۴۶. گزینه ۳ باتوجه به معادله‌ی سرعت، حرکت با شتاب ثابت و در مسیری مستقیم است. با استفاده از رابطه‌ی جابه‌جایی در T ثانیه‌ی nام می‌توان نوشت:

$$V=2t-4\Rightarrow\begin{cases}a=2\frac{m}{s^2}\\ V_0=-4\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$\Delta x=(n-0/5)aT^2+V_0T\xrightarrow{t=3s,n=2}\Delta x=(2-0/5)\times 2\times 9-4\times 3\Rightarrow \Delta x=15m$$

۴۷. گزینه ۱ با دوبار مشتق گرفتن از بردارهای مکان نسبت به زمان، بردارهای شتاب هر متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\vec{a}_1=\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}=8\vec{i}\Rightarrow|\vec{a}_1|=8\frac{m}{s^2}\\ \vec{a}_2=\frac{d^2x_2}{dt^2}\vec{j}=6t\vec{i}\Rightarrow|\vec{a}_2|=6t\end{cases}\Rightarrow\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{8}{6t}=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

۴۸. گزینه ۴ روش اول: می‌دانیم برد یک پرتابه وقتی بیشینه است که زاویه‌ی پرتاب برابر با 45° باشد، با استفاده از رابطه‌ی بین برد یک پرتابه (R) و بیشینه‌ی ارتفاع قائم آن از نقطه‌ی پرتاب (H) می‌توان نوشت:

$$\tan\alpha=\frac{4H}{R}\xrightarrow[R=20\,m]{\alpha=45^\circ}1=\frac{4H}{20}\Rightarrow H=5m$$

$$H=\frac{1}{2}gt_s^2\xrightarrow[g=10\,\frac{m}{s^2}]{H=5m}5=5t_s^2\Rightarrow t_s=1\,s\Rightarrow t_{\text{کل}}=2t_s=2s$$

روش دوم: با استفاده از رابطه‌ی برد یک پرتابه و در نظر گرفتن این نکته که برد یک پرتابه زمانی بیشینه است که زاویه‌ی پرتاب برابر با 45° باشد، می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}\Rightarrow R_{\max}=\frac{V_0^2}{g}\xrightarrow[g=10\,\frac{m}{s^2}]{R_{\max}=20\,m}20=\frac{V_0^2}{10}\Rightarrow V_0^2=200\Rightarrow V_0=10\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

$$t_{\text{کل}}=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}\xrightarrow[V_0=10\sqrt{2}\frac{m}{s}]{\alpha=45^\circ}t_{\text{کل}}=\frac{2\times 10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{10}=2\,s$$

۴۹. گزینه ۳ با فرض مکان اولیه‌ی اتومبیل A به عنوان مبدأ مکان، معادله‌ی حرکت هر اتومبیل را نوشته و مکان آن‌ها را در لحظه‌ی $t=2s$ حساب کرده و در نهایت فاصله‌ی آن‌ها را به دست می‌آوریم. دقت کنید حرکت اتومبیل A تندشونده و بنابراین $aA=5\frac{m}{s^2}$ و حرکت اتومبیل B کند شونده و بنابراین $aB=-5\frac{m}{s^2}$ است.

$$xA=\frac{1}{2}aAt^2+V_0At+x_0A\Rightarrow xA=\frac{1}{2}\times 5t^2+6t+0$$

$$\Rightarrow xA=2/5t^2+6t\xrightarrow{t=2s}xA=2/5\times 2^2+6\times 2\Rightarrow xA=22m$$

$$xB=\frac{1}{2}aBt^2+V_0Bt+x_0B\Rightarrow xB=\frac{1}{2}\times(-5)t^2+4t+100$$

$$\Rightarrow xB=-2/5t^2+4t+100\xrightarrow{t=2s}xB=98m\Rightarrow|xB-xA|=|98-22|=76m$$

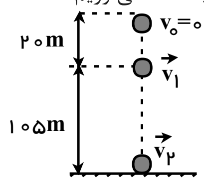
۵۰. گزینه ۳ اگر مکان متحرک مثبت باشد، برای حرکت به سمت مبدأ مکان باید سرعت آن منفی باشد و اگر مکان متحرک منفی باشد، برای حرکت به سمت مبدأ مکان باید سرعت آن مثبت باشد، بنابراین در صورتی که علامت مکان و سرعت متحرک مخالف یک‌دیگر باشد $(x\cdot V<0)$ ، آن‌گاه متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است. بنابراین باید $(x\cdot V)$ را تعیین علامت کنیم. داریم:

$$x=t^{۲}-۳t+۲=۰ \xrightarrow{(t-۱)(t-۲)=۰} t_۱=۱s, t_۲=۲s$$
$$V=\frac{dx}{dt}=۲t-۳=۰ \Rightarrow t=۱/۵s$$

t (s)		۱		۱/۵		۲	
x	+	۰	-		-	۰	+
V	-		-	۰	+		+
x.V	-	۰	+	۰	-	۰	+

باتوجه به جدول فوق و گزینه‌های داده شده، در لحظه‌ی $t=۱/۸s$ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.

۵۱. گزینه ۳ با انتخاب جهت مثبت به طرف پایین، با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت در مسیر مستقیم، سرعت برخورد گلوله به زمین و سرعت در ابتدای ۱۰۵ متر آخر حرکت را حساب می‌کنیم و سپس از رابطه‌ی $\overline{V}=\frac{V_۱+V_۲}{۲}$، سرعت متوسط را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید که چون شتاب ثابت است، می‌توان از رابطه‌ی فوق استفاده کرد.



$$V_۱^{۲}-V_۰^{۲}=۲g\Delta y_۱ \xrightarrow{\Delta y_۱=۲۰m} V_۱^{۲}-۰=۲\times۱۰\times۲۰ \Rightarrow V_۱=۲۰\frac{m}{s}$$
$$V_۲^{۲}-V_۰^{۲}=۲g\Delta y_۲ \xrightarrow{\Delta y_۲=۱۲۵m} V_۲^{۲}-۰=۲\times۱۰\times۱۲۵ \Rightarrow V_۲=۵۰\frac{m}{s}$$
$$\overline{V}=\frac{V_۱+V_۲}{۲}=\frac{۲۰+۵۰}{۲}=\overline{V}=۳۵\frac{m}{s}$$

۵۲. گزینه ۳ برای محاسبه‌ی سرعت متوسط، جابجایی کل متحرک را بر زمان کل حرکت تقسیم می‌کنیم:

$$\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\frac{۲}{۵}x+\frac{۳}{۵}x}{\frac{\Delta x_۱}{V_۱}+\frac{\Delta x_۲}{V_۲}}=\frac{x}{\frac{\frac{۲x}{۵}}{۱۰}+\frac{\frac{۳x}{۵}}{۱۵}}$$
$$\Rightarrow \overline{V}=\frac{x}{\frac{۲x}{۵۰}+\frac{۳x}{۷۵}}=\frac{x}{\frac{۶x+۶x}{۱۵۰}}=\frac{۱۵۰\,x}{۱۲x}\Rightarrow \overline{V}=۱۲/۵\,\frac{m}{s}$$

۵۳. گزینه ۲ ابتدا با نوشتن معادله مستقل از زمان بین لحظه $t=۱(s)$ تا لحظه ی عبور از مبدأ مکان، شتاب را بدست می آوریم:

$$V_۲^{۲}-V_۱^{۲}=۲a\Delta x \Rightarrow ۳۶-۰=۲\times a\times ۹ \Rightarrow a=۲m/s^{۲}$$

سپس با نوشتن معادله سرعت بین لحظه $t=۰$ تا $t=۱(s)$ داریم:

$$V=at+V_۰ \Rightarrow ۰=۲\times۱+V_۰ \Rightarrow V_۰=-۲m/s$$

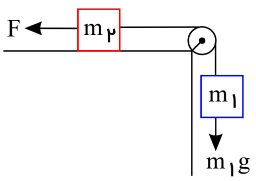
بنابراین اطلاعات داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+V_۰t+x_۰ \Rightarrow -۹=\frac{۱}{۲}\times۲\times۱^{۲}-۲\times۱+x_۰ \Rightarrow x_۰=-۸m$$

۵۴. گزینه ۲ با استفاده از معادله‌ی مکان – زمان و سرعت – زمان، داریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+V_۰t \xrightarrow[a=۵\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ t=۶\ s]{\Delta x=۱۸۰\ m} ۱۸۰=\frac{۱}{۲}\times۵\times۳۶+۶V_۰ \Rightarrow V_۰=۱۵\frac{m}{s}$$
$$V=at+V_۰ \xrightarrow[a=۵\frac{m}{s^{۲}}\ ,t=۶s]{V_۰=۱۵\ \frac{m}{s}} V=۵\times۶+۱۵ \Rightarrow V=۴۵\frac{m}{s}$$

۵۵. گزینه ۲



نکته: در شکل‌های ترکیبی باید دقت کنیم که دو مقدار برای F به دست می‌آید یکی حداقل نیروی F $(F\text{min})$ برای حالتی است که دستگاه در آستانه حرکت و رو به پایین باشد و دیگری حداکثر F $(F\text{max})$ برای حالتی است که دستگاه در آستانه حرکت و رو به بالا باشد.

حالت اول: اگر دستگاه در آستانه حرکت و رو به پایین باشد.

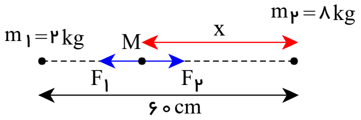
$$\sum F=ma \Rightarrow m_۱g-f_s-F=۰ \Rightarrow ۲۰-۱۰۰\times۰/۱-F=۰ \Rightarrow F\text{min}=۱۰$$

حالت دوم: اگر دستگاه در آستانه حرکت و رو به بالا باشد.

$$\sum F = ma \Rightarrow F - f_s - m_1 g = 0 \Rightarrow F - 100 \times 0{,}1 - 20 = 0 \Rightarrow F_{\max} = 30$$

بنابراین $10N \leq F \leq 30N$ است.

۵۶. گزینه ۳



$$F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{\cancel{G} m_1 \cancel{M}}{(60-x)^2} = \frac{\cancel{G} m_2 \cancel{M}}{(x)^2} \Rightarrow \frac{2}{(60-x)^2} = \frac{8}{(x)^2} \Rightarrow \frac{(x)^2}{(60-x)^2} = 4$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{x}{60-x} \Rightarrow x = 120 - 2x \Rightarrow x = 40cm$$

نکته: در حل مسائل نسبی، نیازی به رعایت تبدیل واحد نیست و فقط واحدهای دو طرف تساوی باید یکسان باشند.

۵۷. گزینه ۴   شتاب حرکت وزنه‌ها قبل از پاره شدن نخ برابر است با:

$$m_2 g + m_3 g - m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3)a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{60 + m_3 g - 40}{4 + 6 + m_3} \Rightarrow a_1 = \frac{20 + m_3 g}{10 + m_3}$$

و شتاب حرکت وزنه‌ها پس از پاره شدن نخ برابر است با:

$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{60 - 40}{6 + 4} \Rightarrow a_2 = 2\frac{m}{s^2}$$

بنابراین با توجه به نسبت شتاب‌ها در صورت سوال می‌توان گفت:

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1 \Rightarrow 2 = \frac{1}{3} \times \frac{20 + 10m_3}{10 + m_3} \Rightarrow 6 = \frac{20 + 10m_3}{10 + m_3} \Rightarrow 60 + 6m_3 = 20 + 10m_3$$

$$\Rightarrow 40 = 4m_3 \Rightarrow m_3 = 10kg$$

۵۸. گزینه ۴   برای تعیین نوع حرکت متحرک باید معادله‌ی سرعت و شتاب آن‌را تعیین علامت کنیم تا باتوجه به علامت $a \times V$ وضعیت حرکت در بازه‌های زمانی مختلف مشخص می‌شود:

$$V = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 6 = 0$$

ریشه‌های معادله‌ی سرعت: $t_1 = (2+\sqrt{2})s, t_2 = (2-\sqrt{2})s$

$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = 6t - 12$ ریشه‌ی معادله‌ی شتاب: $t_3 = 2s$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر می‌توان فهمید در بازه‌ی زمانی $t = 1s$ تا $t = 4s$ ابتدا حرکت تندشونده، سپس کندشونده و در نهایت تند شوند خواهند بود.

$t(s)$		$2-\sqrt{2}$	$t = 1s$	2		$2+\sqrt{2}$	$t = 4s$
V	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
a	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$a \times V$	$-$		$+$		$-$		$+$
نوع حرکت	کندشونده		تندشونده		کندشونده		تندشونده

۵۹. گزینه ۲   باتوجه به نمودار، ابتدا سرعت اولیه و شتاب متحرک را حساب می‌کنیم.

$$\Delta x = \overline{V} \times t \xrightarrow{\text{برای ثانیه‌ی اول}} -3 = \overline{V} \times 1 \Rightarrow \overline{V} = -3\frac{m}{s}$$

$$\overline{V} = \frac{V_0 + V_1}{2} \Rightarrow -3 = \frac{V_0 + 0}{2} \Rightarrow V_0 = -6\frac{m}{s}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \xrightarrow{\text{برای ثانیه‌ی اول}} 3 = \frac{1}{2}a(1)^2 - 6(1) \Rightarrow -3 = \frac{1}{2}a - 6 \Rightarrow a = 6\frac{m}{s^2}$$

باتوجه به نمودارمشخص است که درلحظه‌ی $t=1s$، متحرک در مبدأ مکان $(x=0)$ قراردارد. دو ثانیه پس ازعبوراز مبدأ مکان یعنی لحظه $t=3s$، داریم:

$$V=at+V_0 \Rightarrow V=6(3)-6=12\frac{m}{s}$$

۶۰. گزینه ۲

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+V_0t\Rightarrow 16=\frac{1}{2}a\times 2^2+V_0\times 2\Rightarrow a+V_0=8 \quad (1)$$

متحرک در۴ ثانیه‌ی اول، ۲۴ متر جابجا می‌شود.

$$24=\frac{1}{2}a\times 4^2+V_0\times 4\Rightarrow 2a+V_0=6 \quad (2)$$

$$(2),(1)\Rightarrow\begin{cases}a+V_0=8\\2a+V_0=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\frac{m}{s^2}\\V_0=10\frac{m}{s}\end{cases}$$

نکته تستی: در حرکت با شتاب ثابت برروی خط راست، جابجایی‌های متوالی در بازه‌های زمانی T، دنباله حسابی با قدر نسبت aT^2 تشکیل می دهد. پس:

$$8-16=a(2)^2\Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}\xrightarrow{(1)}V_0=10\frac{m}{s}$$

۶۱. گزینه ۲

خودروی اول $: x=\frac{1}{2}\times 5t^2+3\times t+0=2.5t^2+3t \quad (1)$

خودروی دوم $: x'=\frac{1}{2}\times 7t'^2+0\times t'+20.5=3.5t'^2+20.5$

$$\xrightarrow{t'=(t-1)s}x'=3.5(t-1)^2+20.5=3.5t^2-7t+24 \quad (2)$$

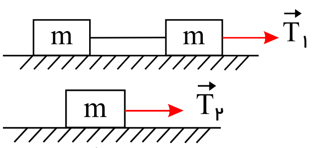
$$x=x'\xrightarrow{(1),(2)}2.5t^2+3t=3.5t^2-7t+24$$

$$\Rightarrow t^2-10t+24=0\Rightarrow(t-4)(t-6)=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=4s\\t_2=6s\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=2.5\times 4^2+3\times 4=52m\\x_2=2.5\times 6^2+3\times 6=108m\end{cases}\Rightarrow\Delta x=x_2-x_1=108-52=56m$$

۶۲. گزینه ۱ چون اصطحکاک نداریم، تنها نیروی حرکت‌دهنده‌ی دستگاه، نیروی وزن وزنه‌ی آویزان است. بنابراین با اعمال قانون دوم نیوتن، ابتدا شتاب حرکت دستگاه را به‌دست می‌آوریم:

$$F=(\Sigma m)a\Rightarrow mg=(3m)a\Rightarrow a=\frac{g}{3}$$

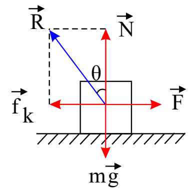


$$T_1=2ma=2m\times\frac{g}{3}=\frac{2}{3}mg$$

$$T_2=ma=m\times\frac{g}{3}=\frac{1}{3}mg$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\frac{2}{3}mg}{\frac{1}{3}mg}=2$$

۶۳. گزینه ۱ می‌دانیم نیرویی که سطح تکیه‌گاه بر جسم وارد می‌کند، برآیند دو نیروی عمودی تکیه‌گاه $(\vec{N})$ و نیروی اصطکاک $(\vec{f}_k)$ است. چون سرعت ثابت است بنابراین برایند نیروهای وارد بر جسم در راستای افقی صفر است. برای محاسبه نیروی عمودی تکیه‌گاه و نیروی عمودی تکیه گاه و نیروی اصطکاک، می‌توان نوشت:



$$\sum Fy = ۰ \Rightarrow N - mg = ۰ \Rightarrow N = mg$$

$$\xrightarrow{m=۳kg} N = ۳ \times ۱۰ \Rightarrow N = ۳۰N$$

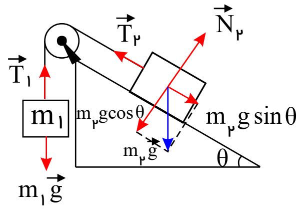
$$\sum F - \sum R = ۰ \Rightarrow F - f_k = ۰ \Rightarrow ۱۰\sqrt{۳} - f_k = ۰$$

$$\Rightarrow f_k = ۱۰\sqrt{۳}N$$

$$\tan\theta = \frac{f_k}{N} \xrightarrow{f_k=۱۰\sqrt{۳}N\,,\,N=۳۰N} \tan\theta = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳۰}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

۶۴. گزینه ۲ باتوجه به این که $m_۱ g > m_۲ g \sin\theta$ است. اگر قانون دوم نیوتون را برای حرکت مجموعه بنویسیم، داریم:



$$\sum F - \sum R = (\sum m)a \Rightarrow m_۱ g - m_۲ g \sin\theta = (m_۱ + m_۲)a$$

$$\xrightarrow[\theta=۳۰^\circ\,,\,g=۱۰\frac{N}{kg}]{m_۱=m_۲=m} m \times ۱۰ \times (۱ - \sin ۳۰^\circ) = ۲ma \Rightarrow a = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۵^۲ - ۰^۲ = ۲ \times ۲/۵ \times \Delta x \Rightarrow \Delta x = ۵m$$

۶۵. گزینه ۲ مدت زمانی که پس از پرتاب گلوله توپ طول می‌کشد تا صدای انفجار آن به گوش شنونده برسد برابر با مجموع زمانی است که گلوله بالا می رود (t) وزمانی که طول می‌کشد تا صدای انفجار به گوش شنونده برسد (t') داریم:

$$t + t' = ۵s \Rightarrow t' = ۵ - t(s) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم گلوله درارتفاع h از سطح زمین منفجر شود. داریم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + V_۰ t + y_۰ \Rightarrow h = -۵t^۲ + ۱۰۰t \quad (۲)$$

$$\Delta x_{\text{صوت}} = V_{\text{صوت}} \times t' \Rightarrow h = ۳۲۰t' \qquad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۲),(۱)} -۵t^۲ + ۱۰۰t = ۳۲۰(۵ - t) \Rightarrow t^۲ - ۸۴t + ۳۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (t-۴)(t-۸۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۴s & \text{ق ق} \\ t = ۸۰s & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی سرعت گلوله در لحظه‌ی انفجار داریم:

$$V = -gt + V_۰ \Rightarrow V = -۱۰ \times ۴ + ۱۰۰ \Rightarrow V = ۶۰\frac{m}{s}$$

دقت کنید $t = ۸۰s$ غیرقابل قبول است. چون طبق رابطه‌ی $\Delta y = -۵t^۲ + ۱۰۰t$ گلوله پس از $۲۰s$ به زمین می رسد.