دبیرستان علامه حلی تهران

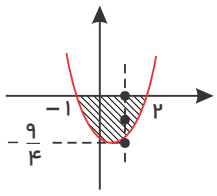
۱.گزینه ۱

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۴+۵-۷=۲$$
$$n(A^{۲}\cup B^{۲})=n(A^{۲})+n(B^{۲})-n(A^{۲}\cap B^{۲})=۴^{۲}+۵^{۲}-(n(A\cap B)^{۲})=۱۶+۲۵-۴=۳۷$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۲.گزینه ۳ ابتدا نمودار رابطه را با ترسیم مرزهای آن را رسم می‌کنیم.

$$y=(x-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۹}{۴}$$



سپس تقاطع خطوط $x=۱$ و $x=۲$ را با ناحیه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آوریم که ۴ عضو دارد.

روش دوم:

$$x^{۲}-x-۲\le ۰\Rightarrow -۱\le x\le ۲\xrightarrow{x\in N}۱\le x\le ۲$$
$$\left.\begin{array}{l} x=۱\Rightarrow -۲\le y\le ۰\Rightarrow \text{۳امتداد} \\ x=۲\Rightarrow ۰\le y\le ۰\Rightarrow y=۰ \ \text{۱امتداد}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{کلا ۴ مقدار دارد}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۳.گزینه ۳

$$M=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\\۱&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\end{bmatrix}$$

می‌دانیم:

$$M(ROR)=M^{(۲)}(R)$$
$$M(ROR)=M^{(۲)}(R)=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\\۱&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\\۱&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۰\\۱&۰&۰&۰\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow ROR=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۳)\}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۴.گزینه ۱ ابتدا ماتریس رابطه‌ی R را می‌نویسیم:

$$M(R)=\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d\\ \hline a&۰&۱&۰&۰\\ b&۰&۰&۰&۱\\ c&۱&۰&۰&۰\\ d&۰&۰&۱&۰\end{array}\ ,\ M(ROR)=M(R)\odot M(R)=M^{(۲)}(R)$$
$$\Rightarrow M(ROR)=\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۱\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۱\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۰\\۱&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$
$$M(R)\qquad\underset{\text{ضرب نظیر به نظیر درایه ها}}{\wedge}\qquad M(ROR)=\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۱\\۱&۰&۰&۰\\۰&۰&۱&۰\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}۰&۰&۰&۱\\۰&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۰\\۱&۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

راه سریع‌تر یافتن $M^{(۲)}(R)$:

برای به‌دست آوردن سطر iام $M^{۲}$ می‌توانیم. در ستون‌هایی که ۱ حضور داشت، سطرهای متناظر با همان ستون‌ها را با هم جمع می‌کنیم و به‌جای سطر iام $M^{(۲)}$ قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال:

$$M^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{(۲)} = \begin{matrix} R_۲ \to \\ R_۱ + R_۲ \to \\ R_۲ + R_۳ \to \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۵.گزینه ۲ رابطه‌ی روبه‌رو دارای خاصیت بازتابی نیست زیرا همه رئوس طوقه ندارند.

خاصیت تعدی هم ندارد: $(۳\ ,\ ۱) \in R\ ,\ (۱\ ,\ ۲) \in R$ اما $(۳\ ,\ ۲) \notin R$

خاصیت تعدی از روی ماتریس هم می‌توان تشخیص داد:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow M^{(۲)} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مشخص است که $M << M^{(۲)}$ است حال آن‌که برای برقراری خاصیت تعدی باید $M >> M^{(۲)}$ باشد.

نکته:

اگر رابطه‌ی R دارای خاصیت بازتابی باشد، $M >> I$ است.

اگر رابطه‌ی R دارای خاصیت تقارنی باشد، $M = M^T$ است.

اگر رابطه‌ی R دارای خاصیت تعدی باشد، $M^{(۲)} << M$ است.

اگر رابطه‌ی R دارای خاصیت پادتقارنی باشد، $M \wedge M^T << I$ است.

روش سریع به‌دست آوردن $M^{(۲)}$:

$$M = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow M^{(۲)} = \begin{matrix} R_۱ + R_۲ \\ R_۲ \\ R_۱ + R_۳ \\ R_۱ + R_۲ \end{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۶.گزینه ۳ اگر هیچ یک از زوج‌های مرتب رابطه دارای مؤلفه‌ی اول یک نباشد، یعنی سطر اول ماتریس متناظر با رابطه تماماً صفر است. حداکثر عضوهای رابطه‌ی پاد تقارنی هنگامی است که تمام عناصری به فرم $(a\ ,\ a)$ (یعنی عناصر قطر اصلی یک باشند) و در ضمن از بین هر یک از زوج‌های مرتب، $(a\ ,\ b)$ و $(b\ ,\ a)$ دقیقاً یکی در رابطه حضور داشته باشد. یعنی تمام قطر اصلی و مثلاً عناصر زیر قطر اصلی یک باشند.

$$M = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

البته عنصر روي قطر و در سطر اول صفر است، پس حداکثر تعداد اعضا برابر است با:

$$\underbrace{\frac{۳۶ - ۶}{۲}}_{\text{زیر قطر اصلی}} + \underbrace{۵}_{\text{قطر اصلی عناصر}} = ۲۰$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۷.گزینه ۴ برای این‌که R دارای خاصیت بازتابی باشد. باید همه‌ی اعضای به‌صورت $(a\,,a)$ را داشته باشد، اما برای تخریب سه خاصیت دیگر از سه زوج مرتب $(b\,,c)$, $(b\,,a)$, $(a\,,b)$ استفاده می‌کنیم. زوج‌های $(b\,,a)$, $(a\,,b)$ خاصیت پاد تقارنی را تخریب می‌کنند. زوج $(b\,,c)$ خاصیت تقارنی را از بین می‌برد و زوج‌های $(b\,,c)$, $(a\,,b)$ (با توجه به عدم وجود زوج $(a\,,c)$ خاصیت تراگذری را تخریب می‌کنند. لذا حداقل اعضای مورد نیاز برای این منظور ۴ زوج به صورت $(a\,,a)$ و سه زوج مرتب فوق هستند. یعنی حداقل به ۷ زوج مرتب نیاز است.

$R=\{(a\,,a)\,,(b\,,b)\,,(c\,,c)\,,(d\,,d)\,,(a\,,b)\,,(b\,,c)\,,(b\,,a)\}$

تذکر: رابطه R روی مجموعه n عضوی A فقط بازتاب باشد. حداقل $n+۳$ عضو دارد.

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت

۸.گزینه ۴ نکته: فرض کنیم رابطه‌ای روی مجموعه‌ی n عضوی A و M ماتریس نمایش آن باشد. در این‌صورت داریم:

R بازتابی است، اگر و تنها اگر $I_n << M$

R متقارن است، اگر و تنها اگر $M=M^T$

R ترایایی است، اگر و تنها اگر $M^{(۲)} << M$

R پادمتقارن است، اگر و تنها اگر $M\wedge M^T << I$

با توجه به نکته‌ی فوق، منظور سؤال تعداد روابط متقارن و پادمتقارن روی یک مجموعه‌ی ۵ عضوی است. رابطه ای که هم متقارن و هم پادمتقارن باشد فقط می تواند طوقه داشته باشد، بنابراین:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & \bigcirc & \circ & \circ & \circ & \circ \\ b & \circ & \bigcirc & \circ & \circ & \circ \\ c & \circ & \circ & \bigcirc & \circ & \circ \\ d & \circ & \circ & \circ & \bigcirc & \circ \\ e & \circ & \circ & \circ & \circ & \bigcirc \end{array} \qquad \text{تعداد روابط} = ۲^۵$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۹.گزینه ۲ از این‌که $I_۴ << M$ نتیجه می‌گیریم $M_{۴\times ۴}$ و M ماتریس رابطه‌ی بازتابی است.

از این‌که $M\wedge M^T << I_۴$ نتیجه می‌گیریم M ماتریس رابطه‌ی پاد متقارن است.

پس در واقع در این سؤال تعداد روابط بازتابی و پاد متقارن روی یک مجموعه‌ی ۴ عضوی مورد پرسش قرار گرفته که برابر است با: $۳^۶$

نکته: تعداد روابط بازتابی و پاد متقارن روی مجموعه‌ی n عضوی A برابر است با: $۳^{\frac{n^۲-n}{۲}}$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۰.گزینه ۳ ماتریس نمایش رابطه‌ی R یک ماتریس ۴×۴ است. تعداد حالت‌های ممکن برای هریک از درایه‌های این ماتریس را بررسی می‌کنیم:

عناصر روی قطر اصلی هریک ۲ حالت دارند (عضو رابطه باشند یا نباشند)، پس در کل $۲^۴$ حالت دارند.

برای عناصر غیر واقع بر قطر اصلی، یعنی عناصر به فرم $(a\,,b)$ که در آن $a\neq b$ ، داریم:

$(a\,,b)\in R\ ,\ (b\,,a)\notin R$ یا $(a\,,b)\notin R\ ,\ (b\,,a)\in R$, $(a\,,b)\notin R\,,(b\,,a)\notin R$

یعنی عناصر متناظر قطر اصلی نسبت به هم ۳ وضعیت دارند.

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۳ & ۳ \\ ۲ & \square & ۲ & ۳ & ۳ \\ ۳ & \square & \square & ۲ & ۳ \\ ۴ & \square & \square & \square & ۲ \end{array}$$

بنابراین عناصر غیر واقع بر قطر اصلی، در کل $۳^{\frac{۱۶-۴}{۲}}=۳^۶$ حالت دارند.

درنتیجه تعداد روابط پادمتقارن روی مجموعه‌ی A برابر است با: $۲^۴\times ۳^۶$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۱.گزینه ۴ اگر گراف معادل با یک رابطه‌ی هم‌ارزی رسم شود، هر یک از کلاس‌های هم‌ارزی یک بخش جدا از هم گراف حاصل است. اما چون هر کدام از کلاس‌های هم‌ارزی، ضرب دکارتی افراز متناظر در خودش است، هر یک از زیر گراف‌های حاصل، یک گراف جهت‌دار کامل است.(گراف جهت دار را کامل نامیم هرگاه همه رئوس دارای طوقه بوده و در هر بخش همه یال ها ی جهت دار موجود باشند در واقع اگر k عضو داشته باشیم $k^۲$ یال داریم)

ضمن آن‌که هر چه تعداد کلاس‌های هم‌ارزی بیشتر و تعداد اعضای کلاس‌ها کمتر باشد، تعداد زوج مرتب‌های نظیر رابطه کمتر خواهد بود. در این‌جا رابطه ، مجموعه‌ی نظیرش را به دو کلاس هم‌ارزی سه و دو عضوی افراز کرده است.
(در واقع ۱۳ یال باشد داشته باشم در وضعیت موجود ۵ بال داریم پس باید ۸ یال به آن اضافه کنیم)

$$|R| = ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۳ \Rightarrow ۱۳ - ۵ = ۸$$

نکته: اگر $A = \{A_۱ , A_۲ , \cdots , A_n\}$ افراز متناظر با رابطه‌ی هم‌ارزی R باشد، رابطه‌ی R به‌صورت $R = A_۱^۲ \cup A_۲^۲ \cup \cdots \cup A_n^۲$ و تعداد اعضای آن به‌صورت $|R| = |A_۱|^۲ + |A_۲|^۲ + \cdots + |A_n|^۲$ است.

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۲.گزینه ۲ با توجه به رابطه‌ی داده شده، ماتریس M به‌صورت $M = \begin{bmatrix} ○ & ○ & ۱ \\ ○ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ○ & ۱ \end{bmatrix}$ است. یعنی تنها ۴ عضو آن قابل تغییر است.

برای آن‌که M بازتابی نباشد،باید قطر اصلی به‌صورت $M = \begin{bmatrix} ۰ & & \\ & ۱ & \\ & & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حال برای تخریب خاصیت تقارنی یا باید درایه‌ی $m_{۳۲} = ۰$ باشد. در این‌صورت درایه‌های $m_{۲۱}$ و $m_{۱۲}$ کاملاً دلخواه هستند یعنی با هم $۲ \times ۲ = ۴$ حالت دارند یا اگر $m_{۳۲} = ۱$ است، باید $m_{۱۲} \neq m_{۲۱}$ باشد که این حالت نیز به ۲ صورت امکان‌پذیر است (یکی صفر و دیگری یک باشد) لذا جمعاً در ۶ حالت این رابطه نه بازتابی و نه تقارنی است.

-گزینه ۲-۱۳۹۳-سخت

۱۳.گزینه ۲ این رابطه وقتی وجود دارد که مؤلفه‌های دوم مساوی باشند. چون مؤلفه‌های دوم از مجموعه‌ی ۵ عضوی A هستند، پنج کلاس مختلف به‌وجود می‌آید.

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۱۴.گزینه ۲

$$[(a,b)] = \left\{(x,y) \in A^۲ | (x,y)R(a,b)\right\} \Rightarrow x + y = a + b$$

چون مؤلفه‌های اول و دوم، هر دو، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ هستند، مجموع آن‌ها حداقل $۱ + ۱ = ۲$ و حداکثر $۵ + ۵ = ۱۰$ می‌باشد و ۹ حالت مختلف دارد، پس ۹ کلاس هم‌ارزی داریم.

-گزینه ۲-۱۳۹۴-سخت

۱۵.گزینه ۳ اگر گراف متناظر رابطه بخواهد دارای خاصیت بازتابی باشد، باید همه‌ی رأس‌ها طوقه داشته باشند.
اگر گراف متناظر رابطه بخواهد دارای خاصیت تقارنی باشد، باید همه‌ی یال‌ها دو طرف باشند.
اگر گراف متناظر رابطه بخواهد دارای خاصیت تراگذری باشد، باید اگر از a به b و از b به c یال داشته باشیم . از a به c نیز یال داشته باشیم. گزینه‌ی ۳ بازتابی و متقارن است، اما متعدی نیست:

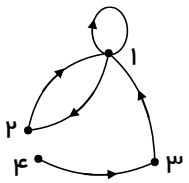
aRb , bRc ولی $\cancel{aRc}$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۱۶.گزینه ۳ نکته: اگر $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ ، ماتریس نظیر رابطه R باشد، آن‌گاه:

$$M(ROR) = M^{(۲)} = [m_{i۱} \odot m_{۱j} + m_{i۲} \odot m_{۲j} + \cdots + m_{in} \odot m_{nj}]_{n \times n}$$

باتوجه به گراف داده شده، اعضای R را می‌نویسیم:



$$R = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۳)\}$$

حال برای به دست آورده تعداد اعضای رابطه ROR از نکته بالا استفاده می کنیم:

$$M(ROR) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین تعداد اعضای رابطه ROR برابر با ۷ است.

-گزینه ۲-۱۳۹۵-آسان

۱۷.گزینه ۱ نکته: فرض کنید ماتریس‌های $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ از اندازه‌ی $m \times n$ باشند. در این صورت A کوچک‌تر یا مساوی با B است $(A \ll B)$، هرگاه به ازای هر $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq n$ داشته باشیم: $a_{ij} \leq b_{ij}$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} << M(R) \Rightarrow M(R) = \begin{bmatrix} ۱ & \square & \square & \square \\ & ۱ & ۱ & \square \\ & ① & \square & ① \\ & & ۱ & \square \end{bmatrix}$$

$$(۲,۳) \in R \xrightarrow{R\text{متقارن}} (۳,۲) \in R$$

$$(۴,۳) \in R \xrightarrow{R\text{متقارن}} (۳,۴) \in R$$

چون R متقارن است، پس کافی است تعداد حالت‌هایی را که درایه‌های بالا و روی قطر اصلی می‌توانند داشته باشند (درایه‌هایی که با نماد $\square$ نمایش داده شده است)، محاسبه کنیم که برابر است با: $۲^{۶}$.

-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۱۸.گزینه ۱ ماتریس این رابطه یک ماتریس ۴×۴ است. برای این‌که این رابطه دارای ۱۰ عضو باشد؛ باید همه‌ی درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باشند، همچنین باید از هر زوج درایه متقارن نسبت به قطر اصلی، دقیقاً یک درایه برابر ۱ باشد. بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی ۱ حالت دارند و هر زوج درایه‌ی متقارن نسبت به قطر اصلی ۲ حالت دارد. بنابراین تعداد روابط با خاصیت گفته شده برابر است با: $۱^{۴} \times ۲^{۶} = ۲^{۶}$

-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۱۹.گزینه ۲ نکته: فرض کنیم ماتریس‌های صفر و یک $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ از اندازه $m \times n$ باشند. گوییم A کوچک تر از یا مساوی با B است و می‌نویسیم $A \ll B$ ، هرگاه به ازای هر $۱ \le i \le m$ و $۱ \le j \le n$ داشته باشیم: $a_{ij} \le b_{ij}$

نکته: رابطه R بازتابی است، اگر و تنها اگر $I \ll M(R)$

نکته: رابطه R پاد تقارنی است، اگر و تنها اگر $M(R) \wedge M^T(R) \ll I$

باتوجه به نکات بالا، باید تعداد رابطه‌های بازتابی و پاد تقارنی با ۶ عضو روی مجموعه A را به دست بیاوریم.

$$M(R) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۴ \times ۴}$$

تعداد حالات انتخاب ۲عضو دیگر برابر است با:

(تعداد حالاتی که دو عضو (b,a) و (a,b) با هم انتخاب شده‌اند)- (تعداد حالات انتخاب ۲ مؤلفه از ۱۲ مؤلفه)

$$= \binom{۱۲}{۲} - \binom{۶}{۱} = ۶۶ - ۶ = ۶۰$$

بنابراین تعداد روابط مورد نظر برابر ۶۰ است.

-گزینه ۲-۱۳۹۵-سخت

۲۰.گزینه ۳ مجموعهٔ ۵ عضوی را به صورت $\{a,b,c,d,e\}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت برای افرازی که دقیقاً شامل یک مجموعهٔ ۲ عضوی باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:

الف) $\boxed{\star\star}\boxed{\star\star\star}$ تعداد $= \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳} = ۱۰$ یا ب) $\boxed{\star\star}\boxed{\star}\boxed{\star}\boxed{\star}$ تعداد $= \dfrac{\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{مجموعهٔ تک عضوی ۳ جایگشت}}}{۳!}} = ۱۰$

بنابراین تعداد افرازهای مورد نظر برابر است با: $۱۰ + ۱۰ = ۲۰$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۲۱.گزینه ۳ نکته: اگر رابطهٔ R بازتابی باشد، آن‌گاه ROR هم بازتابی است.

نکته: اگر رابطهٔ R متقارن باشد، آن‌گاه ROR هم متقارن است.

نکته: اگر رابطهٔ R ترایایی باشد، آن‌گاه ROR هم ترایایی است.

دقت کنید که اگر R پادمتقارن باشد، آن‌گاه لزومی ندارد که ROR هم پادمتقارن باشد. مثال نقض:

$$R = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۱,۱)\} \Rightarrow ROR = \{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۱),(۱,۲),(۳,۲)\}$$

R پادمتقارن است، ولی ROR پادمتقارن نیست (زیرا $(۱,۳),(۳,۱) \in ROR$)

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

-گزینه ۲-۱۳۹۶-آسان

۲۲.گزینه ۲ نکته: اگر R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، آن‌گاه:

الف) R بازتابی است، اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $(a,a) \in R$

ب) R تقارنی است. اگر از $(a,b) \in R$ نتیجه شود $(b,a) \in R$

پ) R پادتقارنی است، اگر از $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ نتیجه شود $a \simeq b$

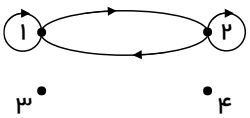
ت) R تعدی (تراگذری) است، اگر از $(a,b) \in R, (b,c) \in R$ نتیجه شود $(a,c) \in R$

$$M(ROR) = M(R) \odot M(R)$$

$$M(R) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow M(ROR) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ROR = \{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}$$

بنابراین ROR فقط خواص تقارنی و تعدی را دارد.



-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۲۳.گزینه ۲

نکته : $M(R_۱ \cup R_۲) = M(R_۱) + M(R_۲)$

چون $(۱,۲),(۲,۳) \in R_۱$، پس باید $(۲,۱),(۳,۲) \notin R_۲$ تا رابطه‌ی $R_۱ \cup R_۲$ پادتقارنی شود، بنابراین ماتریس رابطه‌ی $R_۲$ به شکل زیر است:

$$M(R_۲) = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۳ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۳ \\ \square & ۰ & ۲ & ۳ \\ \square & \square & \square & ۲ \end{bmatrix}$$

هریک از درایه‌های روی قطر اصلی ۲ حالت دارند. همچنین هر زوج از درایه‌های متقارن نسبت به قطر اصلی ۳ حالت دارند؛ به جز $a_{۱۲}$ و $a_{۲۳}$ که ۲ حالت دارند (۱ یا صفر)، زیرا $a_{۲۱} = ۰$ و $a_{۳۲} = ۰$ است، بنابراین تعداد رابطه‌های مورد نظر برابر است با: $۲^۶ \times ۳^۴$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۲۴.گزینه ۳ نکته: ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ مفروضاند. گوییم A کوچک‌تر از یا مساوی با B است و می‌نویسیم $A \ll B$، هرگاه به ازای هر $۱ \le i \le m$ و $۱ \le j \le n$ داشته باشیم: $a_{ij} \le b_{ij}$

ابتدا ماتریس متناظر با گراف را تشکیل می‌دهیم:

$$M=\begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\۱&۰&۰&۱\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

نکته: توان دوم ماتریس $M=[m_{ij}]_{n\times n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^{(۲)}=[m_{i۱}\odot m_{۱}+m_{i۲}\odot m_{۲j}+\cdots+m_{in}\odot m_{nj}]_{n\times n}$$

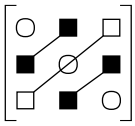
$$M^{(۲)}=M\odot M=\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۱\\۱&۰&۰&۰\\۰&۱&۰&۱\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\odot\pm\begin{bmatrix}۰&۱&۰&۰\\۱&۰&۰&۱\\۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}۱&۰&۰&۱\\۰&۱&۰&۰\\۱&۰&۰&۱\\۰&۰&۰&۰\end{bmatrix}\ll A\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱&\square&\square&۱\\\square&۱&\square&\square\\۱&\square&\square&۱\\\square&\square&\square&\square\end{bmatrix}$$

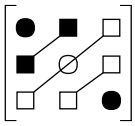
هر یک از ۱۱ درایه‌ی مشخص شده دو حالت دارند (۱ یا ۰) بنابراین تعداد ماتریس‌هایی مانند A که در شرط $M^{(۲)}\ll A$ صدق می‌کنند، برابر است با: $۲^{۱۱}$

-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۲۵.گزینه ۳ ماتریس این رابطه یک ماتریس ۳×۳ است. چون رابطه باید متقارن و ۴ عضوی باشد، دو حالت امکان‌پذیر است:



الف) دو درایه از بالای قطر اصلی و دو درایهٔ نظیر آن‌ها از پایین قطر اصلی ۱ و بقیهٔ درایه‌ها صفر باشند. تعداد رابطه‌ها در این حالت برابر است با: $\binom{۳}{۲}=۳$



ب) یک درایه از بالای قطر اصلی، یک درایهٔ نظیر آن از پایین قطر اصلی و دو درایه از قطر اصلی برابر ۱ و بقیهٔ درایه‌ها صفر باشد. تعداد رابطه‌ها در این حالت برابر است با: $\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲}=۹$

بنابراین تعداد کل روابط مورد نظر برابر است با: $۳+۹=۱۲$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-متوسط

۲۶.گزینه ۴ نکته: تعداد روابط هم‌ارزی روی یک مجموعه براساس تعداد اعضای مجموعه به صورت زیر است:

تعداد اعضای مجموعه	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد روابط هم‌ارزی	۱	۲	۵	۱۵	۵۲

تعداد روابط هم‌ارزی شامل (f,b) و (b,e) و فاقد (a,c) برابر است با:

(تعداد روابط هم‌ارزی شامل $(a,c),(b,e),(f,b)$) - (تعداد روابط هم‌ارزی شامل $(b,e),(f,b)$)

$=$ (تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی ۴ عضوی $\{a,c,d,\boxed{b,e,f}\}$)

$-$ (تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعه‌ی ۳ عضوی $\{\boxed{a,c},d,\boxed{b,e,f}\}$)

$\overset{\text{نکته}}{=\!=\!=}۱۵-۵=۱۰$

-گزینه ۲-۱۳۹۶-سخت

۲۷.گزینه ۲ نکته: اگر رابطه‌ی هم‌ارزی R مجموعه‌ی A را به کلاس‌های هم‌ارزی $A_۱,A_۲,\cdots,A_n$ افراز کند، آن‌گاه:

$$|R|=|A_۱|^۲+|A_۲|^۲+\cdots+|A_n|^۲ \text{ و } R=(A_۱\times A_۱)\cup(A_۲\times A_۲)\cup\cdots\cup(A_n\times A_n)$$

چون ماتریس مجاورت رابطه‌ی R دارای ۸ عضو است، پس $|R|=۲^۲+۲^۲=۸$؛ بنابراین باتوجه به نکته‌ی بالا، افراز متناظر با این رابطه به صورت زیر است:

$$\underbrace{\boxed{**}}_{A_۱}\underbrace{\boxed{**}}_{A_۲}\to\{\underbrace{\{*,*\}}_{A_۱},\underbrace{\{*,*\}}_{A_۲}\}$$

در نتیجه کافی است تعداد راه‌های ممکن برای افراز یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به دو مجموعه‌ی ۲ عضوی را بیابیم که برابر است با:

$$\frac{۱}{۲!}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}=۳$$

دقت کنید !۲ جایگشت مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ است که تأثیری در افراد ندارد؛ زیرا $\{A_۱ , A_۲\}$ و $\{A_۲ , A_۱\}$ یک افراز محسوب می‌شوند. بنابراین کل حالات را بر !۲ تقسیم می‌کنیم.

-گزینه ۲-۱۳۹۵-متوسط

۲۸.گزینه ۲

چون $\{۲ , ۱\}$ با $\{۱ , ۲\}$ فرقي ندارد، A مجموعه‌اي ۳ عضوي است. $A=\{۱ , ۲ , \{۱ , ۲\}\}$

همچنین $B=\{۰ , ۱ , -۱\}$، پس عدد ۱ در A و B مشترک است و $A-B$ دو عضو دارد، در نتیجه:

$$|A\times(A-B)|=|A||A-B|=۳\times۲=۶$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۲۹.گزینه ۱

$$A\times B=C\times D\xrightarrow{A , B , C , D\neq\varnothing}A=C , B=D$$

$$(A-B)\times B=A\times(B-A)\Rightarrow\begin{cases}A-B=A\\B=B-A\end{cases}\Rightarrow A\cap B=\phi$$

می‌دانیم: $A'\Delta B'=A\Delta B$ پس: $A'\Delta B'=A\cup B$

$$A'\Delta B'=A\Delta B=(A\cup B)-(\underbrace{\cancel{A\cap B}}_{\varnothing})=A\cup B$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۳۰.گزینه ۲

$$|A|=۶ , |A\cap B|=۲\Rightarrow|A-B|=|A|-|A\cap B|=۴$$
$$|(A-B)\times B|=|A-B||B|=۲۰\Rightarrow۴\times|B|=۲۰\Rightarrow|B|=۵$$

پس:

$$|B-A|=|B|-|B\cap A|=۵-۲=۳\Rightarrow|(B-A)\times A|=|B-A||A|=۳\times۶=۱۸$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط

۳۱.گزینه ۱

$$A=\{۲k-۱|k=-۱,۱,۰\}\qquad B=\{x\in\mathbb{R}|x=-۱,۰,۱\}$$
$$\begin{cases}A=\{۲(۱)-۱ , ۲(۰)-۱ , ۲(-۱)-۱\}=\{۱ , -۱ , -۳\}\\B=\{-۱ , ۰ , ۱\}\end{cases}$$
$$\Rightarrow|(A-B)\times(B-A)|=|A-B|\times|B-A|=\{-۳\}\times\{۰\}=\{(-۳ , ۰)\}$$

یك عضو دارد.

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۳۲.گزینه ۳

راه‌حل اول) نکته: در ماتریس مجاورت نظیر یك گراف جهت‌دار،اگر از رأس i ام به رأس j ام یال وجود داشته باشد، درایه‌ي سطر i ام و ستون j ام در ماتریس مجاورت برابر یک و در غیر این صورت صفر است

ماتریس مجاورت گراف داده شده را تشکیل مي‌دهیم:

$$\begin{array}{c c}&\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \begin{array}{c}a\\b\\c\\d\end{array}&\begin{bmatrix}۱&۰&۱&۰\\۰&۰&۰&۱\\۱&۰&۱&۰\\۰&۱&۰&۰\end{bmatrix}\end{array}$$

بنابراین تعداد صفرهای ماتریس مجاورت برابر ۱۰ است.

راه‌حل دوم) هریک از یال‌های جهت‌دار، نظیر یک درایه‌ی ۱ در ماتریس هستند، حال با توجه به این‌که ماتریس مجاورت این رابطه $۴^۲$ درایه دارد، نتیجه می‌گیریم:

$$\text{تعداد صفرها}=\text{تعداد کل درایه‌ها}-\text{تعداد یک‌ها}=۱۶-۶=۱۰$$

-گزینه ۲-۱۳۹۴-آسان

۳۳.گزینه ۴ نکته: رابطه‌ی R که روی مجموعه‌ی A تعریف شده است را در نظر می‌گیریم:

R بازتابی است، هر گاه به ازای هر $a\in A$ ، داشته باشیم: $(a , a)\in R$

R متقارن است، هرگاه اگر $(a , b)\in R$ ، داشته باشیم: $(b , a)\in R$

R پاد متقارن است، هر گاه اگر $(a , b) , (b , a)\in R$ ، داشته باشیم: $a=b$

R ترایایی (تراگذری، متعدی) است، هر گاه اگر $(a , b) , (b , c)\in R$ ، داشته باشیم: $(a , c)\in R$

گزینه‌ی **۱** و **۲**: $(a\,,\,b)\,,\,(b\,,\,c)\in R$ ولی $(a\,,\,c)\notin R$ بنابراین ترایایی نیست. گزینه‌ی **۳**: ترایایی و پاد متقارن است. گزینه‌ی **۴**: فقط ترایایی است.

-گزینه ۲-۱۳۹۴-متوسط

۳۴.گزینه ۳ اگر اعضای این رابطه را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$R=\{(۱\,,\,۱)\,,\,(۱\,,\,۲)\,,\,(۱\,,\,۳)\,,\,(۲\,,\,۱)\,,\,(۲\,,\,۲)\,,\,(۲\,,\,۳)\,,\,(۳\,,\,۱)\,,\,(۳\,,\,۲)\}$$

چون زوج $(۳\,,\,۳)$ وجود ندارد. دو خاصیت بازتابی و تعدی تخریب شده است. علت تخریب خاصیت تعدی این است که:

$$۳R۱\,,\,۱R۳\Rightarrow \cancel{۳R۳}$$

-گزینه ۲-۱۳۹۳-متوسط