۱.گزینه ۳

نکته: برای تابع $y=g(x)|f(x)|$ ریشه‌های $f(x)$ برای تابع y، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$f(x)=(x-۱)|x^{۲}+x-۲|=(x-۱)|(x-۱)(x+۲)|$$

$x=-۲$ برای تابع f بحرانی است، زیرا ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق هستند.

حال ریشه‌های $f'(x)=۰$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\pm(x-۱)^{۲}(x+۲)\Rightarrow f'(x)=\pm(۲(x-۱)(x+۲)+(x-۱)^{۲})$$
$$\Rightarrow f'(x)=\pm((x-۱)(۳x+۳))=۰\Rightarrow x=\pm۱$$

پس در نقاط ±۱ مشتق صفر است و این نقاط نیز بحرانی هستند، بنابراین:

$\{-۲\,,\,-۱\,,\,۱\}$ مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع است.

مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $=-۲-۱+۱=-۲$

۲.گزینه ۳ برای آن‌که تابع دارای $\max$ مطلق باشد، باید $\cos(\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})=-۱$ باشد. چون کسینوس همواره عددی بین ۱- تا ۱ است برای این منظور لازم است داشته باشیم:

$$\cos(\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴})=-۱=\cos\pi$$

$$\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi\Rightarrow x=۶k+\frac{۱۵}{۴}\qquad k\in\mathbb{Z}$$ (طول نقاط $\max$ مطلق)

مثلاً :

k	۰	۱	۱-
x	$\frac{۱۵}{۴}$	$\frac{۲۹}{۴}$	$-\frac{۹}{۴}$

۳.گزینه ۲

$$f'(x)=۴x^{۳}-۱۶x=۴x(x^{۲}-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{ق.ق}\\ x=۲ & \text{غ.ق.ق}\\ x=-۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

x	۳-	۲-	۰	۱
$f(x)$	$k+۹$	$k-۱۶$	k	$k-۷$

$$\Rightarrow\begin{cases}\max(f)=k+۹\\ \min(f)=k-۱۶\end{cases}$$

طبق فرض $\max(f)=-\min(f)$ ، پس:

$$k+۹=-(k-۱۶)=۱۶-k\Rightarrow ۲k=۷\Rightarrow k=\frac{۷}{۲}$$

۴.گزینه ۴ می دانیم اگر تابعی دارای مجانب قائم باشد غیر یکنوا محسوب می شود. بنابراین تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad-bc>۰$ در هر شاخه صعودی اکید است:

$$ad-bc=۲(-a-۲)-(۱-a)>۰\Rightarrow -۲a-۴-۱+a>۰\Rightarrow a<-۵\quad I$$

چون تابع هموگرافیک روی هر شاخه صعودی است و نه روی کل دامنه. اگر بخواهد برای $x<-۶$ صعودی اکید باشد، باید مجانب قائم داخل بازه‌ی $(-\infty,-۶)$ قرار نگیرد.

$$x=a+۲\Rightarrow a+۲\geq-۶\Rightarrow a\geq-۸\quad II$$
$$I\cap II\Rightarrow -۸\leq a<-۵$$

۵.گزینه ۱ چون عرض اکسترمم $y=-۴$ است، پس معادله‌ی $f(x)=-۴$ دارای ریشه‌ی مضاعف است:

$$\frac{x^۲-۴x+a}{x-۱}=-۴ \Rightarrow x^۲-۴x+a=-۴x+۴ \Rightarrow x^۲+a-۴=۰ \Rightarrow \Delta=۰^۲-۴(۱)\cdot(a-۴)=۰ \Rightarrow a=۴$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^۲-۴x+۴}{x-۱}=\frac{(x-۲)^۲}{x-۱}=(x-۲)^۲\times\frac{۱}{x-۱}$$

نقطه‌ی $x=۲$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است (در همسایگی $x=۲$ مقدار y نامنفی است)، (رفتار تابع حول $x=۲$ هم رفتار تابع $y=\frac{(x-۲)^۲}{۱}$ است)

توابعی که صورت درجه دوم و مخرج درجه اول است یا اکسترمم موضعی ندارد و یا در صورت وجود اکسترمم موضعی باید یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی داشته باشد بنابراین $y=-۴$ عرض ماکزیمم نسبی است.

۶.گزینه ۲ مختصات نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته در خود تابع صدق می‌کند.

راه‌حل اول:

$$f(۱)=۲ \Rightarrow \frac{a+b}{۱+a}=۲ \Rightarrow b=a+۲$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(۱)=۰ \\ f'(x)=\dfrac{a(x^۲+a)-۲x(ax+b)}{(x^۲+a)^۲}\end{array}\right\} \Rightarrow a(۱+a)-۲(a+b)=۰$$

$$\Rightarrow a(۱+a)-۲(a+(a+۲))=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ a=۴\end{cases}$$

به‌ازای $a=-۱$ تابع در $M(۱\,,\,۲)$ تعریف نشده است، پس $a=۴$ است، لذا: $b=۶$

$$f(x)=\frac{۴x+۶}{x^۲+۴} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۴(x^۲+۳x-۴)}{(x^۲+۴)^۲}=\frac{-۴(x+۴)\cdot(x-۱)}{(x^۲+۴)^۲}$$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−	
f		↗	max	↘	

راه‌حل دوم: در توابع کسری که صورت و مخرج‌شان مشتق‌پذیر است، مختصات اکسترمم تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^۲+a}\overset{H}{=}\frac{a}{۲x} \Rightarrow \frac{a}{۲}=۲ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow b=۶$$

۷.گزینه ۳ نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

$$۲r+h=۳ \Rightarrow h=۳-۲r \qquad V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h=\frac{۱}{۳}\pi r^۲(۳-۲r)=\frac{\pi}{۳}(۳r^۲-۲r^۳)$$

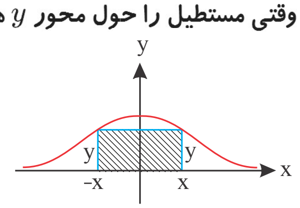
$$V'=\frac{\pi}{۳}(۶r-۶r^۲)=۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۳}(۶r)(۱-r)=۰ \xrightarrow{r>۰} r=۱ \xrightarrow{h=۳-۲r} h=۱$$

۸.گزینه ۳ نکته: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $\pi r^۲ h$

وقتی مستطیل را حول محور y ها دوران می‌دهیم، استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی x و ارتفاع y حاصل می‌شود.

$$V=(\pi x^۲)y=\pi x^۲ e^{-x^۲}$$

$$V'=\pi(۲xe^{-x^۲}-۲x^۳e^{-x^۲})=۲\pi xe^{-x^۲}(۱-x^۲)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۱$$



بنابراین بیشترین حجم استوانه‌ای به وجود آمده برابر است با:

$$V_{\max}=\pi\cdot ۱\cdot e^{-۱}=\frac{\pi}{e}$$

۹.گزینه ۱ ابتدا ریشه‌های این تابع را به‌دست آورده و سپس ریشه‌ی منفی را در مشتق اول و مشتق دوم قرار می‌دهیم.

$$y=0 \Rightarrow x\ln(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \ln(x+2)=0 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2} \rightarrow y'(-1)=\underbrace{\ln(1)}_{\text{صفر}}-1 \Rightarrow y'(-1)<0$$

چون مشتق اول در نقطه‌ی $x=-1$ منفی است پس تابع در اطراف این نقطه نزولی است.

$$y''=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2} \Rightarrow y''(-1)=3>0$$

چون مشتق دوم در $x=-1$ مثبت است پس تقعر تابع در این نقطه رو به بالاست که تنها گزینه‌ای که نزولی با تقعر روبه‌بالاست گزینه‌ی ۱ است.

۱۰.گزینه ۲ در صورتی تقعر یک تابع رو به پایین است که $y''<0$ باشد.

x		0		2	
y''	$+$		$-$		$+$

$$y=\begin{cases} x(x-3)^2 & x\ge 0 \\ -x(x-3)^2 & x<0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2-12x+9 & x>0 \\ -3x^2+12x-9 & x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' = \begin{cases} 6x-12 & x>0 \rightarrow 6x-12<0 \rightarrow x<2 \rightarrow 0<x<2 \\ -6x+12 & x<0 \rightarrow -6x+12<0 \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<0 \end{cases} \text{غ ق ق} \end{cases}$$

در بازه $(0,2)$ تقعر رو به پایین است و ماکزیمم $b-a$ برابر ۲ است.

۱۱.گزینه ۱ نکته: فقط در نقطه عطف، خط مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند.

نکته: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول a واقع بر آن عبارتست از: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

ابتدا نقطه‌ی عطف تابع را می‌یابیم:

$$y'=3x^2-6x+a \Rightarrow y''=6x-6=0 \Rightarrow x=1 \xrightarrow{\text{در تابع صدق می‌دهیم}} y=1-3+a+b=a+b-2$$

$\text{نقطه عطف}=(1,a+b-2)$ چون در نقطه‌ي عطف بر تابع مماس است پس شیب برابر است با:

$m=y'(1)=3-6+a=a-3 \Rightarrow$ معادله‌ی خط مماس $y-(a+b-2)=(a-3)(x-1)$

طبق فرض این خط از مبدأ مختصات عبور می‌کند پس مختصات مبدأ در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$0-a-b+2=-a+3 \Rightarrow b=-1$$

۱۲.گزینه ۳

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f''(x)=\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(1+x)$$

$x=-1$ ریشه‌ی ساده $y''=0$ و طول نقطه‌ی عطف است. همچنین می‌دانیم اگر در نقطه‌ای مشتق تابع موجود باشد و مشتق دوم در آن نقطه تغییر علامت دهد، آن نقطه، طول نقطه‌ی عطف تابع است، پس $x=0$ نیز طول نقطه‌ی عطف تابع است. چون علامت مشتق دوم در اطراف آن تغییر می‌کند.

$$f''(x)=\frac{4x+4}{9\sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow \begin{cases} f''_{+}(0)>0 \\ f''_{-}(0)<0 \end{cases}$$

۱۳.گزینه ۳ نکته: تابعی که نمودار آن بر محور x ها مماس باشد، در آن نقطه دارای ریشه مضاعف است.

با استفاده از نکته‌ی بالا در این تابع باید یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف داشته باشیم. دو حالت رخ می‌دهد، یا $x=1$ ریشه‌ی x^2+mx+9 هم می‌باشد و یا این‌که x^2+mx+9 خودش ریشه‌ی مضاعف دارد.

۱) ریشه‌ی عبارت دوم باشد $x = ۱ \Rightarrow ۱ + m + ۹ = ۰ \Rightarrow m = -۱۰$

$\Rightarrow y = (x - ۱)\left(x^۲ - ۱۰x + ۹\right) = (x - ۱)^۲ (x - ۹) \rightarrow$ ریشه‌ی مضاعف $x = ۱$ و ریشه‌ی ساده : $x = ۹$

۲) عبارت دوم دارای ریشه‌ی مضاعف باشد : $\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 36 = 0 \rightarrow m^2 = 36 \rightarrow m = \pm 6$

$$\begin{cases} m = 6 \Rightarrow y = (x-1)\left(x^2 + 6x + 9\right) = (x-1)(x+3)^2 \Rightarrow \text{ریشه‌ی مضاعف : } x = -3 \text{ و ریشه‌ی ساده: } x = 1 \\ m = -6 \Rightarrow y = (x-1)\left(x^2 - 6x + 9\right) = (x-1)(x-3)^2 \Rightarrow \text{ریشه‌ی مضاعف : } x = 3 \text{ و ریشه‌ی ساده: } x = 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، ریشه‌ی مضاعف سمت راست ریشه‌ی ساده قرار دارد پس باید بزرگ‌تر از ریشه‌ی ساده باشد بنابراین حالت $m = 6$ و $m = -10$ قابل قبول نیست در نتیجه تنها مقدار $m = -6$ قابل قبول است.

۱۴.گزینه ۳ در نقطه‌ی $x = 2$ مقدار y به ماکزیمم و در نقطه‌ی $x = -1$ مقدار y به می‌نیمم خود می‌رسد. پس با توجه به این‌که $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ است:

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow \sin^{-1}\dfrac{a}{2+b} = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{2+b} = 1 \Rightarrow a = 2 + b \\ x = -1 \Rightarrow \sin^{-1}\dfrac{a}{-1+b} = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{-1+b} = -1 \Rightarrow a = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow ab = -\frac{3}{4}$$

۱۵.گزینه ۴ نمودار تابع محور x ها را قطع نمی‌کند، پس $y = 0$ ریشه ندارد، پس $a = 0$ (وگرنه $x = \frac{1}{a}$ ریشه است.). حال چون عرض (y) اکسترمم برابر ۱ است، پس باید معادله تلاقی این خط با منحنی ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\frac{-1}{x^2 + bx} = 1 \Rightarrow x^2 + bx + 1 = 0 \xrightarrow[\text{داشتن معادله درجه دوم}]{\text{شرط ریشه مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow b = -2 \quad \text{غ ق ق}$$

$b = -2$ به این دلیل مورد قبول نیست که با این عدد نقطه‌ی تماس به طول مثبت خواهد شد در صورتی‌که نقطه تماس منفی است.

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \qquad f(2) = \frac{-1}{4+4} = -\frac{1}{8}$$

برای پیدا کردن عرض اکسترمم بدون به‌دست آوردن طول آن، می‌توانیم y را برابر عدد ثابت k فرض کرده و شرط ریشه‌ی مضاعف داشتن معادله‌ی $f(x) = k$ را تحقیق کنیم.

۱۶.گزینه ۲ مجانب قائم و مایل یکدیگر را روی محور xها قطع کرده‌اند و مجانب قائم $x = 2$ است. لذا مجانب مایل خطی است که از دو نقطه‌ی $A(2, 0)$ و $B(0, 2)$ می‌گذرد، پس: مجانب مایل $y = -x + 2$ است.

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + bx + c & -x + 2 \\ \quad \vdots & \overline{-ax - (2a + b)} \\ \hline 4a + 2b + c & \end{array} \qquad \text{مجانب مایل } y = -ax - 2a - b$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2 - 4x + c}{2 - x}$$

با توجه به شکل منحنی در $x = 0$ مینیمم دارد پس $y'_{(0)} = 0$ است پس:

$$\Rightarrow y' = \left.\frac{(2x - 4)(2 - x) + x^2 - 4x + c}{(2 - x)^2}\right|_{x = 0} = 0 \Rightarrow -8 + c = 0 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow b - c = -12$$

۱۷.گزینه ۳ راه‌حل اول: اولاً $a < 0$ است، زیرا $f(x) \leq 0$ ثانیاً $f'(\frac{1}{2}) = 0$

$$f(x) = a\frac{x^2}{e^{bx}} \Rightarrow f'(x) = a\frac{2x(e^{bx}) - be^{bx}x^2}{e^{2bx}} = a \cdot \frac{x \cdot e^{bx} \cdot (2 - bx)}{e^{2bx}}$$

$$= f'(x) = a\frac{x(2 - bx)}{e^{bx}} \xrightarrow{f'(\frac{1}{2}) = 0} 2 - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 4$$

راه‌حل دوم: اولاً $a < ۰$ است، ثانیاً با توجه به مجانب افقی در $x \to +\infty$ ، $b > ۰$ است، پس فقط گزینه‌ی ۳ می‌تواند درست باشد.

۱۸.گزینه ۲ مختصات اکسترمم نسبی در دو جای معادله‌ی منحنی بکار می‌رود.

۱- مختصات اکسترمم نسبی در معادله‌ی منحنی صدق می‌کند.
۲- طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی ریشه‌ی مشتق اول است.
بنابراین داریم:

$$f(۱) = -۲ \Rightarrow \frac{a+۱}{b+۱} = -۲ \Rightarrow a+۱ = -۲-۲b \Rightarrow a+۲b = -۳ \Rightarrow b = \frac{-a-۳}{۲} \qquad (۱)$$

$$f'(x) = \frac{a\cdot(x^۲+b) - ۲x\cdot(ax+۱)}{(x^۲+b)^۲} \Rightarrow f'(۱) = ۰ \Rightarrow a\cdot(۱+b) - ۲(a+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow a+ab-۲a-۲ = ۰ \Rightarrow -a+ab = ۲ \qquad (۲)$$

$$۱,۲ \Rightarrow -a + a\cdot(\frac{-a-۳}{۲}) = ۲ \Rightarrow \begin{matrix} a = -۴ \to b = \frac{۱}{۲} \\ a = -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a-b = -۴-\frac{۱}{۲} = -\frac{۹}{۲}$$

۱۹.گزینه ۳ می‌دانیم: ریشه‌ی ساده‌ی مشتق دوم طول نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوم است.
باتوجه به شکل، نقطه‌ی $(۱,۰)$ عطف تابع است. بنابراین:

$$\begin{cases} f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱+a+b+۲ = ۰ \Rightarrow a+b = -۳ \\ f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۶+۲a = ۰ \Rightarrow ۲a = -۶ \Rightarrow a = -۳ \end{cases} \Rightarrow b = ۰$$

۲۰.گزینه ۱ طول مجانب قائم منفی است و تابع در دو همسایگی آن به $+\infty$ میل می‌کند. پس مخرج ریشه‌ی مضاعف دارد و باید Δ مخرج برابر صفر باشد:

$$c^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow c = \pm ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = ۴: x^۲+۴x+۴ = (x+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad \text{ق ق} \\ c = -۴: x^۲-۴x+۴ = (x-۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

وقتی $x \to \infty$ میل می‌کند $f(x)$ یک مجانب افقی $y = ۰$ دارد. پس باید درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر باشد یعنی $a = ۰$.
پس:

$$f(x) = \frac{bx-۱}{(x+۲)^۲}$$

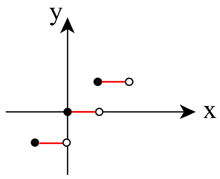
باتوجه به شکل، $x = ۰$ طول Min نسبی و ریشه‌ی ساده‌ی مشتق است.

$$f'(۰) = ۰ \Rightarrow f'(x) = \frac{b(x+۲)^۲ - ۲(x+۲)(bx-۱)}{(x+۲)^۴} = \frac{b(x+۲)-۲(bx-۱)}{(x+۲)^۳} = \frac{-bx+۲b+۲}{(x+۲)^۳}$$

$$\xrightarrow{f'(۰)=۰} -b(۰)+۲b+۲ = ۰ \Rightarrow b = -۱ \qquad \Rightarrow \text{بازنویسی}: f(x) = \frac{-x-۱}{(x+۲)^۲} \Rightarrow f(-۱) = ۰$$

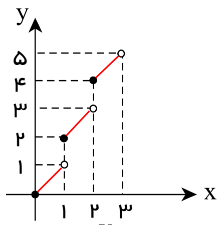
۲۱.گزینه ۲ ضمن رسم هر یک از گزینه‌ها، به بررسی نقطه یا نقاط مینیمم نسبی می‌پردازیم.
در همه نقاط غیر صحیح مینیمم و ماکسیمم نسبی دارد و در همه نقاط صحیح، ماکسیمم نسبی دارد.

$I)\ \ y=[x]$

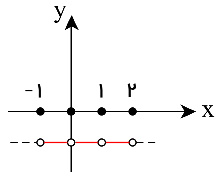


همچنان که می‌بینید، تابع در نقاط غیر صحیح اکسترمم نسبی ندارد. ولی در نقاط به طول صحیح، ماکسیمم نسبی دارد.

$II) \quad y = x + [x]$

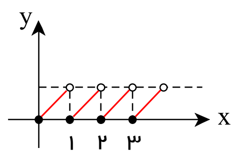


$III) \quad y = [x] + [-x]$



این تابع در نقاط به طول غیر صحیح ماکسیمم و مینیمم نسبی دارد.

$IV) \quad y = x - [x]$



این تابع در نقاط به طول صحیح، دارای مینیمم نسبی است.

۲۲.گزینه ۲ برای محاسبه‌ی اکسترمم نسبی می‌توانیم از آزمون مشتق اول و آزمون مشتق دوم استفاده کنیم در این تست از هر دو روش استفاده می‌کنیم.

۱) روش آزمون مشتق اول:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x \ , \ D_f = (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x}(x^2) = 2x \cdot \ln x + x = 0 \Rightarrow x \cdot (2\ln x + 1) = 0$$

$x = 0$ غ ق ق , $\ln x = -\frac{1}{2} \to \log_e^x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق (بحرانی)

x	$-\infty$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

$$\to f(e^{-\frac{1}{2}}) = (\frac{1}{\sqrt{e}})^2 \cdot ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e}(lne^{\frac{-1}{2}}) = -\frac{1}{2e}$$

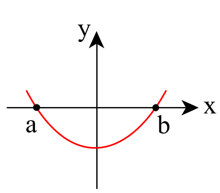
۲) روش آزمون مشتق دوم: پس از پیدا کردن نقطه‌ی بحرانی می‌توان به‌کمک آزمون مشتق دوم می‌توان به اکسترمم نسبی رسید.

$$f''(x) = 2\ln(x) + 2(\frac{1}{x}) \times x + 1 = 2\ln x + 3 > 0$$

چون f'' مثبت است پس تقعر منحنی رو به بالاست و نقطه‌ی بحرانی $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ طول min نسبی است و:

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = (\frac{1}{\sqrt{e}})^2 \cdot \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e}(\ln e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{-1}{2e}$$

۲۳.گزینه ۱

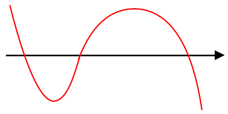


باتوجه به نمودار f' : تابع f' ابتدا در بازه $(-\infty, a)$ مثبت، سپس در بازه (a, b) منفی، سپس مجدداً در بازه $(b, +\infty)$ مثبت می‌شود. یعنی نمودار تابع f ابتدا در حالت صعودی، سپس نزولی و مجدداً صعودی خواهد بود و تنها گزینه «۱» می‌تواند درست باشد.

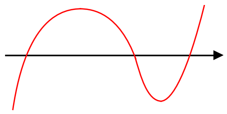
یا به عبارتی محل برخورد منحنی $f'(x)$ با محور xها نقطه اکسترمم نسبی است و اگر از پائین به بالا محور xها را قطع کند مینیمم تابع اصلی و اگر از بالا به پائین محور xها قطع این نقطه Max نسبی تابع اصلی است. بنابراین فقط گزینه ۱ درست است.

۲۴.گزینه ۱

برای اینکه معادله‌ی درجه‌ی **۳**، سه جواب متمایز داشته باشد، باید نمودار متناظرش ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد و به یکی از دو صورت زیر باشد.



یا



بنابراین نتیجه می‌شود که عرض نقاط اکسترمم باید مختلف‌العلامت باشند.

برای محاسبه عرض نقاط اکسترمم، ابتدا طول نقاط اکسترمم را یافته (ریشه‌های مشتق $y' = ۰$) سپس با جاگذاری در تابع اصلی (و نه تابع مشتق) عرض نقاط اکسترمم را می‌یابیم.

$$y = x^۳ - ۳x^۲ + m \to y' = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \to ۳x(x-۲) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

$$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + m \begin{cases} f(۰) = m \\ f(۲) = ۸ - ۳(۴) + m = m - ۴ \end{cases}$$

$$f(۰) \times f(۲) < ۰ \to m(m-۴) < ۰ \to$$

m		۰		۴	
$m(m-۴)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
			ج		

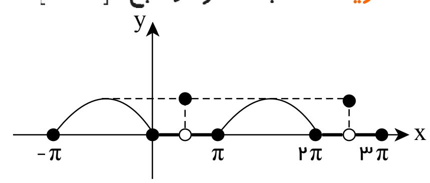
$$\to ۰ < m < ۴$$

۲۵.گزینه ۲ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sin x[\sin x]$ را رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۰ < x < \pi \\ ۲\pi < x < ۳\pi \end{cases} \to ۰ \le \sin x < ۱ \to [\sin x] = ۰ \to f(x) = ۰$$

$$x = \frac{\pi}{۲} \to f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}[\sin\frac{\pi}{۲}] = ۱$$

$$\begin{cases} \pi < x < ۲\pi \\ -\pi < x < ۰ \end{cases} \to -۱ \le \sin x < ۰ \to [\sin x] = -۱ \to f(x) = -\sin x$$



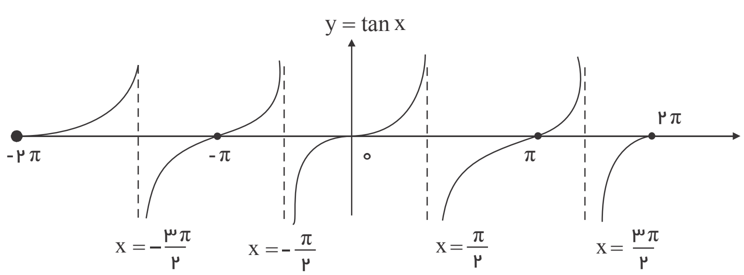
مطابق شکل تابع در بازه‌های $(-\pi, ۰), (\pi, ۲\pi), (۳\pi, ۴\pi), \cdots$ فقط یک اکسترمم دارد.

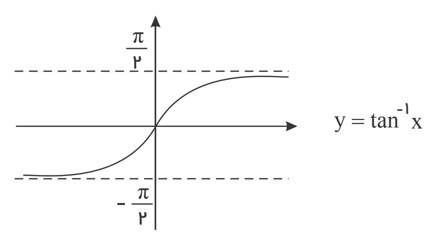
$$\max(b-a) = ۰ - (-\pi) = \pi = ۲\pi - \pi = \pi$$

۲۶.گزینه ۳ توجه: ۱ - برای رسم تابع $y = |f(x)|$، آن قسمت از نمودار تابع $y = f(x)$ که در زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

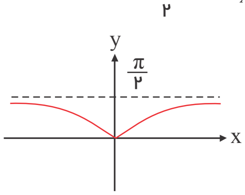
۲ - برای رسم $y = f|x|$، آن قسمت از نمودار تابع $y = f(x)$ که در سمت چپ محور yها قرار دارد را حذف نموده و قرینه‌ی قسمت باقی مانده را نسبت به محور yها در سمت چپ رسم می‌کنیم.

۳-

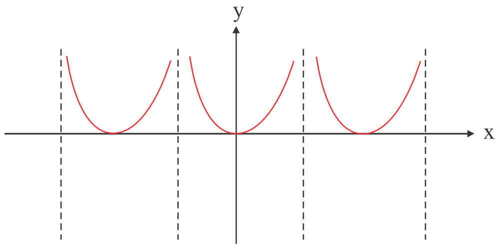




نمودار تابع $y = \tan^{-۱}|x|$ و $y = |\tan^{-۱} x|$ به شکل مقابل است و واضح است که نقطه‌ی عطف ندارند.

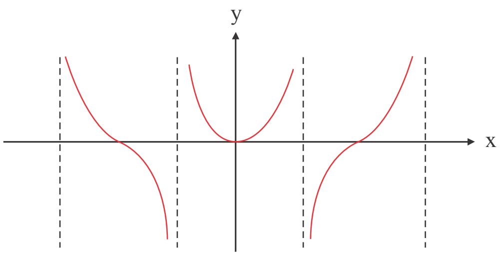


نمودار تابع $y = |\tan x|$ به شکل زیر است بنابراین این تابع نیز عطف ندارد.



حسین شفیع زاده	۱۱

نمودار تابع $y = \tan|x|$ به شکل زیر است و واضح است که در تمام نقاطی که نمودار محور طول ها را قطع می کند (غیر از $x = ۰$) تابع دارای عطف است.



۲۷.گزینه ۱ می‌دانیم $\sin(\cos^{-۱}x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ است. بنابراین:

$$f(x) = x\sqrt{۱ - x^۲} \qquad Df = [-۱, ۱]$$

$$f'(x) = \sqrt{۱ - x^۲} - \frac{۲x^۲}{۲\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{۱ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{۱ - ۲x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از: $x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$.

$$f(-۱) = f(۱) = ۰$$

$$f(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$f(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{-۱}{۲}$$

بنابراین مقدار می‌نیمم سراسری $\frac{-۱}{۲}$ و مقدار ماکزیمم سراسری $\frac{۱}{۲}$ است. پس:

$$\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}) = ۱$$

یادآوری: برای محاسبه اکسترمم های مطلق (سراسری) تابع پیوسته f در بازه‌ی $[a, b]$ کافیست نقاط بحرانی تابع f را در بازه‌ی $[a, b]$ یافته، سپس مقادیر تابع در این نقاط (بحرانی) را با $f(a)$ و $f(b)$ مقایسه کرده و از میان آن‌ها ماکسیمم و مینیمم مطلق f در بازه‌ی $[a, b]$ را تعیین کنیم.

پاسخنامه کلیدی آزمون با کد: ۳۹۴۰۷۴

۱- ۳	۲- ۳	۳- ۲	۴- ۴	۵- ۱
۶- ۲	۷- ۳	۸- ۳	۹- ۱	۱۰- ۲
۱۱- ۱	۱۲- ۳	۱۳- ۳	۱۴- ۳	۱۵- ۴
۱۶- ۲	۱۷- ۳	۱۸- ۲	۱۹- ۳	۲۰- ۱
۲۱- ۲	۲۲- ۲	۲۳- ۱	۲۴- ۱	۲۵- ۲
۲۶- ۳	۲۷- ۱			