۲۱. **گزینه ۳**

نکته: برای تابع $y=g(x)|f(x)|$ ریشه‌های $f(x)$ برای تابع y، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$f(x)=(x-1)|x^2+x-2|=(x-1)|(x-1)(x+2)|$$

$x=-2$ برای تابع f بحرانی است، زیرا ریشه‌های عبارت داخل قدرمطلق هستند.

حال ریشه‌های $f'(x)=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\pm(x-1)^2(x+2)\Rightarrow f'(x)=\pm(2(x-1)(x+2)+(x-1)^2)$$
$$\Rightarrow f'(x)=\pm((x-1)(3x+3))=0\Rightarrow x=\pm 1$$

پس در نقاط ± 1 مشتق صفر است و این نقاط نیز بحرانی هستند، بنابراین:

$\{-2\,,\,-1\,,\,1\}$ مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع است.

مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $=-2-1+1=-2$

۲۲. **گزینه ۴** f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ در تمام نقاط حقیقی مشتق‌پذیر است. چون دوره تناوب در تابع 2π است، لذا کافی است رفتار آن را در بازه‌ی $[0\,,\,2\pi]$ بررسی کنیم.

$$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+\overbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}^{1}}{(2+\cos x)^2}=0$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{2\pi}{3}\xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه تابع}} f(\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ x=\dfrac{4\pi}{3}\xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه تابع}} f(\dfrac{4\pi}{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

پس بیشترین مقدار تابع f برابر $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ است.

۲۳. **گزینه ۱** به ازای $x\neq 0$ مقدار $f(x)$ مثبت است $(\sin\frac{1}{x}<2)$ و $f(0)=0$ است، پس این نقطه می‌نیمم نسبی و سراسری است.

۲۴. **گزینه ۲** مختصات نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته در خود تابع صدق می‌کند.

راه‌حل اول:

$$f(1)=2\Rightarrow\frac{a+b}{1+a}=2\Rightarrow b=a+2$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1)=0\\ f'(x)=\dfrac{a(x^2+a)-2x(ax+b)}{(x^2+a)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow a(1+a)-2(a+b)=0$$

$$\Rightarrow a(1+a)-2(a+(a+2))=0\Rightarrow\begin{cases} a=-1\\ a=4\end{cases}$$

به‌ازای $a=-1$ تابع در $M(1\,,\,2)$ تعریف نشده است، پس $a=4$ است، لذا: $b=6$

$$f(x)=\frac{4x+6}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{-4(x^2+3x-4)}{(x^2+4)^2}=\frac{-4(x+4)\cdot(x-1)}{(x^2+4)^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	max	$\searrow$	

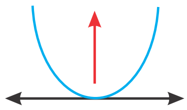
راه‌حل دوم: در توابع کسری که صورت و مخرج‌شان مشتق‌پذیر است، مختصات اکسترمم تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+a}\overset{H}{=\!=}\frac{a}{2x}\Rightarrow\frac{a}{2}=2\Rightarrow a=4\Rightarrow b=6$$

۲۵. **گزینه ۱**

$$f'(x)=x^3+\frac{a}{x}-bx^2-a \Rightarrow f''(x)=3x^2-\frac{a}{x^2}-2bx$$

طبق قضیه‌ی آزمون مشتق دوم اگر در تابع مشتق‌پذیر f، $f'(1)=0$ و $f''(1)>0$ باشد، در این‌صورت: $x=1$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی f است.



$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1)=1+a-b-a=0 \\ f''(1)=3-a-2b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ 3-a-2>0 \Rightarrow a<1 \end{cases}$$

۲۶. **گزینه ۳** نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$2r+h=3 \Rightarrow h=3-2r \qquad V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2(3-2r)=\frac{\pi}{3}(3r^2-2r^3)$$

$$V'=\frac{\pi}{3}(6r-6r^2)=0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(6r)(1-r)=0 \xrightarrow{r>0} r=1 \xrightarrow{h=3-2r} h=1$$

۲۷. **گزینه ۴** فرض می‌کنیم نقطه‌ی $B(x,y)$ روی منحنی $y=x^2$ از $A(0,2)$ کمترین فاصله را دارد.

$$AB=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}$$

$$=\sqrt{x^4-3x^2+4}=\sqrt{\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+4}$$

به ازای $x^2=\frac{3}{2}$، AB کمترین مقدار می‌شود، بنابراین $AB=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

۲۸. **گزینه ۱** نکته: اگر $A\left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right.$ نقطه اکسترمم تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ باشد آنگاه $f'(a)=0$ و $f(a)=b$ است.

$$f(x)=\cos^2\pi x-a\sin\pi x+b$$

$$f'(x)=-\pi\sin 2\pi x-a\pi\cos\pi x \to f'\left(\frac{1}{6}\right)=0 \to -\pi\frac{\sqrt{3}}{2}-a\pi\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \to a=-1$$

حال کافی است برای تعیین نوع اکسترمم مقدار مشتق دوم را در این نقطه تعیین کنیم.

$$f''(x)=-2\pi^2\cos 2\pi x-\pi^2\sin\pi x \xrightarrow{x=\frac{1}{6}} f''\left(\frac{1}{6}\right)=-\pi^2-\frac{\pi^2}{2}<0$$

تقعر تابع رو به پایین است بنابراین $x=\frac{1}{6}$ طول ماکسیمم نسبی است.

۲۹. **گزینه ۴** نکته: ماکسیمم مقدار توابع $y=a\cos(bx+c)$ و $y=a\sin(bx+c)$ برابر $|a|$ و مینیمم مقدار آن‌ها برابر $-|a|$ است.

چون در همسایگی $x=0$ تابع نزولی است، پس $a<0$

چون ماکسیمم تابع برابر ۳ است، داریم:

$$(1)\ |a|+b=3$$

چون نمودار از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{3},0)$ می‌گذرد، داریم:

$$(2)\ a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+b=0$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} |a|+b=3 \xrightarrow{a<0} -a+b=3 \\ \frac{1}{2}a+b=0 \Rightarrow a=-2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1$$

۳۰. **گزینه ۴** نکته: نقطه‌ای که در آن خط مماس بر منحنی از داخل منحنی عبور می‌کند. نقطه‌ی عطف تابع است.

$$y=x^3+3\ln x^2 \to y=x^3+6\ln x \to y'=3x^2+\frac{6}{x} \to y''=6x-\frac{6}{x^2}$$

$$\rightarrow y''=\frac{6x^3-6}{x^2}\rightarrow x=1$$ طول نقطه‌ی عطف

عطف $I=\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.\rightarrow$ مماس $m=y'(1)=3+6=9\rightarrow$ خط مماس : $y-1=9(x-1)\Rightarrow y=9x-8$

۳۱. **گزینه ۱** باید $y'>0$ و $y''<0$ باشد.

$$y=\begin{cases}x(x^2+6x+9) & x\geq 0\\ -x(x^2+6x+9) & x<0\end{cases}\rightarrow y=\begin{cases}x^3+6x^2+9x & x\geq 0\\ -x^3-6x^2-9x & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}3x^2+12x+9=0\rightarrow\begin{cases}x=-1 & \times\\ x=-3 & \times\end{cases} & x>0\\ \\ -3x^2-12x-9=0\rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=-3\end{cases} & x<0\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}6x+12=0\rightarrow x=-2 \quad \times & x>0\\ -6x-12=0\rightarrow x=-2 & x<0\end{cases}$$

		−۳		−۱	۰
y	−	+		−	+
			−۲		
y″	+		−		+

بازه‌ی زمانی $(-2,-1)$ بازه‌ی مورد نظر است. بنابراین $\begin{cases}a=-2\\ b=-1\end{cases}$ پس $b-a=1$

۳۲. **گزینه ۱** طبق شکل داده شده مجانب‌های قائم عبارتند از $x=0$ و $x=3$ بنابراین $x=3$ ریشه‌ی مخرج تابع داده شده است.

$$(3)^2+c(3)=0\Rightarrow c=-3$$

از طرفی مجانب افقی تابع خط $y=-1$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2}{x^2}\Rightarrow a=-1$$

در ضمن نمودار تابع بر محور xها مماس است پس $ax^2+bx-4=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است، یعنی $\Delta=0$ بنابراین:

$$b^2-4(-1)(-4)=0\Rightarrow b=\pm 4$$

اگر $b=4$ باشد، آن‌گاه $-x^2+4x-4=0$ در نتیجه $x=2$ که قابل قبول است. پس:

$$a+b+c=(-1)+(4)+(-3)=0$$

۳۳. **گزینه ۳** نکته: نقطه‌ی $(c,f(c))$ را نقطه‌ی عطف نمودار تابع f می‌نامیم، هرگاه:

الف) تابع f در این نقطه پیوسته باشد.

ب) نمودار f در این نقطه دارای خط مماس باشد. (هر چند این خط قائم باشد.)

پ) جهت تقعر تابع f در این نقطه تغییر کند.

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & x\leq 1\\ -x^2+bx & x>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x\leq 1\\ -2x+b & x>1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}2 & x<1\\ -2 & x>1\end{cases}$$

باتوجه به این نکته که تقعر ضابطه‌ی اول همواره رو به بالا و تقعر ضابطه‌ی دوم همواره رو به پایین است، نتیجه می‌گیریم که طول نقطه‌ی عطف $x=1$ است. پس $c=1$.

چون f در این نقطه پیوسته است، داریم:

$$f(1^+)=f(1^-)\Rightarrow 1+a=-1+b\Rightarrow a-b=-2 \qquad (*)$$

همچنین چون مقدار مشتق چپ و راست در $x=1$ برابر است، داریم:

$$f'(1^+)=f'(1^-)\Rightarrow 2=-2+b\Rightarrow b=4$$

جایگذاری در $(*)$ داریم: $a=2$

۳۴. **گزینه ۳** نکته: نقاط بحرانی تابع f، نقاطی درونی از دامنه‌ی آن هستند که f' در آنها تعریف نشده یا صفر است.

نکته (آزمون مشتق اول): اگر مشتق تابع مشتق‌پذیر f در نقطه‌ی $x=c$ ، از مثبت به منفی (منفی به مثبت) تغییر علامت دهد، آنگاه f در این نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی دارد.

ابتدا نقاط بحرانی f را تعیین می‌کنیم. سپس از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم:

$$Df=R \qquad f(x)=x^{\frac{۵}{۳}}+x^{\frac{۲}{۳}}+۱ \Rightarrow f'(x)=\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}+\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۵\sqrt[۳]{x^۲}}{۳}+\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=\frac{۱}{۳}(\frac{۵x+۲}{\sqrt[۳]{x}}) \rightarrow ۵x+۲=۰ \rightarrow x=-\frac{۲}{۵}, \sqrt[۳]{x}=۰ \rightarrow x=۰$$

نقاط $\{-\frac{۲}{۵},۰\}$ بحرانی هستند.

x	$-\infty$		$-\frac{۲}{۵}$		۰		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	ت‌ن	$+$	
y		$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$	

۳۵. **گزینه ۳** **جهت تقعر نمودار تابع همواره رو به بالا است، بنابراین y'' همواره مثبت است.**

$$f(x)=(x+a)Ln\,x \rightarrow Df=(۰,+\infty)$$

$$f'(x)=Ln\,x+\frac{x+a}{x} \rightarrow f''(x)=\frac{۱}{x}+\frac{-a}{x^۲}=\frac{x-a}{x^۲}$$

y'' در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ همواره مثبت است، بنابراین:

$$x-a>۰ \rightarrow x>a \rightarrow a\leq ۰$$

توجه کنیم که اگر a مقدار مثبتی باشد نمی‌توان گفت y'' همواره در دامنه‌اش مثبت است.

۳۶. **گزینه ۱**

باتوجه به شکل مجانب افقی منحنی و محل برخورد با محور yها را می‌یابیم.

$$\begin{cases} f(۰)=\cos(\tan^{-۱}(۰))=\cos(۰)=۱ \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\cos(\tan^{-۱}(\pm\infty))=\cos(\pm\frac{\pi}{۲})=۰ \Rightarrow \text{مجانب افقی}: y=۰ \end{cases}$$

فقط گزینه ۱، این ویژگی‌ها را دارد.

۳۷. **گزینه ۳** **نکته: تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر x از این بازه داشته باشیم:**
$(f'(x)\leq ۰)\ f'(x)\geq ۰$

نکته: تقعر تابع $f(x)$ در بازه‌ی (a,b) روبه بالا(پایین) است، هرگاه به ازای هر x ازین بازه داشته باشیم: $(f''(x)<۰)\ f''(x)>۰$

$$f(x)=x\ln(-x) \Rightarrow f'(x)=\ln(-x)+x(\frac{-۱}{-x})=\ln(-x)+۱$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow \ln(-x)+۱=۰ \Rightarrow \ln(-x)=-۱ \Rightarrow \ln(-x)=\ln\frac{۱}{e} \Rightarrow x=-\frac{۱}{e}$$

x	-۱	$-\frac{۱}{e}$	۰
$f'(x)$	$+$	۰	$-$

باتوجه به جدول تعیین علامت، تابع f در بازه‌ی $(-۱,۰)$ غیر یکنواست.

$$f''(x)=\frac{-۱}{-x}=\frac{۱}{x}<۰ \Rightarrow$$ **تقعر f در بازه‌ی $(-۱,۰)$ رو به پایین است.**

۳۸. **گزینه ۳** **تقعر تابع $f(x)$ رو به بالا است هرگاه $f''(x)>۰$**

$$f(x)=(x-۱)\ln\sqrt{x} \rightarrow Df=(۰,+\infty)$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}(x-۱)\ln x \rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}(\ln x+\frac{x-۱}{x})$$

$$\rightarrow f''(x)=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲})=\frac{۱}{۲}(\frac{x+۱}{x^۲})>۰$$

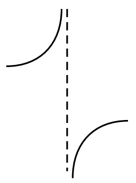
باتوجه به اینکه $Df=(۰,+\infty)$ است مقدار y'' در این بازه همواره مثبت است بنابراین تقعر تابع در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ رو به بالا است.

۳۹. **گزینه ۱** $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته است و داریم:

$$x>۱: f(x)=۲-\sqrt{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+} f'(x)=-\infty$$

$$x<۱: f(x)=۲-\sqrt{-(x-۱)}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{-(x-۱)}}\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-} f'(x)=+\infty$$

پس $f(x)$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و نمودار $f'(x)$ در مجاورت این نقطه به‌صورت مقابل است:



۴۰. گزینه ۳ نکته (مشتق عامل صفرکننده): اگر $f(a)=۰$ و $g(x)$ در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه:

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)$$

نکته : $\sin ۲x=\dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$

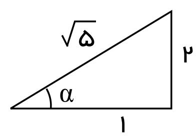
چون صورت کسر عامل صفرکننده است، پس فقط از صورت کسر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{-(۱+\tan^۲ x)}{۱+\sin ۲x}=\frac{-(۱+\tan^۲ x)}{۱+\dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}}=\frac{-(۱+\tan^۲ x)}{\dfrac{۱+\tan^۲ x+۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}}=\frac{-(۱+\tan^۲ x)^۲}{(۱+\tan x)^۲}$$

به‌ازای $x=\tan^{-۱}۲$ داریم $\tan x=۲$، با جای‌گذاری این مقدار خواهیم داشت:

$$f'(\tan^{-۱}۲)=\frac{-(۱+۴)^۲}{(۱+۲)^۲}=\frac{-۲۵}{۹}$$

روش دوم:



$$\tan^{-۱}۲=\alpha\Rightarrow\tan\alpha=۲\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{۲}{\sqrt{۵}}\\ \cos\alpha=\dfrac{۱}{\sqrt{۵}}\end{cases}$$

$$f(x)=(۲-\tan\alpha)(\frac{۱}{۱+\sin ۲\alpha})$$

$$f'(\alpha)=-(۱+\tan^۲\alpha)(\frac{۱}{۱+\sin ۲\alpha})=-(۱+\tan^۲\alpha)(\frac{۱}{۱+۲\sin\alpha\cos\alpha})$$

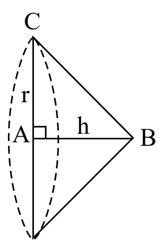
$$=-(۵)(\frac{۱}{۱+۲(\frac{۲}{\sqrt{۵}})(\frac{۱}{\sqrt{۵}})})=-۵\times\frac{۱}{۱+\frac{۴}{۵}}=-\frac{۲۵}{۹}$$

۴۱. گزینه ۳ نکته: حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با: $V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$

شکل حاصل از دوران $\overset{\Delta}{ABC}$ حول ضلع AB، مخروطی با شعاع قاعده‌ی $AC=r$ و ارتفاع $AB=h$ است.

$$BC=۵\sqrt{۳}\to r^۲+h^۲=۷۵\to r^۲=۷۵-h^۲$$

بنابراین حجم این مخروط برابر است با:



$$V=\frac{۱}{۳}\pi(۷۵-h^۲)h=\frac{\pi}{۳}(۷۵h-h^۳)$$

$$V'=۰\to\frac{\pi}{۳}(۷۵-۳h^۲)=۰\to ۳h^۲=۷۵\to h^۲=۲۵\xrightarrow{h>۰}h=۵$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار ممکن برای حجم برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(۷۵-۲۵)\times ۵=\frac{۲۵۰\pi}{۳}$$

۴۲. **گزینه ۱** **تابع مشتق پذیر f روی (a,b) صعودی (نزولی) است، هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم:**

$$f'(x)\geq ۰ \quad (f'(x)\leq ۰)$$

تقعر نمودار تابع دو بار مشتق‌پذیر f روی (a,b) رو به بالا (پایین) است، هرگاه به ازای هر $x\in(a,b)$ داشته باشیم:

$$f''(x)\geq ۰ \quad (f''(x)< ۰)$$

$$f(x)=\frac{x^۲}{e^x}=x^۲e^{-x}\Rightarrow f'(x)=۲xe^{-x}-x^۲e^{-x}=(۲x-x^۲)e^{-x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=(۲-۲x)e^{-x}-(۲x-x^۲)e^{-x}=(x^۲-۴x+۲)e^{-x}\Rightarrow\begin{cases}f'(۱)=e^{-۱}>۰\Rightarrow \text{صعودی}\\ f''(۱)=-e^{-۱}<۰\Rightarrow \text{تقعر رو به پایین}\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع f در همسایگی $x=۱$ به شکل گزینه ۱ است.

۴۳. **گزینه ۲** **نکته:** اگر $y=\dfrac{au+b}{cu+d}$، آن‌گاه $y'=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^۲}\times u'$

$$f(x)=\frac{\sin x+a}{۲\sin x+۳},\quad Df=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=\frac{۳-۲a}{(۲\sin x+۳)^۲}\times\cos x\ ,\ D_{f'}=\mathbb{R}$$

چون تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، کافی است نقاطی را بیابیم که در آن‌ها مشتق تابع برابر صفر می‌شود.

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{(۳-۲a)\cos x}{(۲\sin x+۳)^۲}=۰\Rightarrow\cos x=۰\Rightarrow x=\underbrace{۲k\pi+\frac{\pi}{۲},۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}}_{\text{طول‌های اکسترمم‌های مطلق}}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&f(۲k\pi+\frac{\pi}{۲})=\frac{۱+a}{۲+۳}=\frac{a+۱}{۵}\\&f(۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲})=\frac{-۱+a}{-۲+۳}=a-۱\end{aligned}\right\}\to \text{مقادیر اکسترمم‌های مطلق}$$

دقت کنید که $۳-۲a\neq ۰$، زیرا در این صورت به ازای هر x مشتق صفر خواهد شد که غیرممکن است.

طبق فرض $f(۲k\pi+\frac{\pi}{۲})+f(۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲})=۴$ است. پس داریم:

$$\frac{a+۱}{۵}+(a-۱)=۴\Rightarrow\frac{۶a-۴}{۵}=۴\Rightarrow a=۴$$

۴۴. **گزینه ۲** **نکته(آزمون مشتق اول): اگر $x=c$ یک نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)$ باشد و $f'(x)$ در این نقطه از مثبت به منفی(منفی به مثبت) تغییر علامت بدهد، آنگاه این نقطه، نقطه‌ی ماکسیمم نسبی(مینیمم نسبی) تابع $f(x)$ است.**

$$Df=\mathbb{R}, f(x)\begin{cases}(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}=x^{\frac{۵}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}} & x\geq ۱\\ -(x-۱)\sqrt[۳]{x^۲}=x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۵}{۳}} & x\leq ۱\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} & x>۱\\ \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}-\frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} & x<۱\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\frac{۱}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}(۵x-۲)=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۵}$$

x		۰		$\frac{۲}{۵}$		۱	
f′(x)	−	‖	+		−	‖	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

بنابراین طول ماکسیمم نسبی، $x=\frac{۲}{۵}$ است.

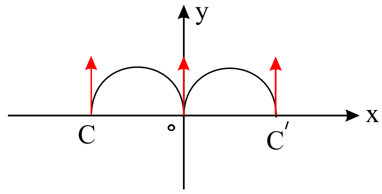
۴۵. **گزینه ۳**

$$y=\sin x-x\cos x \Rightarrow y'=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x \;\Rightarrow y''=\sin x+x\cos x$$

مشتق اول در $x=\pi$ برابر صفر بوده و در همسایگی آن از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد. پس این نقطه، یک نقطه‌ی ماکزیمم موضعی تابع است.

مشتق دوم در $x=\circ$ برابر صفر بوده ودر همسایگی آن از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد. پس این نقطه، یک نقطه‌ی عطف تابع است.

۴۶. **گزینه ۱** **باتوجه به محاسبه‌ی مشتق چپ و راست در نقاط c و $\circ$ و c' فقط گزینه «۱» می‌تواند صحیح باشد.**



$\rightarrow f'_{+}(c)=+\infty$ صعودی است.

$\rightarrow f'_{-}(\circ)=-\infty$ نزولی است.

$\rightarrow f'_{-}(c')=-\infty$ نزولی است.

$\rightarrow f'_{+}(\circ)=+\infty$ صعودی است.

مفهوم $f'_{+}(c)=+\infty$ یعنی تابع $f(x)$ در سمت راست نقطه‌ی $x=c$ صعودی است یعنی منحنی f' در سمت راست نقطه‌ی $x=c$ بالای محور xها قرار دارد. پس گزینه‌ی ۴ غلط است و $f'_{-}(\circ)=-\infty$ پس تابع $f(x)$ در سمت چپ نقطه‌ی $x=\circ$ نزولی بوده و منحنی $f(x)$ باید پائین محور xها قرار گیرد پس گزینه‌ی ۳ غلط است و $f'_{-}(c')=-\infty$ است پس در سمت چپ نقطه‌ی $x=c'$ منحنی $f(x)$ نزولی است و منحنی f' باید در پائین محور xها قرار گیرد بنابراین فقط گزینه‌ی ۱ درست است.

۴۷. **گزینه ۳** **اولاً، مجانب افقی منحنی $y=\circ$ است:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a=\circ \Rightarrow a=\circ \Rightarrow y=\frac{bx}{x^{۲}+c}$$

ثانیاً شیب خط مماس بر منحنی در $x=\circ$ برابر ۱ است.

$$y'=\frac{b(x^{۲}+c)-۲x(bx)}{(x^{۲}+c)^{۲}} \xrightarrow{x=\circ} \frac{bc}{c^{۲}}=۱ \Rightarrow \frac{b}{c}=۱ \Rightarrow b=c$$