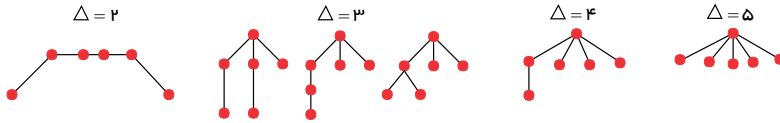




دبیرستان علامه حلی تهران

۴۱. گزینه ۳ بر حسب بیشترین درجه ی رأس دسته بندی می کنیم.



البته می توانستیم بر حسب طول شاخه ی اصلی درخت نیز دسته بندی انجام دهیم.

۴۲. گزینه ۱ گراف موجود یک درخت است. و در هر درخت  $p = q + 1$  است.

$$v + \delta + k = \frac{v \times 1 + \delta \times 2 + k \times 3}{2} + 1 \Rightarrow 2k + 22 = 17 + 3k$$

پس  $k = 5$

روش دوم: هر رأس درجه  $k$ ,  $k-2$  رأس درجه ۱ تولید می کند. (دو رأس ابتدا و انتها که همواره یک می باشند نیز به آنها اضافه می شوند)

$$G: \underbrace{3, \dots, 3}_k, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1$$

$$\text{تعداد یک ها} = v = k \times 1 + 2 \Rightarrow k = 5$$

۴۳. گزینه ۱ چون درخت  $q = p - 1$  و در گراف منتظم  $pr = 2q \Rightarrow q = \frac{pr}{2}$  است، لذا:

$$q - 4 = p - 1 \Rightarrow \frac{rp}{2} - 4 = p - 1 \Rightarrow \frac{rp}{2} - p = 3 \Rightarrow rp - 2p = 6 \Rightarrow p(r - 2) = 6$$

$p$	$r - 2$	
۶	۱	
$\Rightarrow 3$	۲	$\Rightarrow r = 3$
۲	۳	$\Rightarrow r = 4$
۱	۶	

$r = 4$  قابل قبول نیست، زیرا وقتی ۳ رأس داریم نمی توان رأسی از درجه ی ۴ داشت. به همین دلیل  $p = 2$  و  $p = 1$  هم قابل قبول نیست.

۴۴. گزینه ۳ در هر درخت از مرتبه ۲ و بیشتر، بین هر دو رأس دلخواه دقیقاً یک مسیر وجود دارد پس تعداد کل مسیرهای با طول غیر صفر

می باشد. از طرفی  $p$  رأس داریم پس  $p$  مسیر بطول صفر نیز داریم یعنی:

$$\binom{p}{2} + \underbrace{P}_{\text{مسیرهای به طول صفر}} = 36 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} + p = 36$$

تعداد مسیرهای بطول مثبت

$$\Rightarrow p^2 - p + 2p = 72 \Rightarrow p^2 + p - 72 = 0 \Rightarrow \underbrace{p(p-1)}_{\text{دو عدد متوالی}} = 72 = 9 \times 8 \Rightarrow p = 9 \Rightarrow q = p - 1 = 8$$

۴۵. گزینه ۴

$$1, \dots, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{\text{رأس } 2x+1}, \underbrace{3, \dots, 3}_{\text{رأس } x}, \underbrace{3, \dots, 3}_{\text{رأس } x-1}, \underbrace{4, \dots, 4}_{\text{رأس } 7}, \dots, 4$$

$$p = x - 1 + x + 2x + 1 + 7 = 4x + 7 \Rightarrow q = p - 1 = 4x + 6$$

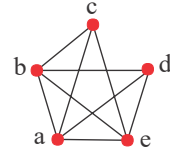
$$\sum \text{deg}(v_i) = 2q \Rightarrow 3(x-1) + 2x + (2x+1) \times 1 + 7 \times 4 = 2(4x+6)$$

$$3x - 3 + 2x + 2x + 1 + 28 = 8x + 12 \Rightarrow x = 14$$

۴۶. گزینه ۲ گراف ماتریس موردنظر را رسم می کنیم. گراف به صورت زیر است یعنی از گراف کامل یک یال حذف شده است.

اگر یک یال از گراف کامل  $K_p$  حذف کنیم، از تعداد دورهای با طول ۳،  $(p-2)$  تا کم می‌شود. علت آن است که دورهایی که شامل یال حذف شده می‌باشند را از دست داده‌ایم. این یال با تمام  $(p-2)$  رأس دیگری که روی این یال نیستند، دور به طول ۳ تشکیل می‌دهد. لذا  $(p-2)$  دور به طول ۳ را از دست داده است، پس:

$$\text{تعداد دور با طول ۳} = \binom{5}{3} \times \frac{(3-1)!}{2} - (5-2) = 7$$



نکته: تعداد دورهای  $m$  به طول  $k$  برابر است با:

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

۴۷. گزینه ۴ از گراف داده شده دو یال حذف کنیم درخت خواهد بود در نتیجه تعداد یال‌های این گراف ۲ تا بیشتر از درخت مرتبه ۷ است و در این گراف  $q = 8$  می‌باشد.

$$\text{تعداد صفرها} = p^2 - 2q = 49 - 16 = 33$$

۴۸. گزینه ۳

مجموع دریاچه‌های روی قطر اصلی  $A^2$  برابر است با مجموع درجات رئوس گراف.

$$A^2 \text{ جمع عناصر قطر اصلی} = \sum deg(v_i) = 2q = 2(p-1) = 12$$

۴۹. گزینه ۳

$$M_{kp}^2 = \begin{bmatrix} p-1 & p-2 & p-2 & & \\ p-2 & p-1 & p-2 & \dots & \\ p-2 & p-2 & p-1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \dots \end{bmatrix}$$

تذکره: در مربع ماتریس مجاورت یک گراف کامل همه عناصر قطر اصلی برابر درجات رئوس یعنی  $p-1$  می‌باشد و عناصر خارج قطر اصلی برابر  $p-2$  می‌باشد.

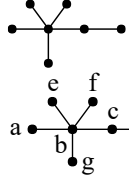
$$A^2 \text{ مجموع عناصر یک قطر یا یک ستون ماتریس} = (p-1) + (p-1)(p-2) = (p-1)^2$$

$$1 \times (p-1) + 5 \times (p-2) = 1 \times 5 + 5 \times 4 = 5 + 20 = 25$$

۵۰. گزینه ۳ میدانیم در گراف درخت بین دو رأس دلخواه دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

درخت داریم:  $q = p - 1$

$$2q + p = 19 \Rightarrow 2(p-1) + p = 19 \Rightarrow 3p = 21 \Rightarrow p = 7$$



و با توجه به این که  $\Delta = 5$ ، شکل به صورت مقابل رسم می‌شود:

اگر رئوس را نام‌گذاری کنیم تعداد مسیرها به طول ۳ به شکل زیر است:  
 $abcd, ebcd, fbcd, gbcd$

۵۱. گزینه ۲ نکته: در یک گراف  $r$ -منتظم مرتبه‌ی  $p$  همواره داریم  $2q = pr$ .

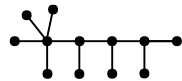
نکته: تعداد یک‌های ماتریس مجاورت گراف مرتبه‌ی  $p$  و اندازه‌ی  $q$  برابر  $2q$  می‌باشد.

نکته: تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف مرتبه‌ی  $p$  و اندازه‌ی  $q$  از دستور  $p^2 - 2q$  حاصل می‌شود.

چون گراف  $r$ -منتظم است داریم:  $rp = 2q$ . از طرفی تعداد صفرهای ماتریس مجاورت یک گراف برابر با  $p^2 - 2q$  است. بنابراین

$p^2 - rp = 5$  و لذا  $p(p-r) = 5$  که نتیجه می‌دهد  $p = 5$  و  $r = 4$ ، پس  $2q = 20$ . بنابراین تعداد یک‌های ماتریس مجاورت برابر ۲۰ است.

۵۲. گزینه ۱ ابتدا گراف را رسم می‌کنیم سپس از روی شکل آن مسیرهای بطول ۲ را شمارش می‌کنیم. برای بدست آوردن مسیرهای بطول ۲ کافی است ۲ یال از یال‌های ورودی به هر رأس را انتخاب کنیم:



$$\text{تعداد مسیرهای بطول ۲} = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 19$$

توجه کنید در سایر درخت‌های یکرخت با درخت فوق نیز تعداد مسیرهای بطول ۲ همین مقدار می‌باشد.

۵۳. گزینه ۱ نکته: گراف همبند و بدون دور، درخت است.

نکته: مجموع درجات رئوس هر گراف ساده، ۲ برابر تعداد یال‌های آن است.

نکته: در درختی با  $p$  رأس و  $q$  یال داریم:  $q = p - 1$

راه حل اول:

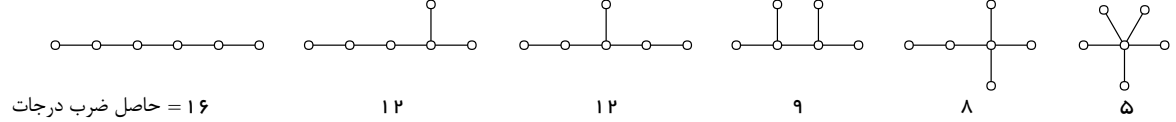
تعداد رئوس درجه ی ۱ را با  $x$  نمایش می دهیم:

$$5 + 4 + 3 + 2 + x \times 1 = 2 \times q \xrightarrow{q=p-1} 14 + x = 2p - 2 \xrightarrow{p=4+x} 14 + x = 8 + 2x - 2 \Rightarrow x = 8$$

راه حل دوم: نکته: برای محاسبه ی تعدادهای یک درخت از تمامی رئوس با درجه ی بزرگتر از ۲، دو واحد کم می کنیم، سپس اعداد حاصل را جمع می کنیم، نهایتاً به این مجموع، دو واحد اضافه می کنیم:

$$5 - 2, 4 - 2, 2 - 2 \xrightarrow{\text{جمع}} 6 \xrightarrow{+2} 8$$

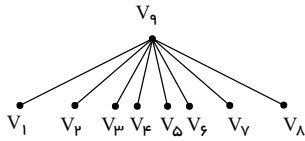
۵۴. گزینه ۲ کلیده ی درخت های مرتبه ی ۶ را رسم می کنیم و حاصل ضرب درجات رئوس آن را بدست می آوریم.



بنابراین حاصل ضرب درجات رئوس یک درخت از مرتبه ی ۶ نمی تواند ۶ باشد.

۵۵. گزینه ۳

چون با اضافه شدن هر یال فقط دوری به طول ۳ ایجاد می شود، پس گراف به شکل روبه رو است:



از بین رئوس  $v_1$  تا  $v_8$ ، هر دو رأسی که انتخاب کنیم، مسیری به طول ۲ ایجاد می شود.

$$\binom{8}{2} = 28 \quad \text{بنابراین تعداد مسیرهای به طول ۲ در این درخت برابر است با:}$$