۲۱. گزینه ۴

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{\pi}x^2 \Rightarrow f'(x)=\cos x+\frac{2}{\pi}x \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{2}{\pi} \Rightarrow x=\alpha\epsilon(0,\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{cases} x\in(0,\alpha):\sin x<\frac{2}{\pi} \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}>0 \Rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ x\in(\alpha,\frac{\pi}{2}):\sin x>\frac{2}{\pi} \Rightarrow f''(x)=-\sin x+\frac{2}{\pi}<0 \Rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

در نتیجه ابتدا تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا بوده و سپس رو به پایین است.

-سراسری-۱۳۹۱-متوسط

۲۲. گزینه ۲ باید به دنبال نقاط بحرانی در بازه‌ی $(-1,2)$ باشیم (ابتدا و انتهای بازه‌ی نقطه‌ی بحرانی به حساب نمی‌آیند).

ریشه‌های درون قدرمطلق نقاط بحرانی هستند:

$$f(x)=|x^3-x|=|(x-1)(x+1)x|=0 \Rightarrow x=\pm 1,0 \xrightarrow{x=-1\ \text{غ ق ق}} x=1,0$$

همچنین ریشه‌های معادله‌ی $f'(x)=0$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین مجموعه‌ی نقاط بحرانی تابع در فاصله $[-1,2]$ برابر است با: $\left\{0,1,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

-سراسری-۱۳۹۰-متوسط

۲۳. گزینه ۴ مجانب‌های تابع را در بی‌نهایت به کمک هم‌ارزی بدست می‌آوریم. لذا داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} ax+\sqrt{x^2+bx}=ax+\left|x+\frac{b}{2}\right|=\begin{cases} ax+x+\frac{b}{2}=x(a+1)+\frac{b}{2} & x\to+\infty \\ ax-x-\frac{b}{2}=x(a-1)-\frac{b}{2} & x\to-\infty \end{cases}$$

در $x\to+\infty$ مجانب افقی $y=-1$ است. لذا داریم:

$$x\cdot(a+1)+\frac{b}{2}=-1$$

$$a+1=0 \Rightarrow a=-1\ ,\ \frac{b}{2}=-1 \Rightarrow b=-2$$

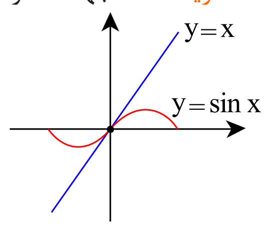
توجه: در بی‌نهایت هرگز دو عبارت مساوی یکدیگر نیستند بلکه هم‌ارز یکدیگرند یعنی ضرایب متغیرهای هم‌درجه با هم برابرند.

-سراسری-۱۳۸۹-متوسط

۲۴. گزینه ۲ جهت تقعر تابع را در اطراف نقطه $x=0$ بررسی می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-x+\sin x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^2-1+\cos x \xrightarrow{x=0} f'(0)=0-1+1=0$$

$$f''(x)=x-\sin x \Rightarrow \begin{cases} x<0: x<\sin x \Rightarrow f''(x)<0 \\ x>0: x>\sin x \Rightarrow f''(x)>0 \end{cases}$$



درنتیجه تقعر تابع $f(x)$ در $x=0$، ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا می‌باشد پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

-سراسری-۱۳۸۶-متوسط

۲۵. گزینه ۲ توجه: برای محاسبه‌ی اکسترمم‌های سراسری در توابع پیوسته باید عرض‌های نقاط بحرانی را محاسبه نموده و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه شود.

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه $[1,3]$ می‌یابیم. لذا داریم:

$$f^{\prime}(x)=۳x^{۲}-۶x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲ \end{cases} \quad (۰ \notin [۱,۳] \text{ غ ق ق})$$

$$\begin{cases} f(۲)=k-۴ & \min \\ f(۱)=k-۲ & \\ f(۳)=k & \max \end{cases} \Rightarrow k-۴=-k \Rightarrow k=۲$$

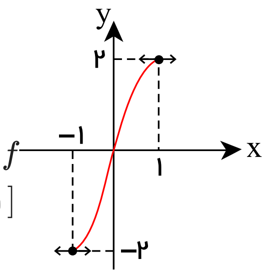
-سراسری-۱۳۸۴-متوسط

۲۶. گزینه ۴ از آنجا که به ازای مقادیر x در بازه‌ی $[-۱,۱]$ ، $x^{۲}-۳<۰$ لذا خواهیم داشت:

$$f(x)=x|x^{۲}-۳| \xrightarrow{x\in[-۱,۱]} f(x)=-x(x^{۲}-۳)=x(۳-x^{۲})$$

$$\Rightarrow f'(x)=-۳x^{۲}+۳ \xrightarrow{f'(x)=۰} x=\pm ۱$$

$$-۱\leq x\leq ۱ \rightarrow ۰\leq x^{۲}\leq ۱ \rightarrow -۳\leq -۳x^{۲}\leq ۰ \rightarrow ۰\leq -۳x^{۲}+۳\leq ۳$$



f در بازه‌ی $[-۱,۱]$ صعودی و پیوسته است و در این بازه نقطه‌ی بحرانی ندارد، پس نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی $[-۱,۱]$ اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع است.

در نتیجه تابع در $x=-۱$ ، $\min$ مطلق و در نقطه‌ی $x=۱$ ، $\max$ مطلق دارد و این نقاط طول اکسترمم‌های نسبی تابع نیز هست.

-سراسری-۱۳۸۷-متوسط

۲۷. گزینه ۱

$$f(x)=x^{۴}-۶x^{۲}+۸x \Rightarrow f'(x)=۴x^{۳}-۱۲x+۸ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۴(x^{۳}-۳x+۲)=۰$$

$\Rightarrow$ جمع ضرایب صفر است. $\Rightarrow \ (x-۱)(x^{۲}+x-۲)=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}(x+۲)=۰$

$x=۱$ ریشه‌ی مضاعف تابع مشتق $(f'(x))$ بوده و لذا در $x=۱$ تابع اکسترمم نسبی ندارد و $x=-۲$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و از آزمون اول مشتق داریم:

x		-۲	
f′	−	۰	+
f	↘		↗

$\Rightarrow$ $x=-۲$ طول نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.

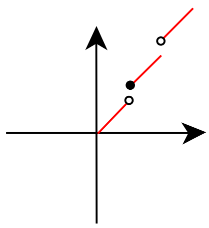
بنابراین این تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد.

توجه: ریشه‌ی مضاعف مشتق هرگز اکسترمم نسبی نیست چون علامت f' در اطراف آن تغییر نمی‌کند، اما ریشه‌ی مضاعف مشتق عطف است.

-خارج از کشور-۱۳۹۰-متوسط

۲۸. گزینه ۱

الف) نمودار تابع $y=x+[x]$ به شکل رو به رو است و یک به یک است.



ب) تابع روی R پیوسته است و در $x=-۱$ ریشه مضاعف دارد پس اکسترمم دارد و غیریک به یک است

ج) تابع صعودی اکید است و یک به یک است $f'(x)=۳x^{۲}+۳>۰$

د) غیر یک به یک $\rightarrow$ پیوسته و غیر یکنوا $\xrightarrow{\text{ریشه دارد}}$ $y=x^{۳}-۳x \rightarrow y'=۳x^{۲}-۳$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۲۹. گزینه ۲ چون این تابع در R پیوسته است بنابراین برای محاسبه کمترین و بیشترین مقدار باید عرض‌های نقاط بحرانی را بیابیم و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای دامنه $(\pm\infty)$ مقایسه می‌کنیم. هر عددی که از همه بالاتر باشد ماکسیمم مطلق و عددی که از همه کمتر باشد مینیمم مطلق است و: $Rf=$ [عرض ماکسیمم مطلق، عرض مینیمم مطلق] برد

$$f'(x)=\frac{x^{۲}+۳-۲x(x+۱)}{(x^{۲}+۳)^{۲}}=۰ \Rightarrow -x^{۲}-۲x+۳=۰ \Rightarrow x=۱,-۳$$

$$\begin{cases} f(۱)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \quad \max \\ f(-۳)=\frac{-۲}{۱۲}=\frac{-۱}{۶} \quad \min \\ f(\pm\infty)=۰ \end{cases} \Rightarrow I=[\frac{-۱}{۶},\frac{۱}{۲}] \Rightarrow b-a=\frac{۲}{۳}$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۰. گزینه ۲ برای این که تقعر رو به بالا باشد باید $f''(x)>۰$ شود:

$$f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}-۲۴x \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۶x-۲۴ \Rightarrow f''(x)=۶x-۶\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱$$

برای این که تابع نزولی شود باید $f'(x)<۰$ باشد.

$$f'(x)=۳(x^{۲}-۲x-۸)=۰ \Rightarrow x=-۲,۴ \Rightarrow f'(x)\leq ۰ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۴$$

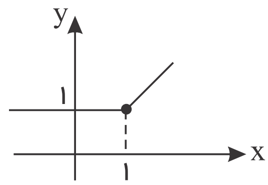
برای آن که تابع هر دو شرط را داشته باشد، از جواب‌ها اشتراک می گیریم:

$$۱\leq x\leq ۴ \Rightarrow I=[۱,۴] \Rightarrow b-a=۳$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۱. گزینه ۴ این تابع دو ضابطه‌ای است پس بهترین روش، رسم تابع است.

$$f(x)=x+|x-۱|=\begin{cases} x+(x-۱)=۲x-۱ & x\geq ۱ \\ x+(۱-x)=۱ & x<۱ \end{cases}$$



از آنجا که تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty,۱]$ تابعی ثابت است، لذا بی شمار اکسترمم نسبی دارد.

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۲. گزینه ۱ علامت f' و f'' را در $x=\frac{\pi}{۲}$ بررسی می کنیم:

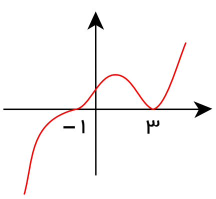
$$f'(x)=\sin x+x\cos x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۱>۰ \quad (\text{صعودی})$$

$$f''(x)=\cos x+(\cos x-x\sin x) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{۲})=\frac{-\pi}{۲}<۰ \quad (\text{تقعر رو به پایین})$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۳. گزینه ۱ مشتق گیری از تابع برای بررسی اکسترمم های آن کار را سخت می کند. $x=۳$ مینیمم نسبی تابع است زیرا توان عامل $(x-۳)$ زوج است و تابع حوالی $x=۳$ مثبت است.

از طرفی $x=-۱$ عطف افقی تابع است. بنابراین نمودار تابع به صورت مقابل خواهد بود:



بنابراین تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم نسبی دارد.

نکته: در توابع به فرم $y=(x-a)^{۲n}\cdot g(x)$ که $g(a)\neq ۰$ داریم:

۱) اگر $g(a)>۰$ آنگاه $x=a$، min نسبی است.

۲) اگر $g(a)<۰$ آنگاه $x=a$، max نسبی است.

نکته: در توابع $f(x)=(x-a)^{۲n+۱}\cdot g(x)$ که $g(a)\neq ۰$ است نقطه $x=a$ طول عطف افقی منحنی $f(x)$ است.

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۴. گزینه ۲ تقعر رو به پایین است بنابراین ضریب $x^{۲}$ باید منفی باشد (رد گزینه ۳). از طرفی یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد، بنابراین حاصل ضرب ریشه ها $(\frac{c}{a})$ باید منفی باشد (رد گزینه ۱). مقدار x ماکسیمم تابع $(\frac{-b}{۲a})$ مثبت است (رد گزینه ۴) بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۵. گزینه ۱ تابع در $x=۰$ ریشه مضاعف دارد بنابراین f باید در صورت عامل $x^{۲}$ داشته باشد یعنی $b=۰$.

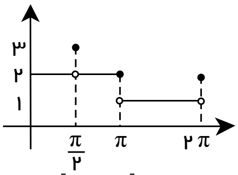
$$\left.\begin{array}{l} \text{مجانب افقی } y=۱=\lim \dfrac{ax^۲}{x^۲+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^۲+bx}{x^۲+c}=a\Rightarrow a=۱ \\ \text{مجانب قائم } x=۱\Rightarrow (۱)^۲+c=۰\Rightarrow c=-۱ \end{array}\right\}\Rightarrow a+b+c=۱+۰+(-۱)=۰$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۶. گزینه ۲

نمودار تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است.

$$f(x)=[\sin x+۲]=[\sin x]+۲$$



$$y=[\sin x]$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در بی‌شمار نقطه در بازه‌ی $(\pi,۲\pi)$ مینیمم مطلق (برابر ۱) دارد و در یک نقطه $x=\dfrac{\pi}{۲}$ ماکزیمم مطلق (برابر ۳) دارد.

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۷. گزینه ۴ می‌دانیم: $\dfrac{\pi}{۲}=\dfrac{۳/۱۴}{۲}=۱/۵۷\in[۰,۲)$

$x=\dfrac{\pi}{۲}$ مجانب قائم $\tan x$ است که در بازه‌ی $[-۲,۲]$ قرار دارد. بنابراین تابع اکسترمم مطلق ندارد.

توجه: هر تابعی که مجانب قائم دارد یا ماکسیمم ندارد یا مینیمم مطلق ندارد و یا هر دو را ندارد.

$$\begin{cases} x\to\dfrac{\pi}{۲}^{+}\Rightarrow y\to-\infty \\ x\to\dfrac{\pi}{۲}^{-}\Rightarrow y\to+\infty \end{cases}$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۸. گزینه ۲ در تابع f که صورت آن مقداری ثابت است، در صورتی‌که تابع مجانب قائم نداشته باشد کمترین مقدار مخرج را به دست می آوریم و از روی آن حداکثر مقدار کل کسر را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه مخرج کسر ریشه ندارد $(\Delta=-۲۴)$ پس مجانب قائم ندارد.

$$g(x)=۲x^۲-۴x+۵=۲(x^۲-۲x+۱)+۳=۲(x-۱)^۲+۳\geq ۳$$

$$\Rightarrow Rg=[۳,+\infty)\Rightarrow Rf=(۰,\frac{۱}{۳}]\Rightarrow \max(f)=\frac{۱}{۳}$$

-منتا-۱۳۹۲-متوسط

۳۹. گزینه ۱

$$f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۴+۱}$$

$$f'=\frac{۲x(x^۴+۱)-۴x^۳(x^۲+۱)}{(x^۴+۱)^۲}=\frac{۲x(-x^۴-۲x^۲+۱)}{(x^۴+۱)^۲}=۰$$

$$۲x=۰\to x=۰$$

$$-x^۴-۲x^۲+۱=۰\to\Delta=۴+۴=۸\to x^۲=\frac{۲\pm۲\sqrt{۲}}{-۲}$$

$$x^۲=۱\pm\sqrt{۲}\to x^۲=۱+\sqrt{۲}\to x=\pm\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$$

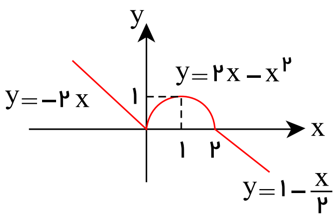
x		$-\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$		۰		$\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$	
y'	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

-منتا-۱۳۹۳-متوسط

۴۰. گزینه ۳ تابع f را رسم می‌کنیم:

مشاهده می‌کنید که f در $x=۰$ مینیمم نسبی در $x=۱$ ماکسیمم نسبی دارد.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x & x<۰\\ -(x-۱)^{۲}+۱ & ۰\leq x<۲\\ ۱-\dfrac{x}{۲} & x\geq ۲\end{cases}$$



-منتا-۱۳۹۳-متوسط

۴۱. گزینه ۱ نقاط بحرانی تابع را یافته و f' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x)=-\sin x\cos(\cos x)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=\pi\\ \cos(\cos x)=۰\Rightarrow \cos x=\dfrac{\pi}{۲}\Rightarrow \cos x=۱/۵۷ \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

نقاط بحرانی

x	۰		π		۲π
f'		$-$	۰	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

بنابراین $x=\pi$ مینیمم تابع است.

$$۰<x<\pi\rightarrow -۱<\cos x<۱\rightarrow \cos(\cos x)>۰$$

-منتا-۱۳۹۳-متوسط

۴۲. گزینه ۱

$$f(x)=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۲}{x^{۳}}$$

برای این که این تابع صعودی باشد، باید $f'(x)>۰$ باشد:

$$f'(x)>۰\Rightarrow ۱-\frac{۱}{x^{۲}}>۰\Rightarrow ۱>\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow x^{۲}>۱\Rightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱ \quad (I)$$

لازم به ذکر است که مجموعه جواب فوق $x=۰$ (مجانب قائم) را شامل نمی‌شود، بنابراین قابل قبول است.

برای این که این تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید $f''(x)<۰$ باشد. داریم:

$$\frac{۲}{x^{۳}}<۰\Rightarrow x^{۳}<۰\Rightarrow x<۰ \quad (II)$$

با توجه به اشتراک مجموعه‌های (I) و (II) ، می‌توان گفت که تابع f در بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ دارای تقعر رو به پایین بوده و صعودی است.

-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۴۳. گزینه ۱ با توجه به این که توان دوم هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است، داریم:

$$x^{۲}\geq ۰\Rightarrow -x^{۲}\leq ۰\Rightarrow x^{۳}-x^{۲}\leq x^{۳}\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq\sqrt[۳]{x^{۳}}\Rightarrow \sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq x\Rightarrow -x+\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}\leq ۰$$

بنابراین ماکسیمم مطلق تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=-x+\sqrt[۳]{x^{۳}-x^{۲}}$ برابر با صفر است.

-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۴۴. گزینه ۴

$$y=\begin{cases}x^{۳}-۳x & x<-\sqrt{۳}\\ -x^{۳}+۳x & -\sqrt{۳}\leq x\leq\sqrt{۳}\\ x^{۳}-۳x & \sqrt{۳}<x\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}۳x^{۲}-۳ & x<-\sqrt{۳}\\ -۳x^{۲}+۳ & -\sqrt{۳}<x<\sqrt{۳}\\ ۳x^{۲}-۳ & x>\sqrt{۳}\end{cases}$$

		$-\sqrt{۳}$		-۱		۱		$\sqrt{۳}$	
y'	$+$		$-$	۰	$+$	۰	$-$		$+$
	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط

۴۵. گزینه ۱ باتوجه به شکل در نقطه عطف خط مماس بر منحنی افقی است یعنی طول نقطه عطف هم ریشه مشتق اول است و هم ریشه مشتق دوم است بنابراین ریشه مضاعف مشتق اول محسوب می‌شود.

$$f'_{(x)} = -۴x^{۳} + ۲۴x^{۲} + ۲ax = -۲x \cdot (۲x^{۲} - ۱۲x - a)$$

معادله $f'=\circ$ یک ریشه ساده $x=\circ$ دارد و یک ریشه مضاعف در معادله $۲x^۲-۱۲x-a=\circ$ دارد بنابراین:

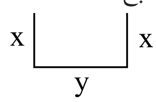
$$۲x^۲-۱۲x-a=\circ\xrightarrow{\Delta=\circ}(-۱۲)^۲-۴(۲)\cdot(-a)=\circ$$
$$۱۴۴+۸a=\circ\ \rightarrow\ a=-۱۸$$

-سراسری-۱۳۹۴-متوسط

۴۶. گزینه ۲

روش اول: با توجه به شکل و فرض مسئله، $۲x+y=۸۸$ است، پس $y=۸۸-۲x$.

تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S(x,y)=xy\Rightarrow S(x)=x(۸۸-۲x)=۸۸x-۲x^۲$$

برای به دست آوردن بیش‌ترین مقدار تابع S، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x)=۸۸-۴x=\circ\Rightarrow x=۲۲\Rightarrow \max(S)=S(۲۲)=۲۲(۸۸-۴۴)=۲۲\times۴۴=۹۶۸$$

روش دوم:

نکته: اگر مجموع دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، آن گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو متغیر با هم برابر باشند.

$$S(x)=x(۸۸-۲x)=۲(x)(۴۴-x)$$

مجموع دو متغیر x و $۴۴-x$ برابر مقدار ثابت ۴۴ است. پس حاصلضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار است که $x=۴۴-x$، یعنی $x=۲۲$ و در آن صورت:

$$\max(S)=S(۲۲)=۲\times۲۲(۴۴-۲۲)=۹۶۸$$

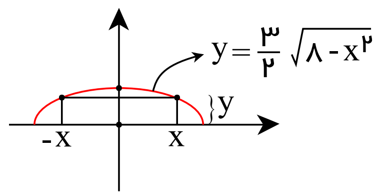
-خارج از کشور-۱۳۹۱-متوسط

۴۷. گزینه ۴

$$y=\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}\rightarrow y^۲=\frac{۳}{۴}(۸-x^۲)\rightarrow ۴y^۲+۳x^۲=۲۴$$

بنابراین نمودار تابع به صورت یک نیم بیضی به مرکز مبدأ مختصات است.

ابتدا نمودار $y=\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ را رسم می‌کنیم. طول و عرض مستطیل مطابق شکل، برابر $۲x$ و $\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}$ است و داریم:



$$S_{\text{مستطیل}}=۲x\times\frac{۳}{۲}\sqrt{۸-x^۲}=۳x\sqrt{۸-x^۲}\Rightarrow S=۳\sqrt{۸x^۲-x^۴}$$

$$S'_x=۳\times\frac{۱۶x-۴x^۳}{۲\sqrt{۸x^۲-x^۴}}=\circ\Rightarrow(۴x-x^۳)=\circ\Rightarrow(x)(۴-x^۲)=\circ$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\circ & \text{غ ق ق}\\ x=۲ & \\ x=-۲ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$S_{\max}=۳\times۲\times\sqrt{۸-۲^۲}=۳\times۲\times۲=۱۲$$

-خارج از کشور-۱۳۸۸-متوسط