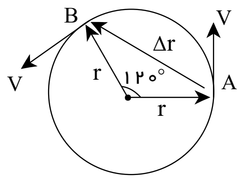
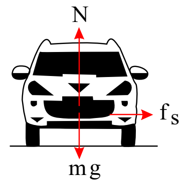
۲۱. گزینه ۲



$$\begin{cases} \overline{V} = \left|\frac{\Delta r}{\Delta t}\right| = \frac{۲r\sin\frac{۱۲۰}{۲}}{\frac{۱}{۳}T} = \frac{۲r\sin ۶۰}{\frac{۱}{۳}T} = \frac{r\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}T} \Rightarrow \frac{\overline{V}}{V} = \frac{\frac{r\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}T}}{rw} = \frac{\frac{r\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۳}T}}{r\frac{۲\pi}{T}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi} \\ V = rw \end{cases}$$

۲۲. گزینه ۴ در این حرکت، نیروی مرکزگرا نیروی اصطکاک است که سطح جاده بر ماشین وارد می‌کند.

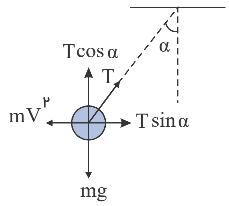
$$f_s = \frac{mV^{۲}}{R} = \frac{۲\times ۱۰^{۳}\times ۲۵\times ۲۵}{۱۲۵} = ۱۰^{۴}N$$ **اندازه نیروی مرکزگرا**



وضعیت نیروهای وارد بر ماشین به شکل مقابل است.

$$N = mg \ , \quad R = \sqrt{N^{۲} + f_s^{۲}} = \sqrt{(۲\times ۱۰^{۴})^{۲} + (۱۰^{۴})^{۲}} = \sqrt{۵}\times ۱۰^{۴}N$$

۲۳. گزینه ۳



$$\begin{cases} T\sin\alpha = \frac{mV^{۲}}{R} \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \Rightarrow T = m\sqrt{g^{۲} + (\frac{V^{۲}}{R})^{۲}}$$

$$\Rightarrow T = ۰/۲۵\sqrt{۱۰۰ + (\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰})^{۲}} = ۰/۲۵\sqrt{۲۰۰} = ۵\frac{\sqrt{۲}}{۲}N$$

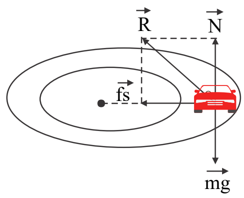
۲۴. گزینه ۳ با توجه به معادلات سرعت خطی و شتاب مرکزگرا داریم:

$$\begin{cases} V = r\omega \\ a = r\omega^{۲} \end{cases} \Rightarrow a = r\omega^{۲} \xrightarrow{V=r\omega} a = \overset{V}{\boxed{r\omega}}\,\omega \Rightarrow a = V\omega \xrightarrow[V=۶]{a=۱۲} ۱۲ = ۶\omega \Rightarrow \omega = ۲\frac{rad}{s}$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{۶}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۳s$$

۲۵. گزینه ۲

می‌دانیم در یک پیچ افقی نیروی اصطکاک ایستایی جانبی بین لاستیک‌های اتومبیل با سطح جاده است که نیروی مرکزگرای لازم را برای حرکت دایره‌ای اتومبیل تأمین می‌کند. پس می‌توان نوشت:



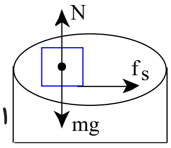
$$\left.\begin{aligned} f_s = F_r = \frac{mV^{۲}}{r} = \frac{۸۰۰\times ۴۰۰}{۲۰} = ۱۶۰۰۰N \\ N = mg = ۸۰۰۰N \end{aligned}\right\} \Rightarrow R = \sqrt{N^{۲} + f_s^{۲}} \Rightarrow R = ۸۰۰۰\sqrt{۱ + ۲^{۲}} = ۸۰۰۰\sqrt{۵}N$$

۲۶. گزینه ۴ در ساعت طول هر عقربه شعاع دایره‌ی مسیر خودش است.

در سؤالات نسبی دوره عقربه‌ها از یک واحد انتخاب شود.

$$\frac{V_{د}}{V_{س}}=\frac{r_{د}\,\omega_{د}}{r_{س}\,\omega_{س}}=\frac{r_{د}\times\frac{۲\pi}{T_{د}}}{r_{س}\times\frac{۲\pi}{T_{س}}}=\frac{r_{د}}{\frac{۱}{۲}r_{د}}\times\frac{\cancel{T_{س}}\ ۱۲h}{\cancel{T_{د}}\ ۱h}=۲۴$$

۲۷. گزینه ۴ نیروی مرکزگرا نیروی اصطکاک ایستایی می‌باشد.



$$T=\frac{t}{N}=\frac{۶۰}{۶۰}=۱\Rightarrow\Omega=\frac{۲\pi}{T}=\Omega=۲\pi$$

$$f_{S\max}\geq f_S=mr\Omega^۲\Rightarrow\mu_S mg\geq mr\Omega^۲\Rightarrow\mu_S g\geq r\Omega^۲\Rightarrow\mu_S\geq\frac{r\Omega^۲}{g}=\frac{۰/۱\times۴\pi^۲}{۱۰}=۰/۱$$

۲۸. گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{r}\text{کشش نخ } T=mr\omega^۲\\ \omega=۲\pi f\end{array}\right\}\Rightarrow T=mr۴\pi^۲f^۲\Rightarrow f^۲=\frac{T}{mr۴\pi^۲}$$

$$\Rightarrow f^۲=\frac{۳۶}{۰/۲۵\times۰/۴\times۴\times۱۰}=۹\Rightarrow f=۳Hz$$

۲۹. گزینه ۳ می‌دانیم در سطح افقی چرخان، نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح، نیروی مرکزگرای لازم را جهت حرکت دایره‌ای جسم تأمین می کند. بنابراین داریم:

$$\mu_s N=m\,r_{\max}\,\omega^۲\Rightarrow\mu_s mg=m\,r_{\max}\,\omega^۲\Rightarrow r_{\max}=\frac{\mu_s g}{\omega^۲}=\frac{۰/۸\times۱۰}{۵^۲}=\frac{۸}{۲۵}=\frac{۳۲}{۱۰۰}m=۳۲cm$$

$$\Delta r=۳۲-۲۰=۱۲cm$$

۳۰. گزینه ۳ در زمانی که جسم بر روی سطح دوار، در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت است، نیروی مرکزگرای آن نیروی اصطکاک است و بیش ترین مقدار سرعت برای نلغزیدن جسم روی سطح دوار در زمانی است که جسم در آستانه لغزش قرار دارد. پس داریم:

$$f_{s\max}=F_r\Rightarrow f_{s\max}=m\frac{V_{\max}^۲}{r}\xrightarrow[N=mg]{f_{s\max}=\mu_s N}\mu_s mg=\frac{mV_{\max}^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow V_{\max}=\sqrt{\mu_s gr}$$

پس می توان گفت:

$$\frac{V_{\max ۲}}{V_{\max ۱}}=\sqrt{\frac{r_۲}{r_۱}}\Rightarrow\left(\frac{۶}{۵}\right)^۲=\frac{r_۲}{r_۱}$$

$$\Rightarrow\frac{r_۲}{r_۱}=\frac{۳۶}{۲۵}\Rightarrow\text{درصد تغییرات}=\frac{r_۲-r_۱}{r_۱}\times۱۰۰=\frac{\frac{۳۶}{۲۵}r_۱-r_۱}{r_۱}\times۱۰۰=۴۴\ \text{درصد}$$

۳۱. گزینه ۴

$l_۱=۵۰cm$ و $l_۲=۶۰cm$ و $m=۰/۱kg$

نیروی مرکزگرای وارد بر گلوله برابر نیروی کشسانی فنر و شعاع مسیر حرکت، برابر طول فنر در حال چرخش است با توجه به این که طول فنر در حال چرخش برابر $l_۲=r=۶۰cm$ و تغییر طول آن برابر $x=۶۰-۵۰=۱۰cm$ است، می‌توان نوشت:

$$F=mr\omega^۲\Rightarrow kx=mr\omega^۲$$

$$\Rightarrow k\times۰/۱=۰/۱\times۰/۶\times۱۰۰\Rightarrow k=۶۰\frac{N}{m}$$

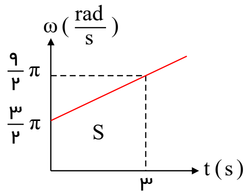
۳۲. گزینه ۴ نمودار $\omega-t$ یک خط راست است، پس معادله $\omega-t$ آن نیز درجه ۱ است و این حرکت دایره‌ای با شتاب ثابت است، بنابراین می‌توان گفت شتاب زاویه‌ای برابر شیب خط نمودار $\omega-t$ است:

$$\alpha=\text{شیب خط}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{۲\pi-\frac{۳}{۲}\pi}{۰/۵-۰}=\pi\frac{rad}{S^۲}$$

بنابراین داریم:

$$\omega=\alpha t+\omega_۰\Rightarrow\omega=\pi t+\frac{۳}{۲}\pi\xrightarrow{t=۳}\omega=۳\pi+\frac{۳}{۲}\pi=\frac{۹}{۲}\pi\frac{rad}{s}$$

همچنین سطح زیر نمودار $\omega-t$ معرف $\Delta\theta$ (جابه‌جایی زاویه‌ای) متحرک است:



$$\Delta\theta = S = \frac{(\frac{۳}{۲}\pi + \frac{۹}{۲}\pi) \times ۳}{۲} = ۹\pi\, rad$$

هر دور کامل برابر ۲π رادیان جابه‌جایی زاویه‌ای است، پس:

$$N = \frac{\Delta\theta}{۲\pi} = \frac{۹\pi}{۲\pi} = ۴/۵ \text{ دور}$$

نکته: دقت داشته باشید که تمام روابط حرکت خطی به شرط معادل‌سازی در حرکت دایره‌ای نیز کاربرد دارند:

$$\begin{cases} x \to \theta \\ V \to \omega \\ a \to \alpha \text{ یا } \omega' \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \theta = \omega t + \theta_۰ & \text{حرکت دایره‌ی یکنواخت} \\ \theta = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ + \omega_۰ t + \theta_۰ & \text{حرکت دایره‌ای با شتاب ثابت} \\ \omega = \alpha t + \omega_۰ & \text{حرکت دایره‌ای با شتاب ثابت} \end{matrix}$$

۳۳. گزینه ۳ در هر ۶۰ ثانیه ۱۲بار مسیر دایره‌ای طی می‌شود پس دوره‌ی حرکت آن برابر است با:

$$T = ۵s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\times۳}{۵} = ۱/۲\frac{rad}{s}$$

در ضمن اندازه‌ی سرعت آن برابر است با:

$$V = R\,\omega = \frac{۲\pi R}{T} = \frac{۲۴}{۵} = ۴/۸\frac{m}{s}$$

$$a = V\,\omega = ۴/۸ \times ۱/۲ = ۵/۷۶\frac{m}{s^۲}$$

۳۴. گزینه ۲ حداکثر ω مربوط به زمانی است که جسم در آستانه لغزش در راستای شعاعی قرار می‌گیرد، بنابراین:

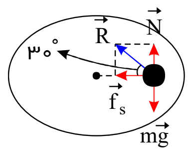
$$f_s \max = F_{\text{مرکزگرا}} \Rightarrow \mu_s N = mr\omega^۲ \Rightarrow ۰/۲ \times mg = m \times ۰/۵ \times \omega^۲ \Rightarrow ۲ = ۰/۵\,\omega^۲$$

$$\Rightarrow \omega^۲ = ۴ \Rightarrow \omega = ۲\frac{rad}{s}$$

توجه داشته باشید که در حل این سوال نیازی به جرم گلوله نبود، یعنی بیشینه ω (به شرط نلغزیدن) به جرم جسم بستگی ندارد فقط تابع ضریب اصطکاک و شعاع دوران است.

۳۵. گزینه ۴

مطابق شکل به سکه سه نیروی عمودی تکیه‌گاه، وزن و نیروی اصطکاک ایستایی وارد می‌شود که در این جا نیروی اصطکاک ایستایی نیروی مرکزگرای لازم را برای حرکت دورانی سکه تأمین می‌کند. بنابراین داریم:



$$\tan ۳۰ = \frac{N}{f_s} \Rightarrow f_s = \frac{N}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} \xrightarrow{N=mg} f_s = \frac{mg}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \sqrt{۳}mg$$

$$= \sqrt{۳} \times ۰/۰۲ \times ۱۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۵}N$$

$$\omega = ۲\pi f \Rightarrow ۲\pi \times \frac{۱}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}\ \frac{rad}{s}$$

$$f_s = mr\omega^۲ \xrightarrow{V=r\omega} f_s = mV\omega \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۵} = ۰/۰۲ \times V \times \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\xrightarrow{\pi=۳} \frac{\sqrt{۳}}{۵} = ۰/۰۴V \Rightarrow V = ۵\sqrt{۳}\ \frac{m}{s}$$

۳۶. گزینه ۲

$$U=\frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow 50=\frac{1}{2}K \Rightarrow K=100\frac{N}{m}$$

$$a=-\omega^2 x \Rightarrow \omega^2=200\left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega^2=\frac{K}{m} \Rightarrow 200=\frac{100}{m} \Rightarrow m=\frac{1}{2}kg=500g$$

۳۷. گزینه ۲

$$K=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t=\frac{1}{2}\times 0.4\times 100\pi^2\times(0.02)^2\cos^2(10\pi t)=0.08\cos^2(10\pi t)$$

۳۸. گزینه ۱

$$U+K=E \Rightarrow E=0.5+1.5=2J$$

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 \;,\; U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow \frac{U}{E}=\left(\frac{x}{A}\right)^2 \Rightarrow \frac{0.5}{2}=\left(\frac{3}{A}\right)^2 \Rightarrow A=6cm$$

در فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از انتهای مسیر : $|x|=6-2=4\,cm \Rightarrow \frac{U}{E}=\left(\frac{4}{6}\right)^2 \Rightarrow U=\frac{4}{9}E=\frac{4}{9}\times 2=\frac{8}{9}J$

$$\Rightarrow K=E-U=2-\frac{8}{9}=\frac{10}{9}J$$

۳۹. گزینه ۱

$$2A=12cm \Rightarrow A=6cm$$

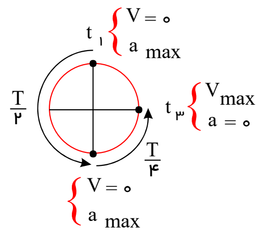
$$U=\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \;,\; E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow \frac{U}{E}=\left(\frac{x}{A}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{E}=\left(\frac{4}{6}\right)^2 \Rightarrow E=\frac{9}{4}J$$

$$E=K_{max}=\frac{1}{2}mV_{max}^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\times 0.125\times V_{max}^2=\frac{9}{4} \Rightarrow V_{max}^2=36 \Rightarrow V_{max}=6\frac{m}{s}$$

۴۰. گزینه ۱ می‌دانیم در دو انتهای مسیر سرعت نوسانگر صفر و شتاب بیشینه است و در مرکز نوسان سرعت بیشینه و شتاب نوسانگر صفر است. بنابراین:

فاصله‌ی زمانی بین دو مرتبه صفر شدن سرعت مضرب صحیحی از $\frac{T}{2}$ است، یعنی:

$$t_1+0.3-t_1=n\frac{T}{2} \Rightarrow 0.3=n\frac{T}{2} \Rightarrow T=\frac{0.6}{n}$$



از طرفی فاصله‌ی زمانی بین صفر شدن سرعت و صفر شدن شتاب مضرب فردی از $\frac{T}{4}$ است، یعنی:

$$(t_1+0.35)-(t_1+0.3)=(2m-1)\frac{T}{4} \Rightarrow 0.05=(2m-1)\frac{T}{4} \Rightarrow T=\frac{0.2}{2m-1}$$

طبق رابطه‌ی $T=\frac{1}{f}$ چون حداقل بسامد خواسته شده پس باید بیشترین دوره‌ی نوسان را در نظر بگیریم تا هر دو شرط (۱) و (۲) برقرار باشد. در اینصورت داریم:

$$T=0.2 \Rightarrow f=\frac{1}{T}=5Hz$$

۴۱. گزینه ۳

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{200}{0/8}}=\sqrt{\frac{2000}{8}}=5\sqrt{10}\,\frac{rad}{s}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{5\sqrt{10}}=\frac{2}{5}s$$

$$N=f\cdot\Delta t=\frac{\Delta t}{T}=\frac{60}{\frac{2}{5}}=150$$

یک دقیقه معادل ۱۵۰ دوره است. در هر دوره طول مسیر ۲ بار طی شده و مسافت $4A$ طی می‌شود.

$$2A=40-30=10cm\Rightarrow 4A=20cm$$
$$d=150\times 20=3000cm=30m$$

۴۲. گزینه ۳

$$\frac{5T}{4}=2\Rightarrow T=\frac{8}{5}s$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi\times 5}{8}=\frac{10\pi}{8}=\frac{5\pi}{4}\,\frac{rad}{s}$$

$$A\omega=VMax\Rightarrow\frac{A\times 5\pi}{4}=\frac{\pi}{40}\Rightarrow A=\frac{1}{50}=\frac{2}{100}m=2\,cm$$

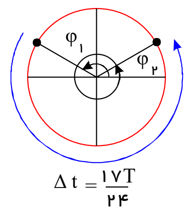
$$\varphi=\omega t=\frac{5\pi}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{5\pi}{3}\,rad$$

$$a=-aMax\sin\varphi=-A\omega^2\sin\varphi=-\frac{2}{100}\times\frac{25\pi^2}{16}\times\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{32}\,\frac{m}{s^2}$$

۴۳. گزینه ۳ باتوجه به رابطه‌های $aMax=A\omega^2$ و $VMax=A\omega$ ابتدا باید بدانیم به ازای چه فازهایی $a=-\frac{1}{2}aMax$ و $V=\frac{\sqrt{2}}{2}VMax$ خواهد شد. بنابراین داریم:

$$a=-aMax\sin\varphi\Rightarrow-\frac{1}{2}aMax=-aMax\sin\varphi_1$$

$$\Rightarrow\sin\varphi_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_1=\frac{\pi}{6}\ \text{یا}\ \frac{5\pi}{6}$$



چون حرکت تندشونده است نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک می‌شود، پس نوسانگر در ناحیه‌ی دوم و در فاز $\varphi_1=\frac{5\pi}{6}$ قرار دارد. از طرفی برای سرعت نوسانگر داریم:

$$V=VMax\cos\varphi\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}VMax=VMax\cos\varphi_2\Rightarrow\cos\varphi_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi_2=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\cdots$$

چون حرکت کندشونده است پس نوسانگر در حال دور شدن از مرکز نوسان و در ناحیه‌ی اول قرار دارد و چون باید $\varphi_2>\varphi_1$ باشد پس فاز $\varphi_2=(2\pi+\frac{\pi}{4})=\frac{9\pi}{4}$ صحیح است. در نتیجه:

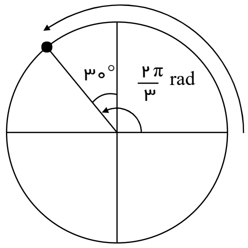
$$\Delta\varphi=\omega\,\Delta t\Rightarrow\frac{9\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}=\frac{2\pi}{T}\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{17T}{24}$$

۴۴. گزینه ۱ طبق رابطه‌ی $(f=\frac{N}{t})$ تعداد نوسان در یک مدت معین متناسب است با بسامد نوسان و از طرفی نیز طبق رابطه‌ی $(f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}})$ بسامد آونگ ساده کم‌دامنه با جذر طول آن نسبت عکس دارد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}f=\frac{N}{t}\\ f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\end{cases}\Rightarrow\frac{N_2}{N_1}=\frac{f_2}{f_1}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\Rightarrow\frac{N}{N+40}=\sqrt{\frac{L_1}{9L_1}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{N}{N+40}=\frac{1}{3}\Rightarrow N=20\ \text{نوسان}$$

پس در مدت دو دقیقه آونگ به طول L تعداد ۶۰ نوسان ($N+۴۰=۶۰$) و در نتیجه در مدت ۴ دقیقه ۱۲۰ نوسان کامل انجام می‌دهد.

۴۵. گزینه ۳ ابتدا فاز نوسانگر را در لحظه‌ی $t=\frac{۱}{۱۸}s$ به دست می‌آوریم:



$$\Delta\varphi=\omega\Delta t\xrightarrow{t=۰}\Delta\varphi=۱۲\pi\times\frac{۱}{۱۸}=\frac{۲\pi}{۳}rad\rightarrow\varphi=\frac{۲\pi}{۳}rad$$

در بازه‌ی زمانی $t=۰$ تا $t=\frac{۱}{۱۸}s$ نوسانگر از صفر تا فاز $\frac{۲\pi}{۳}$ را طی می‌کند. باتوجه به آن که در ناحیه ی اول نوسانگر از مرکز نوسان دور می‌شود، حرکت آن کندشونده است و چون نوسانگر در ناحیه‌ی دوم در حال نزدیک شدن به مرکز نوسان است، حرکت آن تندشونده است. بنابراین مدت زمان حرکت تندشونده‌ی این نوسانگر برابر است با:

$$\Delta\varphi=\omega\Delta t\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۲}=۱۲\pi\times\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{۱}{۷۲}s$$

۴۶. گزینه ۱ از آن‌جا که انرژی پتانسیل نوسانگر در حال کاهش است، بنابراین نوسانگر در حال نزدیک شدن به مبدأ نوسان است، از طرفی علامت شتاب منفی است بنابراین مکان متحرک مثبت است $(a=-\omega^۲x)$ لذا نوسانگر در ربع دوم دایره‌ی مرجع نوسان قرار دارد و در این قسمت سرعت منفی است.

۴۷. گزینه ۱ در مورد نوسان دو نوسانگر با دوره متفاوت که N نوسان از یکدیگر جلو یا عقب می‌افتند، می‌توان گفت:

$$t=\frac{NT_۱T_۲}{|\Delta T|}\Rightarrow t=\frac{۶\times۳\times۵}{|۵-۳|}=\frac{۶\times۱۵}{۲}=۴۵(s)$$

۴۸. گزینه ۱ دامنه‌ی نوسان نصف طول پاره‌خطی است که نوسانگر روی آن حرکت نوسانی انجام می‌دهد.

$$A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$$

هر رفت و برگشت، یک نوسان کامل است. بنابراین نوسانگر ۵ بار نوسان کامل کرده است و داریم:

$$T=\frac{t}{n}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow T=۰/۴s$$

در لحظه‌های $\frac{T}{۴}$, $\frac{۳T}{۴}$ نوسانگر به ترتیب در نقاط $+A$ و $-A$ قرار دارد. بنابراین:

$$\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-A-A}{\frac{۳T}{۴}-\frac{T}{۴}}\Rightarrow\frac{-۴A}{T}=\frac{-۴\times۵\times۱۰^{-۲}}{۰/۴}=-۰/۵\frac{m}{s}\Rightarrow|\overline{V}|=۰/۵\frac{m}{s}$$

۴۹. گزینه ۱ مطابق رابطه‌ی حرکت هماهنگ ساده برای دو مجموعه داریم:

$$x_۱=A_۱\sin\omega_۱t\ \ (۱)$$
$$x_۲=A_۲\sin\omega_۲t\ \ (۲)$$

در حرکت هماهنگ ساده‌ی وزنه و فنر، بسامد زاویه‌ای برابر است با:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{\omega_۱}{\omega_۲}=\frac{\sqrt{\frac{k_۱}{m_۱}}}{\sqrt{\frac{k_۲}{m_۲}}}\xrightarrow[m_۲=۲m_۱]{k_۲=۲k_۱}\omega_۱=\omega_۲\ \ (۳)$$

$$(۱)\,,\,(۲)\,,\,(۳)\ \Rightarrow\frac{x_۱}{x_۲}=\frac{A_۱}{A_۲}\Rightarrow\frac{|x_۱|}{|x_۲|}=\frac{A_۱}{A_۲}\ \ (۴)$$

در رابطه‌ی بالا $|x_۱|$ و $|x_۲|$ فاصله‌ی دو جرم از مرکزنوسان می‌باشد. باتوجه به این که جرم $m_۱$ در فاصله‌ی ۱۰ سانتی‌متری از انتهای پاره خط نوسان خود قرار دارد، بنابراین فاصله‌ی آن از مرکز نوسان برابر است با:

$$|x_۱|=۱۰-۶=۴cm\xrightarrow[A_۱=۶cm\,,\,A_۲=۳cm]{(۴)}\frac{۴}{|x_۲|}=\frac{۶}{۳}\Rightarrow|x_۲|=۲cm$$

۵۰. گزینه ۲ هنگامی که آونگ ۵ را به نوسان در می‌آوریم به دلیل پدیده‌ی تشدید همه آونگ‌ها به نوسان در می‌آیند. اما چون طول و جرم آونگ‌های ۲ و ۵ یکسان است بیش‌ترین انرژی به آونگ ۲ منتقل می‌شود و آونگ ۲ دیرتر از بقیه می‌ایستد.

۵۱. گزینه ۲ ابتدا فاز نوسانگر را در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ به دست می‌آوریم:

در لحظه‌ی $t_۱$: $Sin\varphi_۱ = \frac{x_۱}{A} = \frac{۰/۱}{۰/۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \varphi_۱ = \frac{\pi}{۶}rad$ یا $\frac{۵\pi}{۶}rad$

چون در لحظه‌ی $t_۱$ حرکت نوسانگر کندشونده و مکان آن مثبت است و در جهت مثبت از مرکز نوسان دور می‌شود. پس: $\varphi_۱ = \frac{\pi}{۶}$ قابل قبول است.

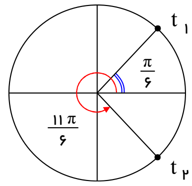
در لحظه‌ی $t_۲$: $Sin\varphi_۲ = \frac{x_۲}{A} = \frac{-۰/۱}{۰/۲} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \varphi_۲ = \frac{۷\pi}{۶}rad$ یا $\frac{۱۱\pi}{۶}rad$

چون در لحظه‌ی $t_۲$ حرکت نوسانگر تندشونده و مکان آن منفی است و به مرکز نوسان نزدیک می‌شود پس $\varphi_۲ = \frac{۱۱\pi}{۶}$ قابل قبول است.

بنابراین چون کم‌ترین بسامد زاویه‌ای خواسته شده، پس مطابق دایره‌ی مرجع کم‌ترین تغییر فاز را در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\Delta\varphi = \varphi_۲ - \varphi_۱ = \frac{۱۱\pi}{۶} - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۰}{۶}$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t \xrightarrow[\Delta t = ۰/۲s]{\omega = ۲\pi f} \frac{۱۰\pi}{۶} = ۲\pi f \times ۰/۲ \Rightarrow f = \frac{۲۵}{۶}Hz$$



۵۲. گزینه ۲ مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی نوسانگر برابر با انرژی مکانیکی نوسانگر می‌باشد.

$$U = ۱۵K$$

$$E = U + K \xrightarrow{U=۱۵K} E = ۱۵K + K \Rightarrow E = ۱۶K$$

$$K = K\max\cos^۲\theta \xrightarrow{K\max = E} \frac{K}{E} = \cos^۲\theta$$

$$\xrightarrow{E=۱۶K} \frac{K}{۱۶K} = \cos^۲\theta \Rightarrow |\cos\theta| = \frac{۱}{۴}$$

$$\frac{|V|}{V\max} = |\cos\theta| \Rightarrow \frac{۲}{V\max} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow V\max = ۸\frac{m}{s}$$

۵۳. گزینه ۲

$$f = \frac{۱}{T} \xrightarrow{f_{\text{زمین}} = f_{\text{ماه}}} T_{\text{زمین}} = T_{\text{ماه}}$$

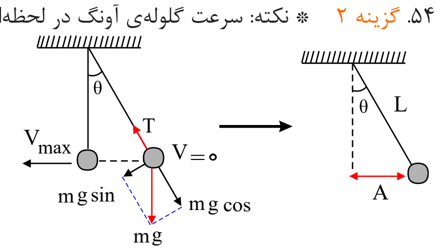
باتوجه به دوره‌ی نوسان‌های یک آونگ ساده‌ی کم دامنه، می‌توانیم بنویسیم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \xrightarrow{T_{\text{زمین}} = T_{\text{ماه}}} \sqrt{\frac{\ell}{g}} = \sqrt{\frac{\ell'}{g'}} \Rightarrow \frac{g}{g'} = \frac{\ell}{\ell'} \Rightarrow ۶ = \frac{۶۰}{\ell'} \Rightarrow \ell' = ۱۰cm$$

پس طول آونگ باید $۵۰cm$ کاهش یابد.

۵۴. گزینه ۲ ⁎ نکته: سرعت گلوله‌ی آونگ در لحظه‌ای که نخ متصل به آن از وضعیت قائم عبور می‌کند، بیشینه است. و در این حالت داریم:

$$\sin\theta = \frac{A}{L} \rightarrow A = L\sin\theta \xrightarrow{\sin\theta = \theta} A = L\theta$$



$$V\max = Aw \xrightarrow{w = \sqrt{\frac{g}{L}}} V\max = L\theta \times \sqrt{\frac{g}{L}} = \theta\sqrt{gl} \rightarrow V\max = \theta\sqrt{gl}$$

بنابراین در این مسأله داریم:

$$V\text{max} = \theta\sqrt{gl} \rightarrow \frac{V\text{max}\,A}{V\text{max}\,B} = \frac{\theta A}{\theta B} \times \sqrt{\frac{LA}{LB}} = \frac{\frac{۱}{۲}\theta B}{\theta B} \times \sqrt{\frac{۴lB}{lB}} = ۱ \rightarrow \frac{V\text{max}\,A}{V\text{max}\,B} = ۱$$

۵۵. گزینه ۳ برای سیستم و جرم و فنر، انرژی جنبشی بیشینه (انرژی مکانیکی) از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد.

$$K\text{max} = E = \frac{۱}{۲}mA^{۲}\omega^{۲} \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}} K\text{max} = \frac{۱}{۲}KA^{۲}$$

بنابراین برای دو فنر با ضریب سختی و دامنه‌ی یکسان، انرژی مکانیکی یا انرژی جنبشی بیشینه مستقل از جرم وزنه‌ی متصل به فنرها می‌باشد.

$$\frac{K\text{max}_{۲}}{K\text{max}_{۱}} = \frac{\frac{۱}{۲}KA^{۲}}{\frac{۱}{۲}KA^{۲}} = ۱$$

$$\frac{V\text{max}_{۲}}{V\text{max}_{۱}} = \frac{A_{۲}}{A_{۱}} \times \frac{\omega_{۲}}{\omega_{۱}}$$

$$\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}} \frac{V\text{max}_{۲}}{V\text{max}_{۱}} = ۱ \times \sqrt{\frac{m_{۱}}{m_{۲}}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$