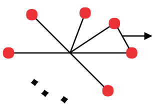
۴۶. گزینه ۴



اگر یک درخت مرتبه $p=۲۰$، رسم کنیم با یک رأس $\Delta=۱۹$ گرافی خواهیم داشت که ۱۹ رأس درجه ۱ دارد آن‌گاه
با افزودن یک یال به آن $q=۲۰$ است و یک دور به طول ۳ پدید می‌آید در این صورت حداکثر تعداد رأس درجه یک گراف ۱۷ است .

۴۷. گزینه ۱ گراف موجود یک درخت است. و در هر درخت $p=q+۱$ است.

$$۷+۵+k=\frac{۷\times ۱+۵\times ۲+k\times ۳}{۲}+۱\Rightarrow ۲k+۲۲=۱۷+۳k$$

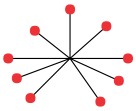
پس $k=۵$.

روش دوم: هر رأس درجه k، $k-۲$ رأس درجه ۱ تولید می کند. (دو رأس ابتدا و انتها که همواره یک می‌باشند نیز به آنها اضافه می‌شوند)

$$G:\underbrace{۳,\cdots,۳}_{k\text{ تا}},۲,۲,۲,۲,۲,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱$$

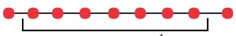
$\text{تعداد یک‌ها}=۷=k\times ۱+۲\Rightarrow k=۵$

۴۸. گزینه ۴ در گراف درخت مرتبه p اگر $\Delta=p-۱$ درختی خواهیم داشت که در آن ۱ رأس مرکزی درجه $p-۱$ و باقی رئوس با درجه ۱ همگی به رأس وسطی متصل می‌باشند در اینگونه درخت‌ها max طول مسیر برابر ۲ می‌باشد.



۴۹. گزینه ۲ می دانیم که تعداد یال ها در گراف از مرتبه ی p برابر با $p-۱$ است و p و $p-۱$ دو عدد متوالیند.
تنها اعداد اول متوالی ۲ و ۳ هستند پس درخت مطلوب درخت مرتبه ۳ می‌باشد که فقط یک نوع وجود دارد.

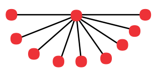
۵۰. گزینه ۱ هرگاه در یک درخت به دنبال ماکسیمم تعداد رئوس از درجه Δ بودید، Δ را ۲ در نظر بگیرید این درخت ها به شکل خطی می باشند بنابراین خواهیم داشت:



۵۱. گزینه ۳

$$p_۱+p_۲+\cdots+p_{۱۱}=۵۳$$
$$q_۱+۱+q_۲+۱+\cdots+q_{۱۱}+۱=۵۳\Rightarrow q_۱+q_۲+\cdots+q_{۱۱}+۱۱=۵۳$$
$$\Rightarrow q_۱+q_۲+\cdots+q_{۱۱}=۴۲$$

۵۲. گزینه ۴ می دانیم اگر G' مکمل گراف G باشد رابطه $qG+qG'=\frac{p(p-۱)}{۲}$ بر قرار است.
برای آنکه حداکثر تعداد مسیر به طول ۲ را بدست آوریم باید تمام رئوس به یک رأس متصل باشند.



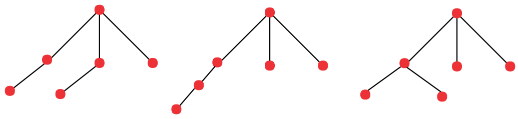
$$qG'+qG=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

$$۳۶+(p-۱)=\binom{p}{۲}\Rightarrow ۳۶+p-۱=\frac{p(p-۱)}{۲}\Rightarrow (p-۱)(p-۲)=۷۲\Rightarrow p=۱۰$$

در این گونه گراف ها بین هر دو رأس درجه یک، ۱ مسیر بطول ۲ وجود دارد پس تعداد مسیرهای بطول ۲ موجود در آن $\binom{p-۱}{۲}$ می باشد.

$$\text{حداکثر تعداد مسیر به طول ۲} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

۵۳. گزینه ۲ در گراف رأس درجه ی ۳ وجود دارد و باید دو یال دیگر را به آن اضافه کنیم.



۵۴. گزینه ۲

اولاً:

$$qG + qG' = \binom{p}{۲} \Rightarrow qG' = \binom{p}{۲} - qG$$

ثانیاً: این گراف ۳− منتظم مرتبه ۱۰ می باشد بنابراین $۱۵ = \frac{۱۰ \times ۳}{۲} = qG$ می باشد.

$$M(\bar{G}) \text{ تعداد صفرهای ماتریس} = p^۲ - ۲q_{\bar{G}} = ۱۰۰ - ۲\left(\binom{۱۰}{۲} - ۱۵\right) = ۴۰$$

۵۵. گزینه ۴

$$\left.\begin{matrix} p^۲ - ۲q = ۳۷ \\ q = p - ۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow p^۲ - ۲(p-۱) = ۳۷ \Rightarrow p^۲ - ۲p - ۳۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p = ۷ & \text{ق ق} \\ p = -۵ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

درخت مرتبه ۷ دارای $۶ = ۱ - ۷$ یال است. برای اینکه ۴− منتظم شود باید دارای $۱۴ = \frac{۷ \times ۴}{۲}$ یال شود پس باید $۸ = ۶ - ۱۴$ یال به آن اضافه کنیم.

۵۶. گزینه ۳

$$\binom{p}{۲} - ۸ = \frac{۵p}{۲} \Rightarrow \frac{p(p-۱)}{۲} - ۸ = \frac{۵p}{۲} \Rightarrow p^۲ - p - ۱۶ = ۵p$$

$$\Rightarrow p^۲ - ۶p - ۱۶ = ۰ \Rightarrow (p-۸)(p+۲) = ۰ \Rightarrow p = ۸$$

مجموع درایه های ماتریس مجاورت $K_۸$ برابر است با:

$$۲q = ۲\binom{۸}{۲} = ۲ \times ۲۸ = ۵۶$$

۵۷. گزینه ۲ می دانیم درایه های روی قطر اصلی ماتریس $A^۲$ ، بیان گر درجه ی رئوس گراف A است. بنابراین با توجه به این که مرتبه ی گراف ۵ است، داریم: $d_۱d_۲d_۳d_۴d_۵ = ۷۲$ ، $۰ \leq d_۱, d_۲, d_۳, d_۴, d_۵ \leq ۴$

$d_۱, d_۲, \cdots d_۵$ باید بتوانند رئوس گراف باشند. تنها ۵عددی که بتوانند درجات رئوس گراف بوده و حاصل ضربی برابر ۷۲ داشته باشد، ۲, ۲, ۲, ۳, ۳ هستند (توجه کنید که همه ی این اعداد طبیعی باید کوچک تر از ۵ باشند.)

مجموع درجات رئوس این گراف $۱۲ = ۲ + ۲ + ۲ + ۳ + ۳$ است بنابراین $۶ = \frac{۱۲}{۲} = q$. از طرفی درخت مرتبه ی ۵،دارای ۴یال است زیرا در درخت $q = p - ۱$ ، در نتیجه با حذف ۲یال از ۶یال گراف اولیه درخت مرتبه ی ۵حاصل می شود.

۵۸. گزینه ۳ چون ماتریس مجاورت مربوط به درخت است پس گزینه ی مورد نظر باید دارای رأس درجه ۱ باشد (گزینه ۱ رد می شود) همچنین اگر در یک درخت $\Delta = k$ باشد، آن درخت حداقل k رأس درجه ۱ دارد (گزینه ۲ رد می شود). در گزینه (۴) نیز تعداد رئوس فرد، عددی فرد است.

۵۹. گزینه ۱

می‌دانیم که مجموع درایه های ماتریس $M^۲$ برابر است با مجموع مربعات درجه‌ی رئوس گراف

$$? = ۳^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۲^۲ = ۲۶$$

۶۰. گزینه ۳ تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف برابر است با $p^۲ - ۲q$، پس باید p حداقل باشد، گرافی که ۳۳ یال دارد باید حداقل ۹ رأس داشته باشد. پس تعداد صفرهای گراف برابر است با:

$$۹^۲ - ۲(۳۳) = ۸۱ - ۶۶ = ۱۵$$