۳۶. گزینه ۱

تذکر: قضیه تقسیم:
$$\begin{cases} a = bq + r \\ ۰ \le r \le b - ۱ \end{cases}$$

a: مقسوم ، b: مقسوم علیه، q: خارج قسمت، r: باقی مانده

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a + k = b(q + ۷) + r \end{cases} \Longrightarrow \quad bq + r + k = bq + ۷b + r \quad \Rightarrow \quad k = ۷\,b$$

k باید مضرب ۷ باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه ۱ این ویژگی را دارد.

۳۷. گزینه ۳

$$\left\{\begin{matrix} a = (a-b)q + r \\ b = (a-b)q' + r' \end{matrix}\right\} : \text{دو رابطه را از هم کم می کنیم} \Rightarrow a - b = (a-b)(q - q') + r - r'$$

چون $a-b$ بر $a-b$ بخش پذیر است پس $r - r'$ باید صفر باشد.

$$\begin{cases} q - q' = ۱ \\ r - r' = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q - q' = ۱ \\ r = r' \end{cases}$$

۳۸. گزینه ۲

کوچکترین عضو نامنفی مجموعه ی $\{a - bx \mid x \in Z\}$ همان باقی مانده تقسیم عدد a بر b می باشد که در آن $x = \left[\frac{a}{b}\right]$ خارج قسمت می باشد.

$$a = -۳۵۳۱ \quad , b = ۷۲ \Rightarrow x = \left[\frac{a}{b}\right] = \left[-\frac{۳۵۳۱}{۷۲}\right] = -۵۰$$

اگر بخواهیم $-۳۵۳۱ - ۷۲x$ می‌نیمم شود باید x ماکزیمم شود.

$$Amin = -۳۵۳۱ - ۷۲ \times (-۵۰) = ۶۹$$

۳۹. گزینه ۲

$$q = r^{۲}$$
$$۱۶۵ = br^{۲} + r \ , \quad ۰ \le r < b$$
$$\begin{cases} r\,(br + ۱) = ۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱ \\ r < b \end{cases}$$

واضح است r مقسوم علیه طبیعی ۱۶۵ می باشد چون $۱۶۵ = ۵ \times ۳ \times ۱۱$ پس:

$$\begin{array}{llllll} r = ۱ & \Rightarrow & b \times ۱ + ۱ = ۱۶۵ & \Rightarrow & b = ۱۶۴ & \\ r = ۳ & \Rightarrow & b \times ۳ + ۱ = ۵۵ & \Rightarrow & b = ۱۸ & \\ r = ۵ & \Rightarrow & b \times ۵ + ۱ = ۳۳ & \Rightarrow & b = \frac{۳۲}{۵} & \text{غ ق ق} \\ r = ۱۱ & \Rightarrow & b \times ۱۱ + ۱ = ۱۵ & \Rightarrow & b = \frac{۱۴}{۱۱} & \text{غ ق ق} \end{array}$$

فقط دو مورد قابل قبول است.

۴۰. گزینه ۴

$$۹۲۳ = ۹b + r \, , \ ۰ \le r < b$$
$$r \ge ۰ \Rightarrow ۹۲۳ - ۹b \ge ۰ \Rightarrow ۹b \le ۹۲۳ \Rightarrow b \le ۱۰۲/\cdots$$
$$r < b \Rightarrow ۹۲۳ - ۹b < b \Rightarrow ۱۰b > ۹۲۳ \Rightarrow b > ۹۲/۳ \Rightarrow ۹۳ \le b \le ۱۰۲ \xrightarrow[\text{را برمی داریم}]{\text{مضارب ۳}} b = ۹۳\,,\ ۹۶\,,\ ۹۹\,,\ ۱۰۲$$

روش دوم:

$$q = \left[\frac{a}{b}\right] \Rightarrow ۹ = \left[\frac{۹۲۳}{b}\right] \Rightarrow ۹ \le \frac{۹۲۳}{b} < ۱۰ \xrightarrow{\text{طرفین عکس}} \frac{۱}{۱۰} \le \frac{b}{۹۲۳} < \frac{۱}{۹} \xrightarrow{\times ۹۲۳} ۹۳ \le b \le ۱۰۲$$

در ادامه مانند روش اول عمل می‌کنیم

۴۱. گزینه ۳ ابتدا قضیه‌ی الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$a = ۱۰ \times r + r^{۲} \qquad ۰ \leq r^{۲} < ۱۰$$

حال شرط باقیمانده را بر آن اعمال می‌کنیم:

$$r^{۲} < ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} r = ۰ \rightarrow a = ۰ \\ r = \pm ۱ \xrightarrow{r=۱} a = ۱۱ \\ r = \pm ۲ \xrightarrow{r=۲} a = ۲۴ \\ r = \pm ۳ \xrightarrow{r=۳} a = ۳۹ \end{cases}$$

دقت کنید که هنگامی که هم مقسوم ومقسوم‌علیه عددی طبیعی هستند حتماً خارج قسمت عدد حسابی است. به همین دلیل rهای منفی را در نظر نگرفته‌ایم.

۴۲. گزینه ۱ شرط گفته شده در سؤال را بر تقسیم دلخواهی اعمال می‌کنیم و شرط باقی‌مانده را هم لحاظ می‌کنیم:

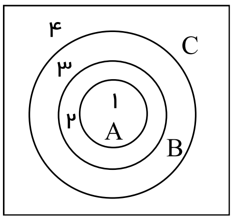
$$\begin{cases} a = ۱۲q + (\frac{۳}{۵}q + ۲) \\ ۰ \leq \frac{۳}{۵}q + ۲ < ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۲q + (\frac{۳}{۵}q + ۲) \\ \frac{۳}{۵}q < ۱۰ \Rightarrow q \leq ۱۶ \end{cases}$$

چون q عدد صحیح است و $\frac{۳}{۵}q + ۲$ باید عدد صحیح غیرمنفی باشد پس باید q مضرب ۵ باشد پس ۱۵ یا ۱۰ یا ۵ یا $q = ۰$ می‌تواند باشد،

لذا حداقل و حداکثر a را بر اساس q به دست می‌اوریم:

$$\left. \begin{array}{l} q = ۱۵ \Rightarrow a\text{max} = ۱۲ \times ۱۵ + (\frac{۳}{۵} \times ۱۵ + ۲) = ۱۹۱ \\ q = ۰ \Rightarrow a\text{min} = ۱۲ \times ۰ + (\frac{۳}{۵} \times ۰ + ۲) = ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow |a\text{max} - a\text{min}| = ۱۸۹$$

۴۳. گزینه ۳



نکته: اگر $a = bq + r$ باشد $a^{n} = bq' + r^{n}$ می‌شود.

چون a مضرب ۵ نیست پس:

$$a = ۵k \pm ۱ \Rightarrow a^{۲} = ۵q + ۱ \qquad \text{یا} \qquad a = ۵k \pm ۲ \Rightarrow a^{۲} = ۵q + ۴$$

گزینه‌ی (۲) به صورت $۵k - ۱$ نوشته شده که همان $۵k + ۴$ است. پس جواب گزینه ي (۳) است.

۴۴. گزینه ۳

$$a = bq + r \quad , \quad ۰ \leq r < b$$
$$b + ۱۰۰۰ = bq + ۹۵ \qquad , \qquad ۰ \leq ۹۵ < b$$
$$b(q - ۱) = ۹۰۵ = ۱ \times ۹۰۵ = ۵ \times ۱۸۱$$

با توجه به اینکه $b > ۹۵$ است، عدد b فقط می‌تواند ۹۰۵ یا ۱۸۱ باشد.

$$\begin{cases} b = ۱۸۱ \\ q - ۱ = ۵ \Rightarrow q = ۶ \end{cases} \qquad \text{یا} \qquad \begin{cases} b = ۹۰۵ \\ q - ۱ = ۱ \Rightarrow q = ۲ \end{cases}$$

۴۵. گزینه ۲ همواره خارج قسمت تقسیم a بر b، برابر است با $[\frac{a}{b}]$ ، در نتیجه داریم:

$$q = [\frac{۱۳! - ۱}{۱۳}] = [\frac{۱۳!}{۱۳} - \frac{۱}{۱۳}] = [۱۲! - \frac{۱}{۱۳}] = ۱۲! - ۱$$

۴۶. گزینه ۴ با توجه به این‌که اگر $a + b | a^{n} + b^{n}$ باید n فرد باشد و بالعکس، پس:

$$۸۲ | ۳^{n} + ۱ \Rightarrow ۳^{۴} + ۱ | ۳^{n} + ۱ \xrightarrow{\text{باید}} \frac{n}{۴} = \text{فرد} = ۲k + ۱ \rightarrow n = ۴(۲k + ۱)$$

حال مضارب فرد دو رقمی چهار عبارتنداز: $\{۳ \times ۴ \,,\, ۵ \times ۴ \,, \cdots \,,\, ۲۳ \times ۴\}$ که یازده مقدار است. هم‌چنین می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد:

یازده مقدار $\quad ۱۰ \le ۴(۲k+۱) < ۱۰۰ \Rightarrow ۳ \le ۲k+۱ < ۲۵ \Rightarrow ۱ \le k < ۱۲ \Rightarrow ۱ \le k \le ۱۱$

نکته: در حالت کلی داریم: $\quad a+b|a^{۲n}-b^{۲n} \qquad a+b|a^{۲n+۱}+b^{۲n+۱} \qquad a-b|a^n-b^n$

و برعکس اگر $a+b|a^n+b^n$ باشد، باید باقیمانده‌ی تقسیم a^n+b^n بر $a+b$ برابر صفر باشد، پس باید: n فرد باشد.

۴۷. گزینه ۳

به ازای n های طبیعی و فرد $\quad ; \quad a+b|a^n+b^n$

a^n+b^n به شرطی بر $a+b$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد. باید کاری کنیم که توان فرد شود.

$$۱۱^{۱۰}+۲^{۱۰} = (۱۱^۲)^۵ + (۲^۲)^۵ = (۱۲۱)^۵ + (۴)^۵$$

که بر $۱۲۱+۴ = ۱۲۵$ بخش‌پذیر است.

۴۸. گزینه ۳ به n یک عدد دلخواه زوج مثلاً ۲ نسبت می‌دهیم

$$۱۴^n+۵ = ۱۴^۲+۵ = ۱۹۶+۵ = ۲۰۱$$

گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) رد می‌شوند گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۴۹. گزینه ۴

نکته:

$$a^x+b^x \,\big|\, a^n-b^n \leftrightarrow \frac{n}{x} = \text{زوج}$$

$$a^x+b^x \,\big|\, a^n+b^n \leftrightarrow \frac{n}{x} = \text{فرد}$$

اگر $۳^۳+۱\,|۳^n-۱$ ، آنگاه n مضرب زوج ۳ یا به عبارت دیگر مضرب ۶ است، یعنی:

$$\frac{n}{۳} = ۲k \Rightarrow n = ۶k \Rightarrow \ n \in \{۶, ۱۲, ۱۸, \cdots\}$$

اگر $۲^۴+۱\,|۲^n+۱$ آنگاه n مضرب فرد ۴ است یعنی :

$$\frac{n}{۴} = ۲k+۱ \Rightarrow n = ۸k+۴ \Rightarrow n \in \{۴, ۱۲, ۲۰, \cdots\}$$

بنابراین برای برقراری هر دو شرط، n باید به اشتراک این دو مجموعه تعلق داشته باشد. بنابراین مقادیر ممکن برای n عبارتند از:

۱۲, ۳۶, ۶۰, ۸۴

۵۰. گزینه ۲

$$(a+b)^۳ - ۳a^۲b - ۳ab^۲ = a^۳+b^۳ \Rightarrow a+b\,|a^۳+b^۳$$

nهای طبیعی و فرد $\quad ; \quad a+b|a^n+b^n$

۵۱. گزینه ۴

چون باید معادله جواب صحیح داشته باشد پس y عددی صحیح است و باید $\dfrac{۸}{۳x-۱}$ هم عددی صحیح باشد، بنابراین: $۳x-۱$ باید مقسوم علیه عدد ۸ باشد پس:

$$۳x-۱|۸ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ۳x-۱ = \pm ۱ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{۲}{۳} & \text{غ ق ق} \\ x = ۰ & \text{ق ق} \\ , & \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x-۱ = \pm ۲ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = ۱, & \text{ق ق} \\ x = -\frac{۱}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x-۱ = \pm ۴ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{۵}{۳} & \text{غ ق ق} \\ x = -۱ & \text{ق ق} \end{cases} \\ \text{یا} \\ ۳x-۱ = \pm ۸ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = ۳ & \text{ق ق} \\ x = -\frac{۷}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

۵۲. گزینه ۴

تذکر:

$$\left.\begin{array}{l} a|b \\ a|c \end{array}\right\} \xrightarrow{m,n\in Z} a|mb+nc$$

$$۱)\ \begin{cases} a-b|\,a \\ a-b|\,a-b \end{cases} \Rightarrow a-b|\,a-(a-b) \Rightarrow a-b|\,b$$

$$\begin{cases} a-b|\,a \\ a-b|\,b \end{cases} \Rightarrow a-b|\,a+b$$

$$\begin{cases} a-b|\,a \xrightarrow{\times ۲} a-b|\,۲a \\ a-b|\,b \xrightarrow{\times ۳} a-b|\,۳b \end{cases} \xrightarrow{+} a-b|\,۲a+۳b$$

برای گزینه ۴ می توان مثال نقض آورد مثلاً: $b=۳^۳, a=۶$

۵۳. گزینه ۴ چون در گزینه‌ها تعداد عوامل ۲ مورد اشاره قرار گرفته، وضعیت عوامل ۲ را در اعداد a و b بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر a و b هر دو زوج باشند $\Rightarrow ab(a-b)=۲k\times ۲k'\times ۲k''=۸q$

حالت دوم: اگر a و b هر دو فرد باشند $\Rightarrow ab(a-b)=(۲k+۱)\left(۲k'+۱\right)\left(۲k''\right)=۲q$

حالت سوم: اگر a و b یکی فرد و دیگری زوج باشد $\Rightarrow ab(a-b)=(۲k)\left(۲k'+۱\right)\times\left(۲k''+۱\right)=۲q$

پس عدد داده شده تحت هر شرایطی بر ۲ بخش‌پذیر است.

۵۴. گزینه ۲

$$n=۲k+۱ \Rightarrow n^۲=۸q+۱$$

$$(n+۱)\left(n^۲+۳\right)=(۲k+۲)(۸q+۴)=۲(k+۱)\times ۴(۲q+۱)=۸k'$$

۵۵. گزینه ۱ نکته: عدد $n!+r$ به ازای $۲\le r\le n$ همواره مرکب است، زیرا:

$$\begin{cases} n!+۲=(۲\times ۳\times \cdots \times n)+۲=۲q & \text{مضرب } ۲ \\ n!+۳=(۲\times ۳\times \cdots \times n)+۳=۳q & \text{مضرب } ۳ \\ n!+r=(۲\times \cdots \times r\times \cdots \times n)=rq & \text{مضرب } r \\ n!+n=(۲\times \cdots \times n)+n=nq & \text{مضرب } n \end{cases}$$