۳۶. گزینه ۴ مراکز دسته‌ها به ترتیب برابر ۱۶ و ۱۸ و ۲۰ و ۲۲ و ۲۴ می‌باشند. برای راحتی کار در محاسبات از تمام داده‌ها ۲۰ واحد کم می‌کنیم و دقت کنید که واریانس تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x}=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_ix_i=\frac{۱}{۱۶}((۳\times(-۴))+(۲\times(-۲))+(۴\times ۰)+(۶\times ۲)+(۱\times ۴))=\frac{۱}{۱۶}(-۱۲-۴+۱۲+۴)=۰$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}F_i(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{۱۶}(۳(-۴-۰)^۲+۲(-۲-۰)^۲+۴(۰-۰)^۲+۶(۲-۰)^۲+۱(۴-۰)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۱۶}(۴۸+۸+۲۴+۱۶)=\frac{۹۶}{۱۶}=۶$$

۳۷. گزینه ۴

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

$$۹,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۴,۱۵,۱۸,۱۹,۱۹,۲۰,۲۲,۲۳\rightarrow\begin{cases}Q_۱=\dfrac{۱۲+۱۳}{۲}=۱۲/۵\\ Q_۳=\dfrac{۱۹+۲۰}{۲}=۱۹/۵\end{cases}$$

بنابراین داده‌های ۱۹ و ۱۹ و ۱۸ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۴ و ۱۳ داخل جعبه قرار می‌گیرند.

$$\bar{x}=\frac{۱۳+۱۴+۱۴+۱۵+۱۸+۱۹+۱۹}{۷}=۱۶$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲$$

$$=\frac{۱}{۷}\left((۱۳-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۴-۱۶)^۲+(۱۵-۱۶)^۲+(۱۸-۱۶)^۲+(۱۹-۱۶)^۲+(۱۹-۱۶)^۲\right)$$

$$=\frac{۱}{۷}(۹+۴+۴+۱+۴+۹+۹)=\frac{۴۰}{۷}\simeq ۵/۷۱$$

۳۸. گزینه ۲ در ۱۹ داده‌ی نمودار ساقه و برگ، داده‌ی دهم یعنی ۴۴ میانه است و مد هم برابر با ۵۴ است (چون سه بار تکرار شده است). بنابراین باید واریانس داده‌های بین ۴۴ و ۵۲ یعنی ۵۲ و ۴۸ و ۴۵ و ۴۵ را بدست آوریم. برای راحتی در محاسبات از تمام داده‌ها ۴۵ واحد کم می‌کنیم و دقت کنید که واریانس تغییری نمی‌کند و داده‌ها به صورت ۷ و ۳ و ۰ و ۰ درمی‌آیند.

$$\overline{x}=\frac{۰+۰+۳+۷}{۴}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵$$

$$\sigma^۲=\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i-\bar{x})^۲=\frac{۱}{۴}((۰-۲/۵)^۲+(۰-۲/۵)^۲+(۳-۲/۵)^۲+(۷-۲/۵)^۲)$$

$$=\frac{۱}{۴}(۶/۲۵+۶/۲۵+۰/۲۵+۲۰/۲۵)=\frac{۳۳}{۴}=۸/۲۵$$

۳۹. گزینه ۳

$$۱۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹ \rightarrow Q_۱ = \frac{۲+۳}{۲} = ۲٫۵ \quad , \quad Q_۳ = \frac{۷+۸}{۲} = ۷٫۵$$

بنابراین باید واریانس داده های ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ را بدست آوریم.

$$\bar{x} = \frac{۳+۴+۵+۶+۷}{۵} = \frac{۲۵}{۵} = ۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲ = \frac{۱}{۵}((۳-۵)^۲+(۴-۵)^۲+(۵-۵)^۲+(۶-۵)^۲+(۷-۵)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۴+۱+۰+۱+۴) = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

۴۰. گزینه ۴ در یازده داده‌ی نمودار ساقه و برگ، داده‌ی ششم یعنی **۴۲**، میانه است و داده‌های بیشتر از میانه عبارتند از:

۴۳, ۴۳, ۵۱, ۵۱, ۵۲

$$\bar{x} = \frac{۴۳+۴۳+۵۱+۵۱+۵۲}{۵} = \frac{۲۴۰}{۵} = ۴۸$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{۵}((۴۳-۴۸)^۲+(۴۳-۴۸)^۲+(۵۱-۴۸)^۲+(۵۱-۴۸)^۲+(۵۲-۴۸)^۲)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۵۰+۱۸+۱۶) = \frac{۸۴}{۵} = ۱۶٫۸$$

۴۱. گزینه ۲

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \frac{۱۰}{۵۰} = ۰٫۲$$

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ \rightarrow \sigma^۲ = \frac{۲٫۷۲}{۵۰} - (۰٫۲)^۲ = \frac{۵٫۴۴}{۱۰۰} - \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۱٫۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow \sigma = \frac{۱٫۲}{۱۰} = ۰٫۱۲$$

۴۲. گزینه ۲

$$۲x_۱+۳, ۲x_۲+۳, \cdots, ۲x_n+۳ \Rightarrow \sigma^۲ = ۴ \xrightarrow{\text{۳ واحد از داده‌ها کم می‌کنیم (واریانس تغییر نمی‌کند)}}$$

$$۲x_۱, ۲x_۲, \cdots, ۲x_n \Rightarrow \sigma^۲ = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{تمام داده ها را در } \frac{۱}{۲} \text{ ضرب می‌کنیم (واریانس } \frac{۱}{۴} \text{ برابر می‌شود)}} x_۱, x_۲, \cdots, x_n \Rightarrow \sigma^۲ = ۱ \Rightarrow \sigma = ۱$$

داده‌ها (-۳) برابر شده اند و با **۲** جمع شده‌اند پس انحراف معیار $|-۳|$ برابر می‌شود یعنی $۳ \times ۱ = ۳$ (جمع شدن داده‌ها با عدد **۲** تأثیری روی انحراف معیار ندارد)

۴۳. گزینه ۲ اگر x_i طول ضلع مربع باشد در این صورت $\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲ = ۲۴۰$ و $\bar{x} = ۴$ است.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲ = \left(\frac{۲۴۰}{۱۰}\right) - (۴)^۲ = ۲۴ - ۱۶ = ۸ \Rightarrow \sigma = ۲\sqrt{۲}$$

۴۴. گزینه ۴ اگر تمام داده‌های آماری در عدد مثبت وثابت k ضرب شوند چون انحراف معیار ومیانگین نیز k برابر می شوند و $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ است بنابراین ضریب تغیرات تغیری نمی‌کند. طبق این توضیحات، ضریب تغیرات دو گروه اعداد داده شده با هم برابر هستند و نسبت آن‌ها یک است.

۴۵. گزینه ۴ نکته: واریانس داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ برابر صفر است، اگر و تنها اگر $x_۱ = x_۲ = \ldots = x_n$

واریانس داده‌ها برابر صفر است، پس تمام داده‌ها باهم برابرند.

$$x_۱ = x_۲ = \ldots = x_۹ = ۱۲$$

بنابراین میانگین داده‌های $x_۱, x_۲, \ldots, x_۹$ برابر ۱۲ است.

۴۶. گزینه ۱

$$۲,۵,۱,۳,۴ \Rightarrow \overline{x} = \frac{۲+۵+۱+۳+۴}{۵} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

$$\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - x)^۲ = \sigma^۲ = \frac{(۲-۳)^۲+(۵-۳)^۲+(۱-۳)^۲+(۳-۳)^۲+(۴-۳)^۲}{۵} = \frac{۱+۴+۴+۰+۱}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{\sigma^۲} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\overline{x}} = \frac{۱/۴}{۳} = \frac{۱/۴\times ۱۰}{۳\times ۱۰} = \frac{۱۴}{۳۰} \simeq ۰/۴۶$$

۴۷. گزینه ۴

$$\text{(نفر } A\text{) میانگین } \bar{x} = \frac{۲۲+۲۳+۲۴+۲۷+۲۹}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

$$\text{(نفر } B\text{) میانگین } \bar{x} = \frac{۲۱+۲۴+۲۵+۲۷+۲۸}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

اکنون ضریب تغییرات هر دو را حساب می‌کنیم:

$$\sigma_A^۲ : \frac{(۲۲-۲۵)^۲+(۲۳-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۹-۲۵)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۹+۴+۱+۴+۱۶}{۵} = \frac{۳۴}{۵} = ۶/۸ \to \sigma A = \sqrt{۶/۸} \to CV_A = \frac{\sqrt{۶/۸}}{۲۵}$$

$$\sigma_B^۲ : \frac{(۲۱-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲+(۲۸-۲۵)^۲}{۵}$$

$$= \frac{۱۶+۱+۰+۴+۹}{۵} = ۶ \to \sigma B = \sqrt{۶} \to CV_B = \frac{\sqrt{۶}}{۲۵}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید ضریب تغییرات فرد B کمتر از فرد A است یعنی پراکندگی دقت عمل او کمتر است پس دقت عمل بیش‌تری دارد.

۴۸. گزینه ۱ ۲۹ داده‌ی آماری را به صورت ۱۲, ۱۳, ۲۱, ۲۲ و $x_۱, x_۲, \cdots, x_{۲۵}$ نشان می‌دهیم.

$$= \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}(x_i - \bar{x})^۲$$

$$۵ = \frac{۱}{۲۹}\Big((x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲+(۱۲-۱۷)^۲+(۱۳-۱۷)^۲+(۲۱-۱۷)^۲+(۲۲-۱۷)^۲\Big)$$

$$\to ۵\times ۲۹ = (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲+۲۵+۱۶+۱۶+۲۵$$

$$\to (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲ = ۱۴۵-۸۲$$

$$\to (x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots+(x_{۲۵}-۱۷)^۲ = ۶۳$$

چون چهار داده‌ی حذف شده، میانگینشان ۱۷ است $\left(\frac{۱۲+۱۳+۲۱+۲۲}{۴} = \frac{۶۸}{۴} = ۱۷\right)$ بنابراین پس از حذفشان دوباره میانگین همان ۱۷ است. اکنون واریانس ۲۵ داده‌ی باقی‌مانده را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{۲۵}\Big((x_۱-۱۷)^۲+(x_۲-۱۷)^۲+\cdots(x_{۲۵}-۱۷)^۲\Big) = \frac{۱}{۲۵}(۶۳) = \frac{۶۳}{۲۵} = ۲/۵۲$$

۴۹. گزینه ۱

وقتی داده‌های آماری را سه برابر می‌کنیم، انحراف معیار و میانگین هم سه برابر می‌شوند و وقتی به آن‌ها دو واحد اضافه می‌کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، دو واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{قدیم}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \qquad CV_{\text{جدید}} = \frac{۳\sigma}{۳\bar{x}+۲} \rightarrow \frac{CV_{\text{جدید}}}{CV_{\text{قدیم}}} = \frac{\frac{۳\sigma}{۳\bar{x}+۲}}{\frac{\sigma}{\bar{x}}} = \frac{۳\bar{x}}{۳\bar{x}+۲} = \frac{۴۵}{۴۵+۲} = \frac{۴۵}{۴۷}$$

۵۰. گزینه ۳

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب‌شده داده شده‌اند.

$$\underbrace{۳,۳,۴,۶,۶,۸}_{\text{نیمه‌ی اول داده ها}}, \underbrace{۸,۹,۱۱,۱۲,۱۲,۱۳}_{\text{نیمه‌ی دوم داده‌ها}}$$

و تعداد آن‌ها ۱۲ تاست. در هر سری شش داده داریم که میانه‌ی شش داده برابر با نصف مجموع دو داده‌ی وسط، یعنی داده‌ی سوم و چهارم است:

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها} = \text{چارک اول} = Q_۱ = \frac{۴+۶}{۲} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

$$\text{میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها} = \text{چارک سوم} = Q_۳ = \frac{۱۱+۱۲}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

طبق گفته‌ی مسأله از بین داده‌ها، اعداد کم‌تر از ۵ و بیش‌تر از ۱۱/۵ را حذف می‌کنیم که اعداد باقی‌مانده عبارتند از:

$$۶,۶,۸,۸,۹,۱۱$$

حالا ضریب تغییرات آن‌ها را می‌خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۲(۶)+۲(۸)+۹+۱۱}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^۲ = \frac{۲(۶-۸)^۲ - ۲(۸-۸)^۲ + (۹-۸)^۲ + (۱۱-۸)^۲}{۶} = \frac{۸+۰+۱+۹}{۶} = \frac{۱۸}{۶} = ۳$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{۳}$$

$$C_v = \frac{\sigma}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۸} \cong \frac{۱/۷}{۸} \cong ۰/۲۱$$

۵۱. گزینه ۴ اگر داده‌ها را سه‌برابر کنیم انحراف معیار و میانگین هم سه‌برابر می‌شوند. بنابراین ضریب تغییرات که حاصل تقسیم انحراف معیار بر میانگین است، تغییر نمیکند.

۵۲. گزینه ۱

واریانس از رابطه‌ی $\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} x_i^۲}{N} - (\bar{x})^۲$ بدست می‌آید.

$$\sigma_۱ = ۵ \Rightarrow \sigma_۱^۲ = ۲۵ \Rightarrow \frac{x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲}{۳} - \bar{x}_۱^۲ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \frac{x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲}{۳} = ۲۵+۹ = ۳۴ \Rightarrow x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲ = ۱۰۲$$

$$\sigma_۲ = ۳ \Rightarrow \sigma_۲^۲ = ۹ \Rightarrow \frac{x_۴^۲+x_۵^۲+x_۶^۲}{۳} - \bar{x}_۲^۲ = ۹ \Rightarrow \frac{x_۴^۲+x_۵^۲+x_۶^۲}{۳} - ۴۹ = ۹ \Rightarrow \frac{x_۴^۲+x_۵^۲+x_۶^۲}{۳} = ۵۸$$

$$\rightarrow x_۴^۲+x_۵^۲+x_۶^۲ = ۱۷۴$$

$$\text{(میانگین ۶داده)} \quad \bar{X} = \frac{(۳\times۳)+(۳\times۷)}{۶} = \frac{۹+۲۱}{۶} = ۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + x_۴^۲ + x_۵^۲ + x_۶^۲}{۶} - (\bar{X})^۲ = \frac{۱۰۲ + ۱۷۴}{۶} - ۲۵ = \frac{۲۷۶}{۶} - ۲۵ = \frac{۱۲۶}{۶} = ۲۱$$