = \frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

با استفاده از نکته‌ي فوق داریم:

$$۶\sin^{۲} ۳x + \cos ۲(۶x) = ۴ \Rightarrow ۶\left(\frac{۱-\cos ۶x}{۲}\right) + ۲\cos^{۲} ۶x - ۱ = ۴$$

$$\Rightarrow ۳ - ۳\cos ۶x + ۲\cos^{۲} ۶x - ۱ = ۴ \Rightarrow ۲\cos^{۲} ۶x - ۳\cos ۶x - ۲ = ۰$$

معادله‌ي فوق يك معادله‌ي درجه‌ي دوم برحسب $\cos ۶x$ است. با استفاده از روش دلتا داریم:

$$\Delta = (۳)^{۲} - ۴(۲)(-۲) = ۲۵$$

$$\begin{cases} \cos ۶x = \dfrac{-(-۳)+\sqrt{۲۵}}{۲(۲)} = \dfrac{۳+۵}{۴} = ۲ \Rightarrow \text{غیر قابل قبول، زیرا حداکثر مقدار کسینوس ۱ است} \\ \cos ۶x = \dfrac{-(-۳)-\sqrt{۲۵}}{۲(۲)} = \dfrac{۳-۵}{۴} = -\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۶x = \cos\dfrac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\text{کوچکترین ریشه مثبت}} ۶x = \dfrac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{۹} \end{cases}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-خیلی سخت

۷.گزینه ۱

می دانیم

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha} \quad , \quad \sin p - \sin q = ۲\sin(\frac{p-q}{۲})\cos(\frac{p+q}{۲}) \quad , \quad \cos p - \cos q = -۲\sin(\frac{p+q}{۲})\sin(\frac{p-q}{۲})$$

$$\frac{\sin ۳\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos ۳\alpha} = \frac{۲\sin\alpha\cos ۲\alpha}{۲\sin\alpha\sin ۲\alpha} = \cot ۲\alpha = \frac{۱}{\tan ۲\alpha} = \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۲\tan\alpha} = \frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۲\times\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{۴}$$

-سراسری-۱۳۸۸-متوسط

۸.گزینه ۳

ابتدا ضابطه $g(x)$ را یافته، سپس مطابق مقادیر به دست آمده، حاصل $(f+g)og(-۲)$ را می یابیم.

$$\left.\begin{array}{l} g(۲x+۱) = ۴x^{۲} + ۱۲x + ۵ \\ ۲x+۱ = t \Rightarrow x = \dfrac{t-۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow g(t) = ۴(\frac{t-۱}{۲})^{۲} + ۱۲(\frac{t-۱}{۲}) + ۵$$

$$\Rightarrow g(t) = t^{۲} - ۲t + ۱ + ۶t - ۶ + ۵ = t^{۲} + ۴t \Rightarrow g(x) = x^{۲} + ۴x$$

$$(f+g)o\overbrace{g(-۲)}^{-۴} = (f+g)(-۴) = f(-۴) + g(-۴) = -۷ + ۰ = -۷$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۹.گزینه ۲ روش اول:

نکته: $f(a)=b$ اگر و تنها اگر $f^{-۱}(b)=a$ فرض کنیم $g^{-۱}(۲)=\alpha$ باشد، در این صورت داریم:

$$g(\alpha) = ۲ \Rightarrow ۲ + ۳f(\frac{۱}{\alpha}) = ۲ \Rightarrow f(\frac{۱}{\alpha}) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\alpha} = f^{-۱}(۰) \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{f^{-۱}(۰)} \Rightarrow g^{-۱}(۲) = \frac{۱}{f^{-۱}(۰)}$$

روش دوم:

$$g(x)=۲+۳f(\frac{۱}{x})$$
$$g(x)=y\to x=g^{-۱}(y) \qquad (۱)$$
$$۲+۳f(\frac{۱}{x})=y\to f(\frac{۱}{x})=\frac{y-۲}{۳}\to\frac{۱}{x}=f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳})\to x=\frac{۱}{f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳})} \qquad (۲)$$
$$(۱),(۲)\to g^{-۱}(y)=\frac{۱}{f^{-۱}(\frac{y-۲}{۳})}\to g^{-۱}(۲)=\frac{۱}{f^{-۱}(۰)}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۱۰.گزینه ۴ باتوجه به رابطه مثلثاتی $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{۱+\tan a\tan b}$ از طرفین رابطه مفروض تانژانت می‌گیریم می‌دانیم $\cot^{-۱}x=\tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ است.

$$\frac{۲x-\frac{۱}{x}}{۱+۲x\cdot\frac{۱}{x}}=۱$$
$$۲x-\frac{۱}{x}=۳\Rightarrow ۲x^۲-۳x-۱=۰\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۳}{۲}$$

-سنجش-۱۳۹۴-سخت

۱۱.گزینه ۴

$$\cot(a-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\tan(a-\frac{\pi}{۴})=۳\Rightarrow\frac{\tan a-۱}{۱+\tan a}=۳$$

$$۳+۳\tan a=\tan a-۱\Rightarrow\tan a=-۲$$

$$\tan ۲a=\frac{۲\tan a}{۱-\tan^۲ a}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^۲}=\frac{-۴}{-۳}=\frac{۴}{۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۱۲.گزینه ۴ تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم

$$x\geq -۲\Rightarrow f(x)=-۳x-۶+۳x-۳-۴x=-۴x-۹$$
$$-۲<x<۱\Rightarrow f(x)=۳x+۶+۳x-۳-۴x=۲x+۳$$
$$x\geq ۱\Rightarrow f(x)=۳x+۶-۳x+۳-۴x=-۴x+۹$$

تابع مفروض $-۲<x<۱$ و $f(x)=۲x+۳$ صعودی است.

$$y=۲x+۳\to x=\frac{y-۳}{۲}\to f'(x)=\frac{x-۳}{۲}$$
$$-۲<x<۱\to -۱<۲x+۳<۵\to D_{f'}=(-۱,۵)$$

-سنجش-۱۳۹۴-متوسط

۱۳.گزینه ۳ راه حل اول:

$$\begin{cases} f\ \text{صعودی اکید} \\ f(۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>۱ \to f(x)>۰ \\ x<۱ \to f(x)<۰ \end{cases}$$

$$y=\sqrt{(x+۴)f(۳-x)}$$

$$(x+۴)f(۳-x)\leq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۴=۰ \to x+-۴ \\ ۳-x=۱ \to x=۲ \end{cases}$$

		-۴		$+۲$	
$x+۴$	$-$	۰	$+$		$+$
$f(۳-x)$	$+$		$+$	۰	$-$
$(x+۴)f(۳-x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$$D=[-۴,۲]$$

راه حل دوم: با جاگذاری $x=۳$ گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ رد می‌شوند زیرا رادیکال فرجه‌ی زوج منفی می‌شود پس گزینه‌ی ۳ جواب است.

-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۱۴.**گزینه ۳**

$$\text{نکته}:\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha \quad , \quad \cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\tan(\frac{۵\pi}{۸})=\tan(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸})=-\cot\frac{\pi}{۸}=\frac{-۱}{\tan\frac{\pi}{۸}} \quad (*)$$

حال مقدار $\tan\frac{\pi}{۸}$ را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

روش اول: نکته: $\tan ۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

$$\tan\frac{\pi}{۴}=\frac{۲\tan\frac{\pi}{۸}}{۱-\tan^۲\frac{\pi}{۸}}\xrightarrow{\tan\frac{\pi}{۸}=x}۱=\frac{۲x}{۱-x^۲}\Rightarrow x^۲+۲x-۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{۸}}{۲}\xrightarrow{\tan\frac{\pi}{۸}>۰}\tan\frac{\pi}{۸}=-۱+\sqrt{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

روش دوم: نکته: $\tan\alpha=\dfrac{\sin ۲\alpha}{۱+\cos ۲\alpha}$

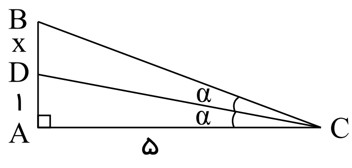
$$\tan\frac{\pi}{۸}=\frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{۱+\cos\frac{\pi}{۴}}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$$

با جایگذاری در $(*)$ داریم:

$$\tan\frac{۵\pi}{۸}=\frac{-۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}}=-۱-\sqrt{۲}\ \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=\!=}\ a-\sqrt{b}\Rightarrow\begin{cases} a=-۱ \\ b=۲ \end{cases}\Rightarrow a-b=-۳$$

-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

۱۵.**گزینه ۲** در مثلث ABC زاویه c برابر ۲α می‌باشد بنابراین:



$$\textbf{نکته}:\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\tan ۲\alpha=\frac{۲(\frac{۱}{۵})}{۱-(\frac{۱}{۵})^۲}=\frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{x+۱}{۵} \Rightarrow \frac{x+۱}{۵} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow ۱۲x + ۱۲ = ۲۵$$

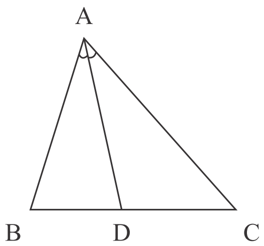
$$\Rightarrow x = \frac{۱۳}{۱۲} \Rightarrow AB = ۱ + x = ۱ + \frac{۱۳}{۱۲} = \frac{۲۵}{۱۲}$$

$$\xrightarrow{AC=۵} BC = \sqrt{AB^۲ + AC^۲} = \sqrt{\frac{۲۵^۲}{۱۲^۲} + ۵^۲} = \sqrt{\frac{۲۵^۲ + (۵\times ۱۲)^۲}{۱۲^۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۵^۲(۵^۲ + ۱۲^۲)}{۱۲^۲}} = \sqrt{\frac{۵^۲ \times ۱۳^۲}{۱۲^۲}} = \frac{۵\times ۱۳}{۱۲} = \frac{۶۵}{۱۲}$$

بنابراین محیط $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر است با: $AB + AC + BC = \frac{۲۵}{۱۲} + ۵ + \frac{۶۵}{۱۲} = \frac{۲۵+۶۰+۶۵}{۱۲} = \frac{۱۵۰}{۱۲} = ۱۲/۵$

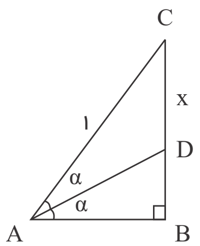
-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت



۱۶.**گزینه ۲** نکته (قضیهٔ نیمساز): در مثلث ABC، اگر AD نیمساز باشد، آن‌گاه: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{۱} = \frac{BD}{x} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = x$$

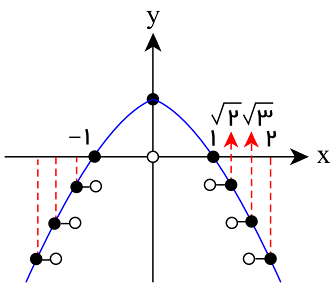


با توجه به شکل نسبت $\frac{BD}{AB}$ برابر $tan\alpha$ است، پس: $x = \tan\alpha$

-گزینه ۲-۱۳۹۷-سخت

۱۷.**گزینه ۳**

نمودار شامل ۸ پاره‌خط موازي محور xها با طول‌هاي نابرابر و يك نقطه $A\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ است، زيرا در رسم $y=[f]$ كافي است نمودار f را روي خطوط افقي $y=k$ تصوير كنيم.



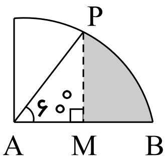
-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۸.**گزینه ۳** می‌دانیم: در دایره‌ای به شعاع r، مساحت قطاعی با زاویه مرکزی θ (رادیان) برابر است با:

$$S = \frac{\theta}{۲} \times r^۲$$

باتوجه به شکل داریم:

$$AM=\frac{AB}{۲}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۲}=\sqrt{۶}\Rightarrow \sin\widehat{P}=\frac{AM}{AP}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \widehat{P}=\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\text{قائم الزاویه}\ \overset{\triangle}{APM}}\widehat{A}=\frac{\pi}{۳}(rad)$$



$$PM=\sqrt{AP^۲-AM^۲}=\sqrt{۲۴-۶}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AMP}}=\frac{۱}{۲}AM\times PM=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶}\times ۳\sqrt{۲}=۳\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{هاشور}}=SABP-S_{\overset{\triangle}{AMP}}=\frac{\frac{\pi}{۳}}{۲}\times(۲\sqrt{۶})^۲-۳\sqrt{۳}=۴\pi-۳\sqrt{۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۱۹.**گزینه ۳**   **نکته ۱: اگر یک رابطه که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است. بخواهد تابع باشد نباید مؤلفه اول هیچ دو زوج مرتب متمایزی با یکدیگر برابر باشد؛ یعنی اگر مؤلفه اولشان برابر بود، مؤلفه دوم آن‌ها نیز برابر باشد.**

نکته ۲: یک تابع که به صورت زوج مرتب نمایش داده شده است، زمانی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه دوم برابر نباشد؛ یعنی اگر مؤلفه دومشان برابر بود، مؤلفه اول آنها نیز برابر باشد.

نکته ۳: اگر f معکوس پذیر باشد، آنگاه داریم:

$$f^{-۱}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$$

مطابق نکته ۲ داریم:

$$(۳a-۲,b),(a,b)\in f\Rightarrow ۳a-۲=a\Rightarrow a=۱\Rightarrow f=\{(۱,b),(۲,۳),(۱,۲b-۱),(۱,b)\}$$

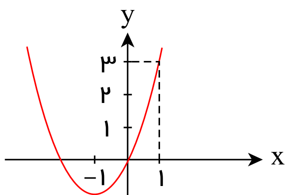
رابطه باید تابع باشد، پس مطابق نکته ۱ داریم:

$$(۱,b),(۱,۲b-۱)\in f\Rightarrow ۲b-۱=b\Rightarrow b=۱$$

$$f=\{(۱,۱),(۲,۳)\}\Rightarrow f^{-۱}(a+۲b)=f^{-۱}(۳)=۲=a+b$$

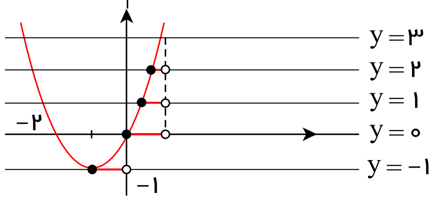
-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۲۰.**گزینه ۳**



منحنی $y=x^۲+۲x$ را رسم می‌کنیم تابع $x^۲+۲x$ در بازه $-۱,۱$ به صورت اکیداً صعودی است، در نتیجه تابع f صعودی است.

$f(-۱)=[-۱]=-۱\ ,\ \ f(۱)=[۳]=۳$ لذا مقادیر $f(x)$ پاره خطها به عرضهای $-۱,۰,۱,۲$ می‌باشد و تعداد آن‌ها ۴ می‌باشد.

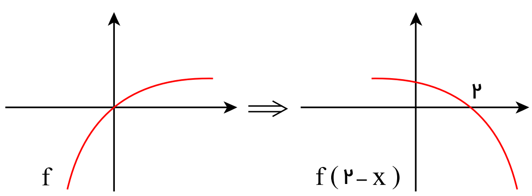


راه حل دوم: نمودار $f(x)=[x^۲+۲x]$ در بازه $[-۱,۱]$ را رسم می کنیم. توجه دارید که $f(-۱)=-۱$ و $f(۱)=۳$ می باشد.

-سنجش-۱۳۹۴-متوسط

۲۱.**گزینه ۱**

ابتدا نمودار $f(x)$ و $f(۲-x)$ را رسم می کنیم.

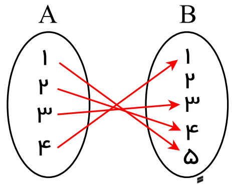


		۰		۲	
$f(۲-x)$	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
$xf(۲-x)$	−	۰	+	۰	−

$$\Rightarrow D_g=[۰\ ,\ ۲]$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۲۲.**گزینه ۴**   **اگر $f:A\Rightarrow B$ یک تابع باشد، تعداد توابع تعریف شده از A به B برابر $۵^۴$ است. اگر بخواهیم تابع $f:A\Rightarrow B$ نزولی اکید باشد، کافی است از مجموعه‌ی B چهار عضو انتخاب کنیم و فقط به یک روش خودمان آن را به صورت نزولی بچینیم:**



مثلاً فرض کنید ۲ حذف شده باشد.

$\binom{۵}{۴} = ۵ \Rightarrow$ **تعداد توابع نزولی اکید**

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت-

۲۳.**گزینه ۲**

$$\sin^۲\alpha-\sin^۲\beta=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}-\frac{۱-\cos ۲\beta}{۲}=\frac{۱}{۲}(\cos ۲\beta-\cos ۲\alpha)=\frac{۱}{۲}(-۲\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha))$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\Rightarrow \sin^۲ ۷x-\sin^۲ ۲x=\sin(۷x+۲x)\times\sin(۷x-۲x)=\sin ۹x\cdot\sin ۵x$$
$$f(x)=\frac{\sin ۵x}{\sin ۹x\sin ۵x}=\frac{۱}{\sin ۹x}=\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۶}}=۲$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت-

۲۴.**گزینه ۱**

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\tan^{-۱}\dfrac{۱}{x-۱}=\tan^{-۱}(+\infty)=\dfrac{\pi}{۲}\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\tan^{-۱}\dfrac{۱}{x-۱}=\tan^{-۱}(-\infty)=-\dfrac{\pi}{۲}\end{cases}$$ $\Rightarrow$ باید در نقطه $x=۱$ منحنی پرش داشته باشد

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\tan^{-۱}\frac{۱}{x-۱}=\tan^{-۱}(۰^+)=۰^+$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\tan^{-۱}\frac{۱}{x-۱}=\tan^{-۱}(۰^-)=۰^-$$

با توجه به اطلاعات بدست آمده نمودار گزینه‌ی ۱ درست است.

لازم به ذکر است که با محاسبه‌ی حد راست و چپ تابع در نقطه‌ی $x=۱$ و با توجه به گزینه‌ها به راحتی می‌توان تشخیص داد که گزینه‌ی ۱ صحیح است.

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت-

۲۵.**گزینه ۲**

نکته: $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$

نکته: اگر $\sin x=\sin\alpha$، **آنگاه:** $\begin{cases}x=۲k\pi+\alpha\\ x=۲k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$

راه‌حل اول:

نکته: اگر $\tan x=\tan\alpha$، **آنگاه:** $x=k\pi+\alpha$

$$\cos ۲x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x=\cos^۲ x\Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x=\cos^۲ x\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x=۱-\cos^۲ x$$
$$=\sin^۲ x$$
$$\sqrt{۳}\sin x\cos x=\sin^۲ x\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\ \tan x=\sqrt{۳}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{۳}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ برابر است با:

$$\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}=\frac{۸\pi}{۳}$$

راه‌حل دوم:

نکته: $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$

$$۲\cos ۲x+\sqrt{۳}\sin ۲x=۲\cos^{۲}=\cos ۲x+۱\Rightarrow \cos ۲x+\sqrt{۳}\,Sin۲x=۱\Rightarrow \frac{۱}{۲}Cos۲x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۲x$$

$$=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases} ۲x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۲x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ برابر است با:

$$\pi+\frac{\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}=\frac{۸\pi}{۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۲۶.**گزینه ۲**

$$\sin^{۲}\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

روش اول: نکته: می‌دانیم: $\sin^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$A=\frac{\sin^{۲}۸۰-\sin^{۲}۲۰^{\circ}}{\cos ۱۰^{\circ}}=\frac{\sin(۱۰۰^{\circ})\sin ۶۰^{\circ}}{\cos ۱۰^{\circ}}=\frac{\sin(۹۰^{\circ}+۱۰^{\circ})\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\cos ۱۰^{\circ}}=\frac{\cos ۱۰^{\circ}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\cos ۱۰^{\circ}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

روش دوم:

نکته : $\cos p-\cos q=-۲\sin\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}$

$$\begin{cases}\sin^{۲}۸۰^{\circ}=\frac{۱-\cos ۱۶۰^{\circ}}{۲} \\ \sin^{۲}۲۰^{\circ}=\frac{۱-\cos ۴۰^{\circ}}{۲}\end{cases}\Rightarrow \sin^{۲}۸۰^{\circ}-\sin^{۲}۲۰^{\circ}=\frac{۱-\cos ۱۶۰^{\circ}}{۲}-\frac{۱-\cos ۴۰^{\circ}}{۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\cos ۴۰^{\circ}-\cos ۱۶۰^{\circ})$$

$$=\frac{۱}{۲}(۲\sin ۱۰۰^{\circ}\times\sin ۶۰^{\circ})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos ۱۰^{\circ}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۲۷.**گزینه ۳**

می‌دانیم که: $۸۰+۱۰=۹۰\Rightarrow \sin ۸۰=\cos ۱۰$

$$\frac{۱}{\sin ۱۰^{\circ}}-\frac{\sqrt{۳}}{\sin ۸۰^{\circ}}=\frac{\sin ۸۰^{\circ}-\sqrt{۳}\sin ۱۰}{\sin ۱۰^{\circ}\ \sin ۸۰^{\circ}}=\frac{۲(\frac{۱}{۲}\cos ۱۰^{\circ}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin ۱۰^{\circ})}{\sin ۱۰^{\circ}\ \cos ۱۰^{\circ}}$$

$$=\frac{۲(\sin ۳۰\cdot\cos ۱۰-\cos ۳۰\cdot\sin ۱۰}{\sin ۱۰\cdot\cos ۱۰}=\frac{۲\sin(۳۰^{\circ}-۱۰^{\circ})}{\sin ۱۰^{\circ}\ \cos ۱۰^{\circ}}=\frac{۲\sin ۲۰^{\circ}}{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰^{\circ}}=۴$$

نکات: $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(۲\alpha)=۲\sin\alpha\cos\alpha$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت

۲۸.گزینه ۴

$$y=\frac{۱}{۲}\left(x+\sqrt{x^{۲}+۴}\right)$$

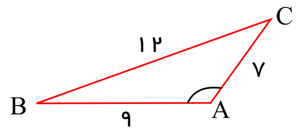
$$۲y=x+\sqrt{x^{۲}+۴}\rightarrow ۲y-x=\sqrt{x^{۲}+۴}\rightarrow ۴y^{۲}-۴yx+\cancel{x^{۲}}=\cancel{x^{۲}}+۴$$

$$\rightarrow ۴yx=۴y^{۲}-۴\rightarrow x=\frac{y^{۲}-۱}{y}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x}$$

$$\rightarrow f^{-۱}(x)=x-\frac{۱}{x}\rightarrow f^{-۱}(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}-x\rightarrow f^{-۱}(x)+f^{-۱}(\frac{۱}{x})=۰$$

-سراسری-۱۳۹۵-سخت

۲۹.گزینه ۴ روش اول: از قضیه کسینوس ها استفاده می کنیم:



$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}-۲AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}$$

$$۱۴۴=۸۱+۴۹-۲\times ۹\times ۷\cdot\cos\widehat{A}\Rightarrow\cos\widehat{A}=\frac{-۱}{۹}$$

$$\sin\widehat{A}=\sqrt{۱-\cos^{۲}\widehat{A}}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۸۱}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۹}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times AB\times AC\times\sin\widehat{A}=\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۷\times\frac{۴\sqrt{۵}}{۹}=۱۴\sqrt{۵}$$

روش دوم: مساحت مثلثی با اضلاع a و b و c برابر است با:

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\ ,\quad P=\frac{a+b+c}{۲}$$

$$P=\frac{۹+۷+۱۲}{۲}=۱۴$$

$$S=\sqrt{۱۴(۵)(۷)(۲)}=۱۴\sqrt{۵}$$

-سراسری-۱۳۹۳-سخت

۳۰.گزینه ۲ نکته: می‌دانیم اگر تابع f معکوس‌پذیر باشد و داشته باشیم $f(a)=b$ آن‌گاه خواهیم داشت: $f^{-۱}(b)=a$

با توجه به نکته بالا داریم:

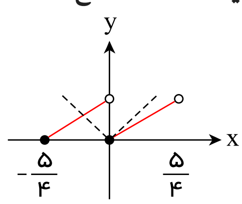
$$g^{-۱}(۱)=۴\ \rightarrow\ g(۴)=۱\quad (*)$$

حال اگر در عبارت داده شده به جای x مقدار $\frac{۱}{۲}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$f(۴x)=۳+۲g\left(\frac{۲}{x}\right)\xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}}f(۲)=۳+۲g(۴)\xrightarrow{(*)}f(۲)=۳+۲\times ۱=۵\ \Rightarrow\ f^{-۱}(۵)=۲$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۳۱.گزینه ۱ نمودار تابع $y=\frac{۴}{۵}x-[\frac{۴}{۵}x]$ متناوب با دوره تناوب $\frac{۵}{۴}$ است همواره $۰\leq y<۱$ است نمودارهای دو تابع غیر از مبداء در یک نقطه متقاطع‌اند.



$$\begin{cases}y=\frac{۴}{۵}x+۱\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\frac{۴}{۵}x+۱=-x\Rightarrow\frac{۹}{۵}x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۵}{۹}$$

روش دوم: با قرار دادن هر یک از گزینه‌ها در معادله‌ی تلاقی $|x|=\left[\frac{۴x}{۵}\right]-\frac{۴x}{۵}$ به گزینه ۱ می‌رسیم.

-سنجش-۱۳۹۴-متوسط

۳۲.گزینه ۲

نکته: $\cos A+\cos B=۲\cos\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}$

نکته: $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$$\cos^۲ ۷x-\sin^۲ ۲x=\left(\frac{۱+\cos ۱۴x}{۲}\right)-\left(\frac{۱-\cos ۴x}{۲}\right)=\frac{\cos ۱۴x+\cos ۴x}{۲}=\cos ۹x\cos ۵x$$

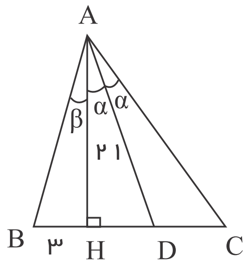
$$\Rightarrow \frac{\cos^۲ ۷x-\sin^۲ ۲x}{\cos ۲۲x}=\frac{\cos ۹x\cos ۵x}{\cos ۲۲x}$$

با جایگذاری $x=\frac{\pi}{۲۷}$ داریم:

$$\frac{\cos\frac{۹\pi}{۲۷}\cos\frac{۵\pi}{۲۷}}{\cos\frac{۲۲\pi}{۲۷}}=\frac{\cos\frac{۹\pi}{۲۷}\cos\frac{۵\pi}{۲۷}}{\cos(\pi-\frac{۵\pi}{۲۷})}=\frac{\cos\frac{۹\pi}{۲۷}\cos\frac{۵\pi}{۲۷}}{-\cos\frac{۵\pi}{۲۷}}=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۳۳.**گزینه ۴**



نکته: $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}\Rightarrow\tan(۴۵^\circ-\beta)=\frac{۱-\tan\beta}{۱+\tan\beta}$

نکته: $\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

$\beta+۲\alpha=۴۵^\circ\Rightarrow ۲\alpha=۴۵^\circ-\beta$ و $\tan\beta=\frac{BH}{AH}=\frac{۳}{۲۱}=\frac{۱}{۷}$

$$\tan ۲\alpha=\tan(۴۵^\circ-\beta)=\frac{۱-\tan\beta}{۱+\tan\beta}=\frac{۱-\frac{۱}{۷}}{۱+\frac{۱}{۷}}=\frac{۳}{۴}$$

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۳\tan^۲\alpha+۸\tan\alpha-۳=۰\xrightarrow{\tan\alpha>۰}\tan\alpha=\frac{-۸+\sqrt{۶۴+۳۶}}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۳۴.**گزینه ۲**

$$\sin\frac{۱۷\pi}{۶}=\sin(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin^{-۱}(\sqrt{۳}\sin\frac{۱۷\pi}{۶})=\sin^{-۱}(\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲})=\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۳۵.**گزینه ۳**

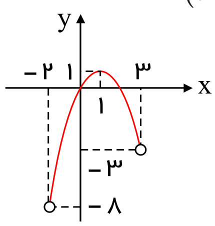
$$gof(x)=g(f(x))\overset{t=f(x)}{=\!=\!=}g(t)\ ;\ -۲<t<۳$$

بنابراین کافی است برد تابع $g(t)=۲t-t^۲=۱-(t-۱)^۲$ را به ازای $t\in(-۲,۳)$ به دست می‌آوریم.

$$-۲<t<۳\Rightarrow -۳<t-۱<۲\Rightarrow ۰\le(t-۱)^۲<۹\Rightarrow -۹<-(t-۱)^۲\le ۰$$

$$\Rightarrow -۸<۱-(t-۱)^۲\le ۱\Rightarrow -۸<g(t)\le ۱\Rightarrow R_g=(-۸,۱]$$

نمودار $g(x)$ در بازه‌ی $(-۲,۳)$ به‌صورت مقابل است:



-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت