

پایخ تشریحی:

۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} a = 34q + r \\ r = 7q \end{array} \right\} \Rightarrow a = 34q + 7q = 41q \quad (q \in \mathbb{Z})$$

$$0 \leq r < 34 \Rightarrow 7q < 34 \Rightarrow q < \frac{34}{7} \Rightarrow q_{\max} = 4$$

$$a = 41 \times 4 = 164$$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

مطابق الگوریتم تقسیم داریم: $a = 23k + 9$ ($k \in \mathbb{Z}$). چون a زوج و 9 فرد است. پس $23k$ عددی فرد و در نتیجه k فرد است، پس می توان k را به صورت $2q + 1$ ($q \in \mathbb{Z}$) نوشت. داریم:

$$a = 23(2q + 1) + 9 = 46q + 32 \Rightarrow \frac{a}{2} = 23q + 16$$

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a = 18k, b = 12q$$

$$a = bq' + r \Rightarrow 18k = 12qq' + r \Rightarrow r = 18k - 12qq' = 6(3k - 2qq') \Rightarrow r = 6m \Rightarrow 6 | r$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$802 = 14b + r \xrightarrow{0 \leq r < b} \begin{cases} r = 802 - 14b \geq 0 \Rightarrow b \leq 57 \\ r = 802 - 14b < b \Rightarrow b \geq 54 \end{cases} \Rightarrow 54 \leq b \leq 57$$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\overline{abb} + \overline{baa} = 2k \Rightarrow a + b = 2k'$$

بنابراین a و b یا هر دو زوجند یا هر دو فرد.

$$b, a \text{ هر دو زوج: } \begin{cases} a = 2t \\ b = 2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 \\ b^2 = 4t'^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q$$

$$b, a \text{ هر دو فرد: } \begin{cases} a = 2t + 1 \\ b = 2t' + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4t^2 + 4t + 1 \\ b^2 = 4t'^2 + 4t' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 - b^2 = 4q''$$

پس باقی مانده $a^2 - b^2$ بر 4 ، صفر است.

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به این که اگر $a + b | a^n + b^n$ ، باید n فرد باشد و بالعکس، پس:

$$82 | 3^n + 1 \Rightarrow 3^4 + 1 | 3^n + 1$$

پس باید $3^n + 1$ به صورت $(3^4)^{2k+1} + 1$ باشد، لذا n به صورت مضرب فرد 4 درمی آید:

$$n = 4(2k + 1)$$

حال مضارب فرد دورقمی چهار عبارتند از: $\{3 \times 4, 5 \times 4, \dots, 23 \times 4\}$ که یازده مقدار است. هم چنین می توان به صورت زیر عمل کرد:

$$10 \leq 4(2k + 1) < 100 \Rightarrow 3 \leq 2k + 1 < 25 \Rightarrow 1 \leq k < 12 \Rightarrow k = 1 \text{ تا } 11$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$a - b | a^n - b^n \quad a + b | a^{2n+1} + b^{2n+1} \quad a + b | a^{2n} - b^{2n}$$

و برعکس اگر $a + b | a^n + b^n$ ، باید n فرد باشد. می توانیم مثل روش حسابان بنویسیم: $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$ لذا اگر بخواهد

$a + b | a^n + b^n$ باشد، باید باقی مانده $a^n + b^n$ بر $a + b$ برابر صفر باشد. پس باید:

$$a^n + (-a)^n = 0 \Rightarrow n \text{ باید فرد باشد.}$$

$$\begin{cases} x | a-2 \Rightarrow a-2 = xk \\ x | b-5 \Rightarrow b-5 = xk' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = xk + 2 \\ b = xk' + 5 \end{cases} \Rightarrow ab = xk'' + 10 \Rightarrow ab - 9 = xk'' + 1$$

راه حل دیگر: در حالت کلی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x | a-b \Rightarrow x | ac-bc \\ x | c-d \Rightarrow x | bc-bd \end{array} \right\} \Rightarrow x | ac-bd$$

لذا:

$$\left. \begin{array}{l} x | a-2 \\ x | b-5 \end{array} \right\} \Rightarrow x | ab-10 \Rightarrow ab-10 = xq \Rightarrow ab-9 = xq+1$$

۸- گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: عدد $a^n + b^n$ به ازای مقادیر فرد n بر $a+b$ بخش پذیر است، زیرا به ازای مقادیر فرد داریم:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

بنابراین:

$$2^{18} + 3^{18} = (2^2)^9 + (3^2)^9 = 9^9 + 4^9, \quad 9+4 | 9^9 + 4^9$$

نکته: در حالت کلی داریم:

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} : a-b | a^n - b^n \\ a+b | a^{2n+1} + b^{2n} + 1 \\ a+b | a^{2n} - b^{2n} \end{aligned}$$

۹- گزینه ۱ پاسخ است.

روش اول: معادل دو عدد را در مبنای ۱۰ نوشته و از هم کم می کنیم.

$$(1100101)_2 - (110)_2 - (2^6 + 2^5 + 2^2 + 2^0) - (2^2 + 2^1) = 2^6 + \underbrace{2^5 - 1}_{21} = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = (1011111)_2$$

روش دوم: مشابه روشی که برای عمل تفاضل دو عدد در مبنای ده استفاده می کنیم انجام می دهیم. با این تفاوت که ارزش مکانی هر رقم دو برابر رقم سمت راست خودش است بنابراین در صورت لزوم از یک رقم، یک واحد کم کرده و به ازای آن ۲ واحد به رقم سمت راستش اضافه می کنیم. (در مبنای ۱۰ با انجام این کار ۱۰ واحد اضافه می کنیم).

$$\begin{array}{r} (1100101)_2 \\ - (110)_2 \\ \hline (1011111)_2 \end{array}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

بزرگ ترین عدد چهاررقمی در مبنای ۵ برابر است با: $5^4 - 1 = 624 = (4444)_5$

باقی مانده ی تقسیم این عدد بر ۹ برابر ۳ است، پس عدد $(4441)_5$ بر ۹ بخش پذیر است و داریم:

$$13 = 4 + 4 + 4 + 1 = \text{مجموع ارقام}$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است پس $b=1$

$$(\delta \cdot 0 \cdot 1)_8 \leq (\delta \cdot a \cdot 1)_8 \leq (\delta \cdot 7 \cdot 1)_8$$

$$2561 \leq (\delta \cdot a \cdot 1)_8 \leq 2617 \Rightarrow 2561 \leq (\delta 1)^2 = 2601 \leq 2617$$

$$\begin{array}{r} 2601 \\ 1 \overline{) 2601} \\ \underline{2601} \\ 0 \end{array} \Rightarrow 2601 = (\delta \cdot 5 \cdot 1)_8 \Rightarrow a = 5$$

$$\Rightarrow a + b = 6$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

بزرگ‌ترین عدد ممکن در مبنای ۷ عبارت است از:

$$(666)_7 = 6 + 6 \times 7 + 6 \times 7^2 = 342$$

که دقیقاً عدد قبل 7^3 است. اولین مکعب کامل قبل از 7^3 ، 6^3 است که زوج است. پس بزرگ‌ترین مکعب کامل فرد قبل از 7^3 ، عدد 5^3 است.

$$\begin{array}{r} 5^3 = 125 \\ 119 \overline{) 125} \\ \underline{119} \\ 6 \end{array} \Rightarrow 5^3 = (236)_7$$

لذا بزرگ‌ترین مکعب کامل فرد در مبنای ۷، $(236)_7$ است.

$$a + b + c = 11$$

دقت کنید در این گونه سؤالات منظور از مکعب کامل، مکعب کامل در مبنای ۱۰ است.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ است.

ابتدا هر دو عدد را در مبنای داده شده بسط می‌دهیم:

$$(abc)_7 = (cba)_5 \Rightarrow 49a + 7b + c = 25c + 5b + a \Rightarrow 2b = 24c - 48a \Rightarrow b = 12c - 24a$$

$$\Rightarrow b = 12(c - 2a) \xrightarrow[\substack{\text{رقم است در مبنای } 5 \\ 12|b, 0 \leq b < 5}]{} b = 0 \Rightarrow c - 2a = 0 \Rightarrow c = 2a$$

پس $a=1$ و $a=2$ (با توجه به این که $a, b, c < 5$)، بنابراین فقط دو جواب دارد.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{aligned} 3p+1 &= n^2 \Rightarrow (n^2-1) = (n-1)(n+1) = 3p \\ 1 \quad 2p &\Rightarrow p=1 \\ 3 \quad p &\Rightarrow \boxed{p=5} \\ p \quad 2 &\Rightarrow p=1 \\ 3p \quad 1 &\quad \times \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A = (3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 3^2 \times 5^2) = 3 \times 5 \times (7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 3 \times 5)$$

این عدد بر اعداد ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۱۹ و ۳ و ۵ تقسیم‌پذیر نمی‌باشد اما چون جمع دو عدد زوج است، بر ۲ بخش‌پذیر است.

$$\Rightarrow 2|A \quad 3|A \quad 5|A$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

چون $\sqrt{999} \approx 31$ است، لذا کافی است تقسیم‌پذیری بر بقیه‌ی اعداد اول بین ۲۲ و ۳۱ را کنترل کنیم. لذا حداکثر لازم است بر ۲۳ و ۲۹ و ۳۱ تقسیم کنیم.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} p | 40! + p^2 + p \\ p | p^2 + p \end{array} \right\} \Rightarrow p | 40! \Rightarrow p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

چون مجموع دو عدد اول فرد است، حتماً یکی از دو عدد ۲ بوده است. لذا:

$$2 + 101 = 103 \Rightarrow 2 \times 101 = 202$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$(160)_7 = 1 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 0 = 91 \Rightarrow (164)_7 = 95, (165)_7 = 96, (166)_7 = 97$$

۹۶ بر ۲ و ۹۵ بر ۵ و ۹۱ بر ۷ تقسیمپذیر است لذا ۹۱ از همه دیرتر حذف می شود. ۹۷ اول است و اصلاً حذف نمی شود.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

هر عدد اول بزرگتر از ۳ به صورت $6k \pm 1$ نوشته می شود و داریم:

$$p = 6k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12 \underbrace{(3k^2 \pm k)}_{k'} + 1 = 12k' + 1 \xrightarrow{k'=2q} p^2 = 24q + 1$$

$$p^2 + 47 = 24q + 48 = 24(q + 2) = 24q' \Rightarrow 24 | p^2 + 47$$

تذکر: حاصل عبارت $24k^2 \pm k$ ، به ازای جمیع مقادیر صحیح k ، عددی زوج است.