




۴۶. گزینه ۴

درجات رئوس :  $1, \dots, 1, \dots, 2, \dots, 2, \dots, 3, \dots, 3, \dots, 4, \dots, 4, \dots, 7$   
 رأس  $2x+1$  رأس  $x$  رأس  $x-1$  رأس  $7$

$$p = x - 1 + x + 2x + 1 + 7 = 4x + 7 \Rightarrow q = p - 1 = 4x + 6$$

$$\sum deg(v_i) = 2q \Rightarrow 3(x-1) + 2x + (2x+1) \times 1 + 7 \times 4 = 2(4x+6)$$

$$3x - 3 + 2x + 2x + 1 + 28 = 8x + 12 \Rightarrow x = 14$$

۴۷. گزینه ۱ این درخت جزو درخت های خطی می باشد به صورت  است که بزرگ ترین مسیر آن دارای طول ۸ می باشد. (فاصله دو رأس  $a, b$  برابر ۸ می باشد)

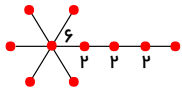
۴۸. گزینه ۲ درخت گرافیکی است همبند و فاقد دور که اگر هر یالی از آن حذف کنیم گراف حاصل ناهمبند می گردد پس با توضیحاتی که در صورت سؤال آمده است گراف ما درخت می باشد و در درخت داریم:  $q = p - 1$

$$\begin{cases} \sum deg v_i = 2q \\ q = p - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + x + y = 2q \\ q = 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow (x+y)^2 = 4$$

۴۹. گزینه ۳ درختی با ۵ رأس از درجه ۱ یک، نمی تواند رأسی با درجه بزرگ تر از ۵ داشته باشد، پس دنباله های ممکن برای درجه های رأس های چنین درختی عبارتند از:

- ۱) ۵, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱
- ۲) ۴, ۳, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱
- ۳) ۳, ۳, ۳, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱

۵۰. گزینه ۳



$$48 = 8 \times 6 = 6 \times 2 \times 2 \times 2$$

۶, ۲, ۲, ۲, ۱, ۱, ۱, ۱ درجه ها

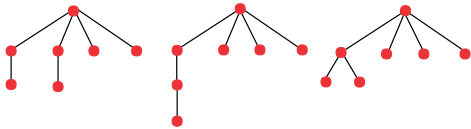
هرچه درجات رئوس کمتر باشد تعداد یال ها نیز کمتر است.

بنابراین درجه رئوس عبارتند از:

باتوجه به شکل، ۶ رأس درجه ۱ داریم. پس تعداد یال ها برابر است با:  $q = 9$

۵۱. گزینه ۱

ابتدا رأس با درجه ۴ را رسم می کنیم سپس دو یال باقی مانده را به رئوس درجه ۱ وصل می کنیم.



۵۲. گزینه ۴

$$\left. \begin{matrix} p^2 - 2q = 37 \\ q = p - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p^2 - 2(p-1) = 37 \Rightarrow p^2 - 2p - 35 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \text{ ق ق} \\ p = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

درخت مرتبه ۷ دارای ۶ یال است. برای اینکه ۴- منتظم شود باید دارای ۱۴ یال  $\frac{7 \times 4}{2} = 14$  باشد پس باید ۸-۶ یال به آن اضافه کنیم.

۵۳. گزینه ۳ برای اینکه تعداد دور، حداکثر باشد سعی می کنیم گراف را به گراف کامل نزدیک بگیریم.  $2q = 40 \Rightarrow q = 20$  پس حداقل

تعداد رأس  $p = 7$  است. (حداکثر تعداد یالهای گراف مرتبه ۶ برابر ۱۵  $\binom{6}{2} = 15$  می باشد).

تعداد دور به طول ۳ در گراف کامل  $k=7$ ،  $\frac{(7-1)!}{2} \times \binom{7}{3} = 35$  است چون یک یال حذف شده پس  $(p-2) = 5$  دور به طول ۳ حذف می شود بنابراین ۳۰ دور به طول ۳ حداکثر دارد.

تذکر: تعداد دوره‌های بطول ۳ شامل یال مشخصی مثلاً  $ab$  را می‌خواهیم تعیین کنیم، دور بطول ۳ دارای ۳ رأس است که دوتای آنها  $a, b$  می‌باشد می‌ماند ۱ رأس دیگر که آن را به  $\binom{5}{1} = 5$  طریق می‌توان انتخاب نمود بنابراین تعداد دوره‌های بطول ۳ شامل یک یال مشخص، ۵ تا می‌باشد.

۵۴. گزینه ۳ چون ماتریس مجاورت مربوط به درخت است پس گزینه ی مورد نظر باید دارای رأس درجه ۱ باشد (گزینه ۱ رد می‌شود) همچنین اگر در یک درخت  $\Delta = k$  باشد، آن درخت حداقل  $k$  رأس درجه ۱ دارد (گزینه ۲ رد می‌شود). در گزینه (۴) نیز تعداد رئوس فرد، عددی فرد است.

۵۵. گزینه ۳ می‌دانیم درایه ی غیر واقع بر قطر اصلی ماتریس  $M^2$  نشان دهنده ی تعداد مسیرهای به طول ۲ بین آن دو رأس است. بین رئوس  $a, c$  فقط یک مسیر بطول ۲ داریم  $(a d c)$  بنابراین مقدار درایه ی نظیر سطر  $a$  و ستون  $c$  برابر ۱ می‌باشد.

۵۶. نکته: گراف همبند و بدون دور، درخت است.

نکته: مجموع درجات رئوس هر گراف ساده، ۲ برابر تعداد یال‌های آن است.

نکته: در درختی با  $p$  رأس و  $q$  یال داریم:  $q = p - 1$

راه حل اول:

تعداد رئوس درجه ی ۱ را با  $x$  نمایش می‌دهیم:

$$5 + 4 + 3 + 2 + x \times 1 = 2 \times q \xrightarrow{q=p-1} 14 + x = 2p - 2 \xrightarrow{p=4+x} 14 + x = 8 + 2x - 2 \Rightarrow x = 8$$

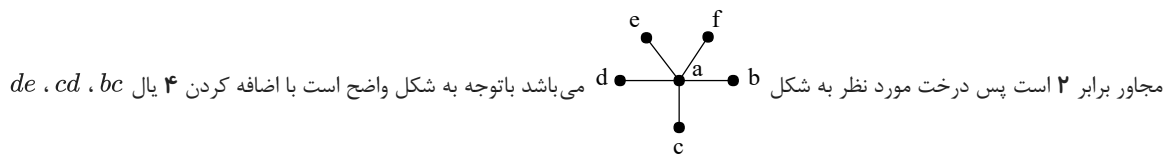
راه حل دوم: نکته: برای محاسبه ی تعدادهای یک درخت از تمامی رئوس با درجه ی بزرگتر از ۲، دو واحد کم می‌کنیم، سپس اعداد حاصل را جمع می‌کنیم، نهایتاً به این مجموع، دو واحد اضافه می‌کنیم:

$$5 - 2, 4 - 2, 2 - 2 \xrightarrow{\text{جمع}} 6 \xrightarrow{+2} 8$$

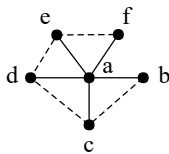
۵۷. گزینه ۳ نکته: گراف هم‌بند و بدون دور را درخت نامند.

نکته: به طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس، فاصله بین دو رأس می‌گویند.

چون گراف مورد نظر هم‌بند و فاقد دور است، پس درخت است بنابراین یکی از درخت‌های مرتبه ۶ مدنظر است باتوجه به اینکه فاصله هر دو رأس



$ef$ ، دوری بطول ۶ ایجاد می‌شود.



دقت کنید که با تعداد یال کمتر از ۴، دور بطول ۶ ایجاد نمی‌شود بنابراین گزینه ی ۳ پاسخ درست است.

۵۸. گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} 2q = pr &\Rightarrow 4p = 2q \\ p^2 - 2q = 60 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p^2 - 4p - 60 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 10 \text{ ق ق} \\ p = -6 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۵۹. گزینه ۴ عناصر قطر اصلی  $A^2$  درجه ی رئوس گراف‌اند. چون ضرب عناصر قطر اصلی  $A^2$ ، ۱۳۵ شده است. پس ضرب درجه ی رئوس این گراف باید گراف ۱۳۵ باشد پس:

$$135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1 \times 1$$



$$\binom{p}{2} = 45, \quad \underbrace{p(p-1)}_{\text{ضرب دو عدد متوالی}} = 90 \Rightarrow p = 10$$

$$q = p - 1 = 9$$

$$? = 45 - 9 = 36$$

کم ترین تعداد یال های یک گراف همبند هنگامی است که درخت باشد. یعنی  $q = p - 1$  پس:

پس: